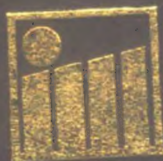
孤立子理论与应用



应用数学丛书

孤立子理论与应用

谷超豪　郭柏灵　李翊神
曹策问　田　畴　屠规彰
胡和生　郭本瑜　葛墨林

浙江科学技术出版社



应用数学丛书

孤立子理论与应用

谷超豪等著

*

浙江科学技术出版社出版

商务印书馆上海印刷厂排版

浙 江 新 华 印 刷 厂 印 刷

浙 江 省 新 华 书 店 发 行

开本：850×1168 1/32 印张：15.5

字数：373,000

1990 年 8 月第 一 版

1990 年 8 月第一次印刷

印数：1—1,550

ISBN 7-5341-0217-0/O·10

定 价： 10.00 元

责任编辑：周伟元

封面设计：孙 菁

Published by Zhejiang Publishing House
of Science and Technology
125 Wulin road, Hangzhou, China

First published 1990
Printed in Xinhua Printing Factory
Library of congress catalogue card:
ISBN 7-5341-0247-0/O·10
Responsible Editor: Zhou Weiyuan
Cover Design: Sun jing

出版说明

在近代科技发展中，应用数学在国民经济和科学研究的各个领域的作用和地位显得日益重要，世界上许多发达国家对它非常重视，投入了大量的资金和研究力量。我国在这方面的研究工作也已有一定的规模和成果。我们为了推进和交流应用数学的成果，在苏步青教授、吴文俊教授的关怀下，由谷超豪教授为主编，组织出版这套《应用数学丛书》。

本《丛书》的出版，得到了数学界的重视。陈省身教授、杨振宁教授对此给予热情的鼓励和支持。国家自然科学基金会对《丛书》的出版非常重视。

为了反映应用数学在各主要分支的现代水平，特别是我国数学家的研究成果，以及国外的最新进展，向读者介绍应用数学的理论和各种方法、数学模型，《丛书》计划在数学物理、经济数学、组合设计、运筹学、控制理论、应用统计、通信理论、生物数学、几何造型等应用分支出版一些质量较高的专著。

我们希望《丛书》的出版，能为中国数学赶超世界水平作出一点贡献。

《应用数学丛书》编委会

内 容 简 介

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分，在流体力学、等离子体物理、非线性光学、经典场论、量子论等领域有着广泛的应用.近年来，国际上对孤立子的研究发展很快，很受重视，在国内也已形成相当强的力量，在一些前沿课题上取得了较大的进展.

本书对孤立子的若干最基本概念，如物理背景、反散射方法、Bäcklund 变换、有限维完全可积系、对称性、Kac-Moody 代数、孤立子与微分几何、非线性波的数值研究、引力波孤立子等，作了详细介绍，并对问题的关键所在给以清晰地阐述，列举了它的一些应用，然后介绍了该学科的某些最前沿研究和作者研究的新成果.

本书适合数学、物理等有关专业人员，以及高等院校有关专业教师和学生学习参考.

ABSTRACT

The soliton theory is an important branch of applied mathematics and mathematical physics. It has important applications in fluid mechanics, nonlinear optics, classical and quantum fields theories etc. It is one of the most active fields in science. In China several groups have been formed for the research in this field in recent years. Important progress has been made in some subjects.

This book gives expository reviews of some basic ideas, such as physical backgrounds, inverse scattering, Bäcklund transformations, completely integrable systems of finite dimensional, symmetry, Kac-Moody algebra, solitons and differential geometry, numerical analysis for nonlinear waves, and gravitational solitons. Some essential points are emphasized and several applications are sketched. Some recent developments together with new achievements obtained by the authors are presented.

This book has been written for related specialists, teachers and students in mathematics and physics.

前 言

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分．在最近二十余年中，它得到了迅速的发展．

孤立子往往也称为孤立波．它是指一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解，以及与之相应的物理现象．用物理的语言来说，这些性质是：(i) 能量比较集中于一个较狭小的区域；(ii) 两个孤立子相互作用时出现弹性散射现象（即波形和波速能恢复到原状）．可以说，孤立子具备了粒子和波的许多性能，在自然界有一定的普遍性．许多学科领域，如流体力学，等离子体物理，非线性光学，经典场论和量子场论等，都包含着和孤立子理论密切相关的重要问题．近年来，人们也以更广泛的意义下理解孤立子这一术语，比如说，具性质 (i) 的一些静态解有时也称为孤立子．

孤立子理论的产生和发展是非线

性偏微分方程研究中的一个重大事件.大家知道,对于数学物理中的许多线性问题,傅里叶方法是非常有用的,可以由之得出许多准确解而使问题得到完善的解答.而非线性偏微分方程的难度大得多.但孤立子理论却蕴藏着一系列的制作准确解的方法,特别是其中的反散射方法,在一定程度上可以看成是非线性问题的傅里叶方法.经典分析和泛函分析,李群、李代数和无限维代数,微分几何(有限维和无限维),代数几何,拓扑学,动力系统以及计算数学等数学分支,对孤立子的研究都有重要作用.另一方面,孤立子的研究也对数学的各个分支产生了一定的影响.

由于上述两方面的原因,孤立子理论受到了国际上数学界和物理学界的充分重视,研究工作十分活跃,范围日趋广泛,近十年来,每年都有专门性的国际学术会议,已出版了一些专著.此外还有多种会议记录和论文集,而在各种杂志上发表的论文,其数量是非常大的,许多国家,都投入相当强的研究力量,以各种不同的风格和角度,来推动这一理论的前进,利用它来解

决应用问题.

在我国,从1974年开始,杨振宁、李政道、陈省身等教授在回国讲学时,先后向我们介绍了孤立子理论的进展,指出其重要性.与此同时,中国科学院冯康教授率先提倡并组织力量进行研究,随着科学工作条件的改善,国际交流的开展和中青年研究人员的成长,我国对孤立子理论的研究也蓬勃开展起来,形成了一支实力相当强的队伍,在若干课题上取得了优秀的成果,在国际上开始产生一定的影响.不少单位都把孤立子理论列为重点研究课题,南开大学数学研究所理论物理部将"可积系统的物理模型"列为近期研究的主题,就是一个例子.

国内对孤立子研究的交流活动,已有所开展.1980年,在冯康和张学铭两位教授的主持下,曾在厦门举行过一次学术讨论会.1986年,在上海也举行过一次小型讨论会,到会同志一致认为,要把交流活动经常化起来并加以扩大,大家认为,编写出一本专门著作,对孤立子理论的若干最基本的方面,作深入浅出的介绍,并引导有志于研究这一理论的人员到达研究的

前沿，这将对我国进一步发展这方面的研究有很大的好处，现在这本书，就是为了适应这个要求而编写的．

本书是一部集体的作品，其内容范围，读者可以从目录中知其大概．需要指出的是，各位作者都在有关的方面作过系统的研究，都有各自的切身体会，大家都力求从最基本的概念讲起，把问题的关键所在阐述清楚，然后又反映和介绍最前沿的研究，以及他们本人的新成果．大家希望，这本书能够起预期的作用．

由于孤立子理论的内容日趋丰富，本书显然还不够涉及它的一切重要方面，例如Riemann–Hilbert方法，代数几何方法等；许多应用问题，特别是它在各类技术问题上的具体应用，也未能涉及，这是我们感到很不足的地方．由于各位作者都很繁忙，聚会时间也不可能很多，书中会有不少缺点，希望读者提出宝贵的意见．

谷超豪

1989年10月

目　　录

前　言

第 一 章

第 六 章

第 七 章

第 八 章

第九章

CONTENTS

第一章

孤立子与近代物理

郭柏灵

§1 引　言

早在1834年，由英国著名科学家Scott.Russell发现的孤立波现象，随着近代物理学和数学的发展，近二十余年引起人们极大的关注，对这一现象的兴趣与日俱增．现在，数值计算和理论分析均已证明，一大批非线性发展方程具有孤立子解．孤立波具有非常奇特的性质，它们在相互作用中保持稳定的波形，这颇类似于粒子碰撞的性质，据此，Kruskal和Zabusky将其命名为“孤立子”．孤立波不但在自然界中被观察到，现在，一些孤立波已能在实验室中产生．

孤立子理论与近代物理息息相关．一方面，这一理论被用于解释许多物理问题；另一方面，新的物理问题的提出也促进了孤立子理论不断深入和拓展．为了进一步说明这种相互关系，简要地回顾一下孤立子理论产生和发展的历史是有益的．我们知道，1834年Russell偶然观察到了一种奇妙的水波．1844年，他在《英国科学促进协会第14届会议报告》这份材料上发表“论波动”一文，对此现象作了生动的描述：“我正在观察一条船的运动，这条船被两匹马拉着，沿着狭窄的河道迅速前进着．突然，船停了下来，河道

内被船体带动的水团并不停止，它们积聚在船头周围激烈地扰动着，然后水浪呈现出一个滚圆而平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰，它以巨大的速度向前滚动着，急速地离开了船头，在行进中它的形状和速度并没有明显的改变. 我骑在马上紧跟着观察，它以每小时约八九英里①的速度滚滚向前，并保持长约三十英尺、高约一至一英尺半的原始形状. 渐渐地，它的高度下降了，当我跟踪一至二英里之后，它终于消失在逶迤的河道之中.”这就是Russell观察到的奇特现象. 进而他认为，这种孤立波是流体运动的一个稳定解，并称它为“孤立波”. Russell当时未能成功地证明并使物理学家信服他的论断. 此后，有关孤立波的问题在当时许多物理学家中引起了广泛的争论. 直到六十年后的1895年，荷兰著名数学家Korteweg和他的学生de Vries研究了浅水波的运动，在长波近似和小振幅的假定下，建立了单向运动的浅水波运动方程

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{\sigma}{3}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right). \tag{1-1-1}$$

这里，η为波峰高度，l为水深，g为重力加速度，α, σ均为物理常数. 他们对孤立波现象作了较为完整的分析，并从方程(1-1-1)求出了与Russell描述一致的，即具有形状不变的脉冲状的孤立波解，从而在理论上证实了孤立波的存在. 上面的结果，是以Korteweg指导下de Vries写的一篇博士论文形式发表的，方程(1-1-1)，即著名的KdV方程，就写在该文的第9页上. 然而，这种波是否稳定？两个孤立波碰撞后能否变形？这些问题长期没能得到解答. 以致有些人怀疑，既然方程(1-1-1)是非线性偏微分方程，解的迭加原理不满足，碰撞后两个孤立波的形状很可能会破坏殆尽. 持这种观点的人认为这种波“不稳定”，因而研究它没有什么物理意义，于是，关于孤立波的研究乃告搁浅.

另外一个问题是，象Russell描述的这种孤立波是否在流体

---

① 1英里=1.609公里，1英尺=0.305米

力学以外的其他物理领域中出现呢?在20世纪初叶,这也是使人捉摸不定的问题.一直到50年代,由于著名物理学家Fermi, Pasta和Ulam的工作(见章末[4]),才出现了新的局面.他们将64个质点用非线性弹簧连接成一条非线性振动弦.初始时,这些谐振子的所有能量都集中在一个质点上,即其他63个质点的初始能量为零.按照经典的理论,只要非线性效应存在,就会有能量均分,各态历经等现象出现,即任何微弱的非线性相互作用,可导致系统的非平衡状态向平衡状态过渡.但实际计算的结果却使他们大吃一惊:原来,能量达到平衡的概念是错误的.实际上,经过相当长时间以后,几乎全部能量又回到了原来的初始分布.这就是著名的FPU问题.当时,由于只在频率空间来考虑,未能发现孤立波解,所以该问题未能得到正确的解释.该文在Fermi生前也没有发表.后来,人们发现,可以把晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条,这恰好是Fermi所研究的情况.Toda研究了这种模式的非线性振动,果然得到了孤立波解,使FPU问题得到了正确的解答,从而进一步激起了人们对孤立波研究的兴趣.

随后,1962年Perring和Skyrme研究基本粒子模型时,对sine-Gordon方程作了数值解,他们的结果表明:这个方程产生的孤立波也不散开,即使碰撞后两个孤立波也仍保持着原有的形状和速度.

1965年,美国著名物理学家、美国科学院院士Kruskal和物理学家Zabusky用数值模拟方法详细地考察和分析了等离子体中孤立波碰撞的非线性相互作用过程,得到了比较完整和丰富的结果,并进一步证实了这类孤立波相互作用后不改变波形的论断.他们的结果使人们感到惊喜.上面已经提到,由于这种孤立波具有类似于粒子碰撞后不变的性质,他们命名这种孤立波为孤立子.

Kruskal和Zabusky的这项研究工作,是孤立子理论发展史中的一个重要里程碑,他们引入"孤立子"概念,确切地揭示这种

孤立波的本质,已被普遍接受. 这以后的二十多年,孤立子理论的研究工作更加蓬勃发展,在世界范围内掀起了研究的热潮. 除了上述流体物理、固体物理、基本粒子物理、等离子体物理等领域中,对孤立子的研究不断深入外,在凝聚态物理、超导物理、激光物理、生物物理等领域中,也相继发现了孤立子的存在. 目前,较为完整的数学和物理的孤立子理论已逐步形成.

综上所述, 孤立子理论的产生和发展的确是与近代物理密切相关的. 这一理论既包括了有关的数学理论,也包括了物理理论,数学的严密性和物理学的启发性和实用性两者相互结合, 相互依存,相互渗透,相互促进,使其显示出强大的生命力. 这也正是现代自然科学发展的重要特点之一.

现代自然科学发展的另一个特点是:理论与实验的结合.这一特点在孤立子的研究中,也得到充分体现. 目前,孤立子研究已成为许多物理实验室的重要课题.

如前所述, 孤立子的客观存在早在上世纪就为 Russell 所发现. 一个半世纪之后,本世纪 70 年代初, 物理学家 Ikezi, Taylor 和 Baker 等终于在水箱实验中人为产生并亲眼重见 Russell 浅水波,即 KdV 型孤立波的传播.

在激光打靶中, 人们也观察到由于坍塌出现的涡旋型孤立波的传播以及激光光束在非线性介质中自聚焦产生的孤立子. 利用孤立子理论, 已成功地解释了激光打靶中产生的密度坑以及红外线的外移等问题. 这些问题多年来未能用经典理论给予满意的解释.

超导的 Josephson 效应对当代物理学和电子技术均有重要意义. 在构成 Josephson 结的两块超导材料中, 超导电子对波函数的位相差 φ 满足 sine-Gordon 方程. 采用带有 Josephson 隧道结分路的超导传输线, 证实了孤立子的存在. 最近, 美国新泽西州荷尔姆代贝尔电话实验室的 L. F. Mollenaner, R. H. Stolen

和J. Gordon等人，在石英蕊光纤材料中观察到了光脉冲型孤立子的传播. 这个实验室，已开始使用孤立波来改进信号传输系统，提高其传输率，即在传播中使之具有不损失波形，不改变速度，保真度高，保密性好等优点，他们宣称在其光纤维的孤立波传输实验中已取得了可喜的进展.

总之，在实验室中研究孤立波，并将其研究成果进一步应用于技术，这无疑会进一步推动孤立子理论研究的开展，并使其具有更为坚实的基础.

数值模拟在孤立子研究中同样起着很重要的作用. 例如，对于KdV方程，虽然在1895年已由Korteweg-de Vries对孤立波作了解析处理，但它的非线性现象的丰富内容却一无所知，直到1965年，Kruskal和Zabusky通过对调和晶格模型得到的KdV方程的数值计算，发现了孤立子相互作用后波形保持不变的这种极大稳定性之后，人们才对孤立子产生很大的兴趣和重视. 其他如FPU问题的计算，Perring和Syryme对sine-Gordon方程两个孤立子解(kink)的计算，贝尔实验室的结果与J. Satsama, N.Yajima等人数值计算结果的吻合，Ikezi等人实验结果和电子计算机计算结果的一致，都为物理上分析孤立子的存在性提供了重要的依据. 随着孤立子问题研究的深入和复杂化，特别是对于多个孤立子、拟孤立子的相互作用，以及多维孤立子的存在和相互作用这些问题定性、定量的研究，数值计算必将发挥愈来愈重要的作用. 可以毫不夸张地说，对于激光和等离子体物理中的孤立子问题，数值计算已成为考察它的稳定性的主要工具.

我们在这一章中将对水波和一类弱非线性作用下的波动问题，激光、等离子体物理、凝聚态物理、生物物理等许多实际物理问题导出具有孤立子的非线性发展方程，并对它们产生的孤立子及其相互作用作一些简短的讨论.

§2 水波和弱非线性作用下的波动方程

我们已经知道，KdV 方程首先由 Korteweg-de Vries 于 1895 年研究水波在长波近似、小的但为有限的振幅的假定下得到的. 我们先从水波出发推导这一方程，然后对其他介质在弱非线性作用假定下再得到这一方程.

2.1 水波作用下的波动方程

设在常数重力场中考虑无粘性的不可压缩的流体(水)，空间坐标系为(x_1, x_2, y)，速度$\vec{u}$的分量为(u_1, u_2, v)，重力加速度取为y轴的负方向. 于是有方程

$$\nabla\cdot\vec{u}=0, \tag{1-2-1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-g\vec{j}. \tag{1-2-2}$$

现考虑为无旋运动，$\mathrm{rot}\vec{u}=0$，故存在速度势$\vec{u}=\nabla\varphi$. 由

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\vec{u}^2\right)=(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}-\mathrm{rot}\vec{u}\times\vec{u}=(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} \tag{1-2-3}$$

和对(1-2-2)积分可得

$$\frac{p-p_0}{\rho_0}=B(t)-\varphi_t-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2-gy,$$

其中，$B(t)$为任意函数，p_0为任意常数，令

$$\varphi'=\varphi-\int B(t)dt,$$

可得

$$\vec{u}=\nabla\varphi,\qquad \frac{p-p_0}{\rho_0}=-\varphi'_t-\frac{1}{2}(\nabla\varphi')^2-gy. \tag{1-2-4}$$

以后仍记φ'为φ，由(1-2-1)得

$$\nabla\cdot\vec{u}=0\Rightarrow\nabla^2\varphi=0. \tag{1-2-5}$$

设水的表面方程为

$$f(x_1, x_2, y, t)=0. \tag{1-2-6}$$

在此表面上，流体质点不能穿过它，因此，正交于此曲面的流体速

度必须等于曲面的法向速度，(1-2-6)的法向速度为

$$\frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+f_y^2}},$$

流体的法向速度为

$$\frac{u_1f_{x_1}+u_2f_{x_2}+vf_y}{\sqrt{f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+f_y^2}},$$

相等的条件为

$$f_t+u_1f_{x_1}+u_2f_{x_2}+vf_y=0. \tag{1-2-7}$$

特别，当 $y=\eta(x_1, x_2, t)$，$f(x_1, x_2, y, t)\equiv\eta(x_1, x_2, t)-y$时，由(1-2-7)得

$$\eta_t+u_1\eta_{x_1}+u_2\eta_{x_2}=v. \tag{1-2-8}$$

此外，在自由面上，$p=p_0$(忽略空气的运动)，故有

$$\begin{cases}\eta_t+\varphi_{x_1}\eta_{x_1}+\varphi_{x_2}\eta_{x_2}=\varphi_y,\\ \varphi_t+\dfrac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_y^2)+g\eta=0,\end{cases}\quad y=\eta(x_1, x_2, t), \tag{1-2-9}$$

其中 $u_1=\varphi_{x_1}$, $u_2=\varphi_{x_2}$, $v=\varphi_y$. 由固体边界条件，流体的法向速度必须为零，$\vec{n}\cdot\nabla\varphi=0$，特别在底部 $y=-h_0(x_1, x_2)$，有

$$\varphi_y+\varphi_{x_1}h_{0x_1}+\varphi_{x_2}h_{0x_2}=0.$$

如为水平底，有 $\varphi_y=0$, $y=-h_0$. 于是我们整个问题的提法如下：寻求速度势 φ 和表面 η，满足

$$\nabla^2\varphi=0, \tag{1-2-10}$$

$$\begin{cases}\eta_t+\varphi_{x_1}\eta_{x_1}+\varphi_{x_2}\eta_{x_2}=\varphi_y,\\ \varphi_t+\dfrac{1}{2}(\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_y^2)-g\eta=0,\end{cases}\quad y=\eta(x_1, x_2, t), \tag{1-2-11}$$

$$\varphi_y=0,\quad y=-h_0. \tag{1-2-12}$$

为简单起见，我们以下考虑一维情况，即 $\eta=\eta(x, t)$，取 y 为从水平底测量的高度，此时，$\varphi_y=0$, $y=0$. 引进两个参量：

$$\alpha=\frac{a}{h_0},\quad \beta=\frac{h_0^2}{l^2},$$

其中，α 为波的振幅，l 为波长. $y=h_0+\eta$, 令 $x=lx'$, $y=h_0y'$, $t=\frac{lt'}{c_0}$, $\eta=a\eta'$, $\varphi=\frac{gla\varphi'}{c_0}$, $c_0^2=gh_0$, 再忽略“$'$”记号，由(1-2-5)、(1-2-11)、(1-2-12)有

$$\beta\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\quad 0<y<1+\alpha\eta; \tag{1-2-13}$$

$$\varphi_y=0,\quad y=0; \tag{1-2-14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\eta_t+\alpha\varphi_x\eta_x-\frac{1}{\beta}\varphi_y=0\\&\eta+\varphi_t+\frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_y^2=0\end{aligned}\right\} y=1+\alpha\eta. \tag{1-2-15}$$

设(1-2-14)、(1-2-15)的形式解为

$$\varphi=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}f}{\partial x^{2m}}\beta^{2m}, \tag{1-2-16}$$

其中 $f=f_0(x,t)$. 将(1-2-16)代入(1-2-15)中第一式得

$$\eta_t+\alpha\left[f_x-(1+\alpha\eta)\eta_x f_{xx}\beta-\frac{(1+\alpha\eta)^2}{2}f_{xxx}\beta+\cdots\right]\eta_x$$

$$+(1+\alpha\eta)f_{xx}-\frac{1}{3!}(1+\alpha\eta)^3f_{xxxx}\beta+o(\beta^2)=0,$$

即

$$\eta_t+\{(1+\alpha\eta)f_x\}_x-\left\{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3f_{xxxx}+\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2f_{xxx}\eta_x\right\}\beta$$

$$+o(\beta^2)=0. \tag{1-2-17}$$

同样，代入(1-2-15)中的第二式得

$$\eta+f_t+\frac{1}{2}\alpha f_x^2-\frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\{f_{xxt}+\alpha f_xf_{xxx}-\alpha f_{xx}^2\}\beta$$

$$+o(\beta^2)=0. \tag{1-2-18}$$

在(1-2-17)和(1-2-18)中，如果忽略 β 的一阶项，并由(1-2-18)对 x 求导数得

$$\begin{cases}\eta_t+\{(1+\alpha\eta)w\}_x=0,\\ w_t+\alpha ww_x+\eta_x=0.\end{cases}\quad w=f_x, \tag{1-2-19}$$

如果保留 β 的一阶项，则有

$$
\begin{cases}
\eta_t+\{(1+\alpha\eta)w\}_x-\dfrac{1}{6}\beta w_{xxx}+O(\alpha\beta,\beta^2)=0,\\
w_t+\alpha w w_x+\eta_x-\dfrac{1}{2}\beta w_{xxt}+O(\alpha\beta,\ \beta^2)=0.
\end{cases}
\tag{1-2-20}
$$

如果在(1-2-20)中忽略 $\alpha,\ \beta$ 的一阶以上的项，则当 $w=\eta$ 时，有同一方程 $\eta_t+\eta_x=0$，故 w 可依 $\alpha,\ \beta$ 展开

$$
w=\eta+\alpha A+\beta B+O(\alpha^2+\beta^2),
$$

其中 A、B 为 η 及 η 对 x 的导数的函数，由(1-2-20)可得

$$
\begin{cases}
\eta_t+\eta_x+\alpha(A_x+2\eta\eta_x)+\beta\left(B_x-\dfrac{1}{6}\eta_{xxx}\right)+O(\alpha^2+\beta^2)=0,\\
\eta_t+\eta_x+\alpha(A_t+\eta\eta_x)+\beta\left(B_t-\dfrac{1}{2}\eta_{xxt}\right)+O(\alpha^2+\beta^2)=0.
\end{cases}
$$

因为 $\eta_t=-\eta_x+O(\alpha,\ \beta)$，故在一阶项中对 t 的导数可换为对 x 的导数，特别当取 $A=-\dfrac{1}{4}\eta^2$，$B=\dfrac{1}{3}\eta_{xx}$，上面两个方程一致，有

$$
\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}+O(\alpha^2+\beta^2)=0. \tag{1-2-21}
$$

此时
$$
w=\eta-\frac{1}{4}\alpha\eta^2+\frac{1}{3}\beta\eta_{xx}+O(\alpha^2+\beta^2).
$$

在方程(1-2-21)中如忽略二阶项，则得到典型的 KdV 方程

$$
\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x+\frac{1}{6}\beta\eta_{xxx}=0. \tag{1-2-22}
$$

如在(1-2-22)中，由于 $\eta_t=-\eta_x+O(\alpha,\beta)$，将 η_{xxx} 换成 $-\eta_{xxt}$ 则有

$$
\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x-\frac{1}{6}\beta\eta_{xxt}=0, \tag{1-2-23}
$$

此即为 BBM 方程.

2.2 弱非线性作用下的波动方程

以下我们推导一类相当广泛的弱非线性相互作用下的波动方程组，它们可最后归结为 KdV 方程或 Burgers 方程.

设有方程组

$$
\begin{cases}
n_t+(nu)_x=0, & (1\text{-}2\text{-}24)\\
(nu)_t+(nu^2+P)_x=0, & (1\text{-}2\text{-}25)\\
P=P(f,\ n,\ u,\ f_i,\ n_i,\ u_i,\ f_{ij},\ n_{ij},\ u_{ij},\ \cdots), & (1\text{-}2\text{-}26)\\
F(f,\ n,\ u,\ f_i,\ n_i,\ u_i,\ f_{ij},\ n_{ij},\ u_{ij},\ \cdots)=0. & (1\text{-}2\text{-}27)
\end{cases}
$$

其中,n, u, f 为状态变元, 以 n 表示质点的数密度, u 表示质点的速度,i, j 分别表示对空间变元 x 和时间变元 t 的导数, P 一般表示状态变量(n, u, f)及其导数的函数. 如果 f 代表参量函数, 则 P 为 n, u 及其导数的函数. (1-2-24)为质量守恒, (1-2-25)为动量守恒. 以下举几个例子说明.

(1) 气体动力学:f 为压力 P,

$$P=\frac{1}{m}(p-\mu u_x),\quad F=P-A\rho^{\gamma},\quad mn=\rho, \qquad (1\text{-}2\text{-}28)$$

其中 ρ 为密度, μ 为粘性系数.

(2) 浅水波: n 为水深 h, 此时仅有两个状态变元 h, u,

$$P=\frac{1}{2}gh^2-\frac{1}{3}h^3(u_{xt}+uu_{xx}+u_x^2). \qquad (1\text{-}2\text{-}29)$$

(3) 冷的等离子体的磁流体波: f 为磁强 B, $P=\frac{1}{2}B^2$,

$$F\equiv B-n-\left(\frac{B_x}{n}\right)_x=0. \qquad (1\text{-}2\text{-}30)$$

(4) 冷的等离子体的离子声波: f 为静电势, ψ 为波函数,

$$P=e^{\psi}-\frac{1}{2}\psi_x^2,\quad F\equiv n-e^{\psi}+\psi_{xx}=0. \qquad (1\text{-}2\text{-}31)$$

在局部热力学平衡的状态下,若 P、F 中所有导数消失,则有

$$P=P(f,\ n),\quad F(f,\ n)=0. \qquad (1\text{-}2\text{-}32)$$

此时由(1-2-25)有

$$nu_t+nuu_x+P_x=0,\ P_x=\frac{\partial P}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x}.$$

再利用

$$\frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x}=0,$$

消去 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 即得

$$u_t + uu_x + \frac{a^2}{n} n_x = 0, \quad a^2 \equiv \left[P_n - \frac{F_n}{F_f} P_f \right].$$

如果 $a^2 > 0$，则有

$$\begin{cases} n_t + (nu)_x = 0, \\ u_t + uu_x + \dfrac{a^2}{n} n_x = 0. \end{cases} \tag{1-2-33}$$

(1-2-33)是双曲型方程组，其特征线为 $\frac{dx}{dt} = u \pm a$，a 为波速．由关于均匀态的小扰动，即得波动方程

$$u_{tt} - a_0^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a_0 为均匀波速，在以下推导 KdV 方程和 Burgers 方程中，必须考虑小扰动的非线性项的影响，即 P，F 导数的效应．我们作如下变换：

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon^{\alpha}(x - a_0 t), \\ \tau = \varepsilon^{\alpha+1} t, \end{cases} \tag{1-2-34}$$

其中，ε 表示初始扰动的振幅，恒设 $\varepsilon < 1$；指数 $\alpha > 0$，待定；a_0 表示某种波速，视为常数，在变换(1-2-34)下，(1-2-24)、(1-2-25)为

$$\varepsilon n_\tau + (u - a_0) n_\xi + n u_\xi = 0, \tag{1-2-35}$$

$$\varepsilon u_\tau + (u - a_0) u_\xi + n^{-1} P_\xi = 0. \tag{1-2-36}$$

状态变元(n, f, u)也依 ε 在平衡态 $A = (n, f, u) = (n_0, f_0, 0)$ 的附近作渐近展开

$$\begin{cases} n = n_0 + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots, \\ f = f_0 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \cdots, \\ u = 0 + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots. \end{cases}$$

P，F 也作展开

$$P = P_0 + P_{f_0}(f - f_0) + P_{n_0}(n - n_0) + P_{u_0}(u - u_0) + O(\varepsilon^2),$$

$$F = F_0 + F_{f_0}(f - f_0) + F_{n_0}(n - n_0) + F_{u_0}(u - u_0) + O(\varepsilon^2).$$

由于方程具有 Galileo 不变性，$P_{u_0} = F_{u_0} = 0$，由

$$P^{(1)}=P_{f_0}f^{(1)}+P_{n_0}n^{(1)},$$

$$F_{f_0}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\xi}+F_{n_0}\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}=0,$$

因此，有

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial\xi}=P_{f_0}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\xi}+P_{n_0}\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}=\left[P_{n_0}-\left(\frac{F_{n_0}}{F_{f_0}}\right)P_{f_0}\right]\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}$$

$$=a_0^2\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}.$$

若上述展开考虑到二阶项，可得

$$P_\xi^{(2)}=a_0^2\eta_\xi^{(2)}+A\eta\eta_\xi^{(1)}+\varepsilon^{\alpha-1}B\eta_{\xi\xi}^{(1)}+\varepsilon^{2\alpha-1}C\eta_{\xi\xi\xi}^{(1)}.$$

常数 a_0, A, B, C，对于上述例子具有如下的表：

	a_0	A	B	C
空气动力学	$2kT/m$	0	$-ua_0$	0
水　　波	gh_0	0	0	$\frac{1}{3}gh_0^3$
磁流体波	B_0	1	0	1
离子声波	1	0	0	1

由(1-2-35)、(1-2-36)比较 ε 一阶项有

$$a_0n_\xi^{(1)}=n_0u_\xi^{(1)},\quad a_0u_\xi^{(1)}=\left(\frac{a^2}{n_0}\right)n_\xi^{(1)},$$

积分之并利用边界条件，有 $a_0n^{(1)}=n_0u^{(1)}$，代入(1-2-35)及(1-2-36)，取二级近似，得

$$n_\tau^{(1)}+u^{(1)}n_\xi^{(1)}+n_0u_\xi^{(1)}+n^{(1)}u_\xi^{(1)}-a_0n_\xi^{(2)}=0,$$

即

$$n_\tau^{(1)}+2\frac{a_0}{n_0}n^{(1)}n_\xi^{(1)}-a_0n_\xi^{(2)}+n_0u_\xi^{(2)}=0$$

及

$$\frac{a_0}{n_0}n_\tau^{(1)}+\frac{A}{n_0}n^{(1)}n_\xi^{(1)}+\varepsilon^{\alpha-1}\frac{B}{n_0}n_{\xi\xi}^{(1)}+\varepsilon^{2\alpha-1}\frac{C_0}{n_0}n_{\xi\xi\xi}^{(1)}$$

$$+\frac{a_0^2}{n}n_\xi^{(2)}+u^{(1)}u_\xi^{(1)}-a_0u_\xi^{(2)}=0.$$

由

$$-a_0 u_\xi^{(2)}+\frac{a_0^2}{n_0}n_\xi^{(2)}=\frac{a_0}{n_0}\left(n_\tau^{(1)}+2\frac{a_0}{n_0}n^{(1)}n_\xi^{(1)}\right),$$

消去 $n_\xi^{(2)}$, $u_\xi^{(2)}$ 得 $n^{(1)}$ 满足的方程

$$n_\tau^{(1)}+\left(\frac{A}{2a_0}+\frac{3}{2}\frac{a_0}{n_0}\right)n^{(1)}n_\xi^{(1)}+\varepsilon^{\alpha-1}\frac{B}{2a_0}n_{\xi\xi}^{(1)}$$

$$+\varepsilon^{2\alpha-1}\frac{C}{2a_0}n_{\xi\xi\xi}^{(1)}=0. \tag{1-2-37}$$

在(1-2-37)中，如$B\neq 0$(耗散，$B<0$)，$\alpha=1$，$C=0$，则得到 Burgers 方程；如 $B=0$(色散)，$\alpha=\frac{1}{2}$，则得到 KdV 方程

$$n_\tau^{(1)}+\left(\frac{A}{2a_0}+\frac{3}{2}\frac{a_0}{n_0}\right)n^{(1)}n_\xi^{(1)}+\frac{C}{2a_0}n_{\xi\xi\xi}^{(1)}=0. \tag{1-2-38}$$

以下我们讨论 KdV 方程

$$u_t+uu_x+\mu u_{xxx}=0 \tag{1-2-39}$$

的孤立子解，其中常数μ可正可负．若$\mu<0$时，作变换 $u\to -u$, $x\to -x$, $t\to t$，则(1-2-39)可变为

$$u_t+uu_x-\mu u_{xxx}=0, \tag{1-2-40}$$

因此恒可设 $\mu>0$．令 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=x-Dt$, $D=\text{const}$，代入(1-2-40)，并对ξ积分二次可得

$$3\mu\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2=-u^3+3Du^2+6Au+6B=f(u), \tag{1-2-41}$$

其中，A, B 为积分常数．(1-2-41)的解仅当$f\geqslant 0$时才可能是实的($\mu>0$)．如果$f(u)$仅有一个实根，则它是无界的．现在我们设函数$f(u)$有三个实根，即$f(u)=-(u-C_1)(u-C_2)(u-C_3)$，其中$C_1<C_2<C_3$．由此推出：

$$D=\frac{1}{3}(C_1+C_2+C_3),$$

$$A=\frac{1}{6}(C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1),$$

$$B=\frac{1}{6}C_1C_2C_3.$$

函数$f(u)$的一般形式如图1-1的曲线A所示. (1-2-41)的精确

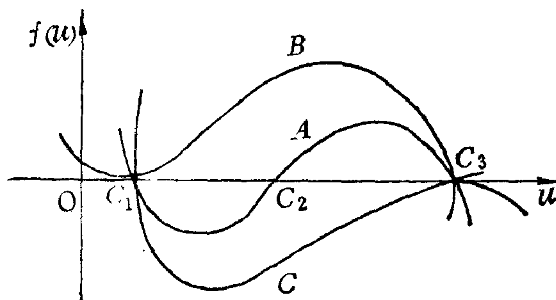


图1-1

解能表示为雅可比椭圆函数

$$u=u(x,\ t)=C_2+(C_3-C_2)C_n^2\times\left[\sqrt{\frac{C_3-C_1}{12\mu}}\left\{x-\frac{1}{3}(C_1+C_2+C_3)t\right\};\ k\right],\quad(1\text{-}2\text{-}42)$$

其中$k^2=\dfrac{C_3-C_2}{C_3-C_1}$. 周期波列方程(1-2-42)通常被称为椭圆函数波(cnoidal wave). 因函数C_n的实周期为$2k$, k为第一椭圆积分, 因此"cnoidal"波的周期为$T_p=4k\sqrt{\dfrac{3\mu}{C_3-C_1}}$.

当$k=0$时, $C_n(\xi,0)=\cos\xi$, 此时方程(1-2-41)具有振动解

$$u=\bar{C}+a\cos\left[2\sqrt{\frac{C_3-C_1}{12\mu}}\left\{x-\frac{1}{3}(C_1+C_2+C_3)t\right\}\right],\quad(1\text{-}2\text{-}43)$$

其中, $\bar{C}=\dfrac{C_2+C_3}{2}$, $a=\dfrac{C_3-C_2}{2}$

当$k=1$时, $C_n(\xi,\ 1)=\operatorname{sech}\xi$; 即当$C_2\to C_1$时, 如图1-1中曲线$B$所示, 此时周期变成无穷大, 得到KdV方程(1-2-39)常见的孤立子解

$$u=C_1+(C_3-C_1)\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{C_3-C_1}{12\mu}}\left\{x-\frac{1}{3}(2C_1+C_3)t\right\}\right]. \tag{1-2-44}$$

若设 $C_1=u_\infty$, $C_3-C_1=a$, 则(1-2-44)变成

$$u=u_\infty+a\operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{a}{12\mu}}\left\{x-\left(u_\infty+\frac{a}{3}\right)t\right\}\right]. \tag{1-2-45}$$

这里, u_∞ 表示在无穷远处的均匀态, a 表示孤立子的振幅. 从(1-2-45)可以看出, 这种孤立波相对于均匀态的速度, 是正比于振幅的, 而波的宽度反比于振幅的平方根, 且振幅与均匀态无关. 若 $u_\infty=0$, $\mu=1$, 则从(1-2-45)可得

$$u(x,t)=3D\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{D}}{2}(x-Dt), \tag{1-2-46}$$

如图 1-2 所示.

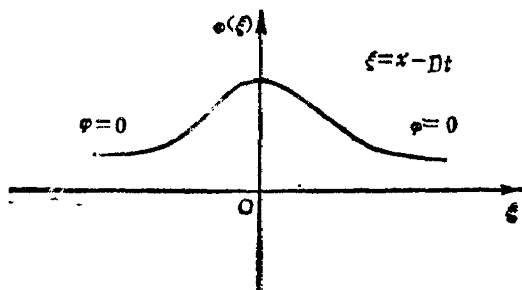


图 1-2

以下我们再考虑如下一类更广泛的 KdV 方程

$$u_t+f(u)_x=\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx} \tag{1-2-47}$$

的行波解结构, 其中 $f(u)$ 为已知实函数, α, β 均为实常数.

我们有如下的主要结果:

对于方程(1-2-47)的行波解: $\alpha>0$, β 可正可负, 当耗散项居于主导地位时(α 相对于 β 较大时), 它以指数形式趋于零($|\xi|\to\infty$, $\xi=x-Dt$, D 为行波速度, 且为常数); 当色散项居于主导地位时, 它以振荡形式趋于零($|\xi|\to\infty$); ii) $\alpha<0$, 它趋于不

稳定的无界解.

具体说，$\alpha>0$，$\beta>0$ 时，从行波解积分曲线全局分析可知:

(1) $\alpha^2\geqslant 4[D-f'(0)]\beta$，有唯一积分曲线连结$(0,0)$，$(u_1,0)$，如图 1-3 所示.

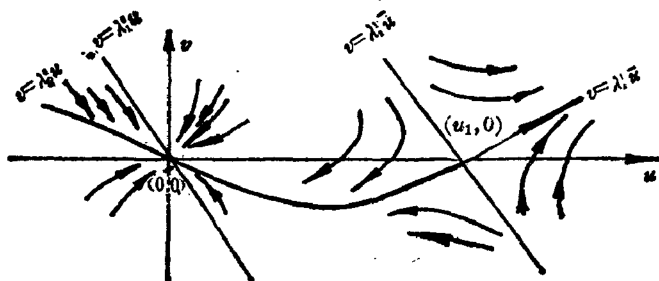


图 1-3

其中 $$\lambda_{1,2}^0=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{1}{2\beta}\sqrt{\alpha^2+4\beta[f'(0)-D]},$$

$$\lambda_{1,2}^1=\frac{-\alpha}{2\beta}\pm\frac{1}{2\beta}\sqrt{\alpha^2+4\beta[f'(u_1)-D]},\qquad v=\frac{du}{d\xi}.$$

$u(\xi)$ 如图 1-4 所示.

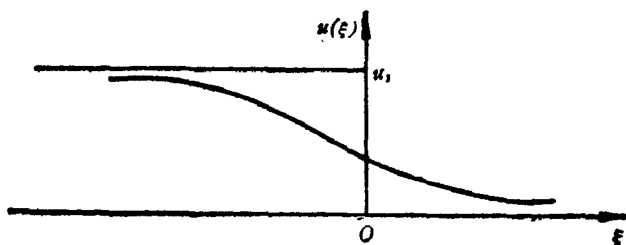


图 1-4

(2) $\alpha^2<4[D-f'(0)]\beta$，此时也有唯一积分曲线连结$(0,0)$ $(u_1,0)$，如图 1-5 所示.

$u(\xi)$ 如图 1-6 所示.

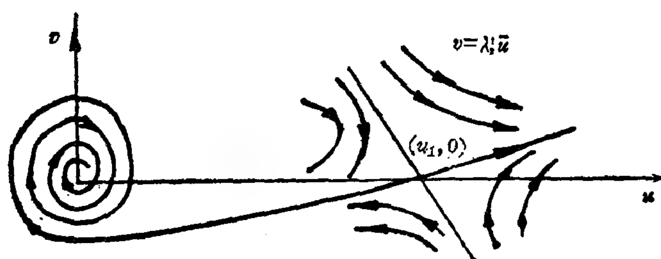


图 1-5

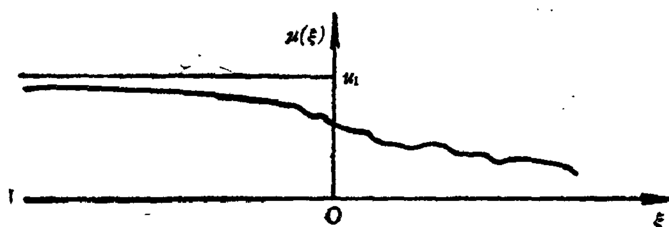


图 1-6

当 $\alpha>0$, $\beta<0$ 时, 可知:

(1) $\alpha^2\geqslant4\beta[D-f'(u_1)]$, 有唯一积分曲线连结(0, 0), ($u_1$, 0), 如图 1-7 所示.

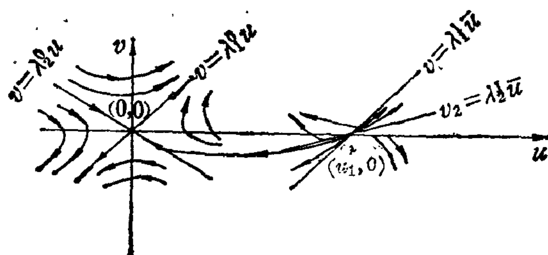


图 1-7

$u(\xi)$如图 1-8 所示.

(2) $\alpha^2<4\beta[D-f'(u_1)]$, 此时也有唯一积分曲线连结(0, 0), ($u_1$, 0). 如图 1-9 所示, 图中右边呈螺旋线状的中心即为(u_1, 0).

$u(\xi)$如图 1-10 所示.

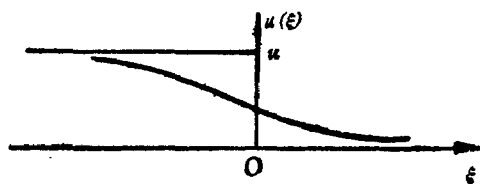


图 1-8

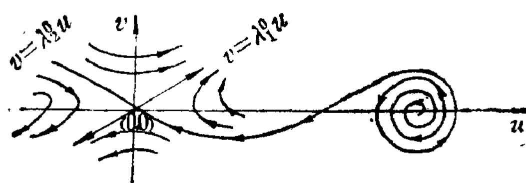


图 1-9

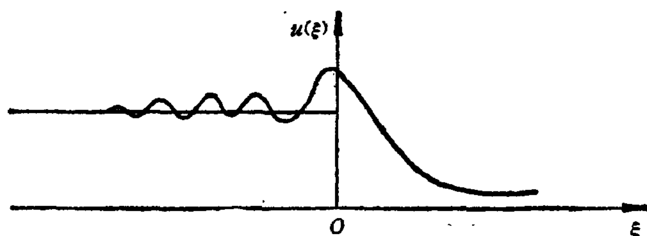


图 1-10

§3 等离子体中的孤立子

从 60 年代末以来，已有很多文章对孤立波在等离子体中的传播作了研究. 在激光打靶中，人们观察到在临界面附近形成的密度凹陷，由于坍塌出现的涡旋性孤立波的传播，及激光光束在非线性介质中自聚焦时产生的孤立子，高频电场纵场产生的 Langmuir 孤立子，以及高频横场产生的光孤立子等. 由于实验技术的不断

提高，在等离子体和激光相互作用中已观察到越来越多的很有意义的孤立子现象. 同时，在理论研究和电子计算机数位模拟中，也得到了和实验相一致的结果. 越来越多的事实表明，等离子体中孤立子的内容是相当丰富的. 在高维情况下，则产生了孤立子坍塌的重要现象，这也是人们研究的重要课题之一. 以下我们分别研究这些问题.

3.1 双流体力学方程组

双流体力学方程组是指电子、离子流体力学方程组. 离子方程组

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot n_i\vec{v}_i=0, \tag{1-3-1}$$

$$n_iM\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial t}+\vec{v}_i\nabla\vec{v}_i\right)=-T_i\nabla n_i+n_ie\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}_i\times\vec{B}}{c}\right); \tag{1-3-2}$$

电子方程组

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\nabla\cdot n_e\vec{v}_e=0, \tag{1-3-3}$$

$$n_em\left(\frac{\partial\vec{v}_e}{\partial t}+\vec{v}_e\nabla\vec{v}_e\right)=-T_e\nabla n_e-n_ee\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}_e\times\vec{B}}{c}\right); \tag{1-3-4}$$

Maxwell 方程组

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\nabla\times\vec{E}, \tag{1-3-5}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\nabla\times\vec{B}-\frac{4\pi_e}{c}(n_i\vec{v}_i-n_e\vec{v}_e), \tag{1-3-6}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0. \tag{1-3-7}$$

其中 n_i, n_e 分别表示离子、电子的数密度；$\vec{v}_i, \vec{v}_e$ 分别表示离子、电子的运动速度；M, m 分别表示离子、电子的质量；T_i, T_e 分别表示离子、电子的温度，e 表示电子电荷，$\vec{E}$ 表示电场强度，$\vec{B}$ 表示磁场强度，c 表示光速，$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 由于离子速度

$\vec{v}_i$ 很小，可忽略磁场对它的作用力，即在(1-3-2)中取 $\dfrac{\vec{v}_i\times\vec{B}}{c}=0$。又因我们考虑问题的尺度很小，只有几个 $\mu(1\mu=10^{-6}\mathrm{cm})$，因此在这里取 T_i, T_e 为常数。

如同通常的做法，可把等离子体的运动分为低频和高频两个部分，离子只作低频运动。把电子量和场量分为低频部分(下标为 l)和高频部分(下标为 h)，如

$$n_e=n_l+n_h,\ \vec{E}=\vec{E}_l+\vec{E}_h,\ \vec{B}=\vec{B}_l+\vec{B}_h. \tag{1-3-8}$$

引进物理量对时间的平均量

$$\overline{f(x,\ t)}=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}f(x,\ t)dt,$$

则有
$$\overline{f_x(x,\ t)}=[\overline{f(x,\ t)}]_x,$$

因
$$\frac{d}{dt}\overline{f(x,\ t)}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}}f(x,\ t)dt\right)$$
$$=\frac{1}{T}\left[f\left(x,t+\frac{T}{2}\right)-f\left(x,t-\frac{T}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}}f_t dt=\overline{f_t(x,\ t)},$$

且设 $\overline{\overline{f(x,\ t)}}=\overline{f(x,\ t)}$，即平均量与 t 无关。

现对物理量作高频平均，即选取频率 w 满足

$$\frac{1}{Tw_e}>\frac{1}{Tw}>\frac{1}{Tw_h}.$$

因此有
$$\overline{f_h(x,\ t)}=0,$$
$$\overline{n_e(x,\ t)}=n_l(x,\ t),\ \overline{n_h(x,\ t)}=0,\ n_e-\bar{n}_e=n_h.$$

对于离子方程，只有低频振荡，取高频平均后无变化，只是电场强度 $\vec{E}$ 换成 $\vec{E}_l$，于是有

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot n_i\vec{v}_i=0, \tag{1-3-9}$$

$$n_i M\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial e}+\vec{v}_i \nabla \vec{v}_i\right)=-T_i \nabla n_i+n_i e E_l. \tag{1-3-10}$$

对电子方程取高频平均，即

$$\frac{\partial \overline{n_e}}{\partial t}+\overline{\nabla \cdot n_e \vec{v}_e}=0, \tag{1-3-11}$$

$$m\left(\overline{\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}}+\overline{\vec{v}_e \nabla \vec{v}_e}\right)=-T_e\ \overline{\nabla \ln n_e}-e\left(\overline{\vec{E}+\frac{\vec{v}_e \times B}{c}}\right). \tag{1-3-12}$$

将(1-3-8)代入(1-3-11)、(1-3-12)，并利用上述高频平均的一些性质，可得

$$\frac{\partial n_l}{\partial t}+\nabla \cdot\{n_l \vec{v}_l+\overline{n_h \vec{v}_h}\}=0, \tag{1-3-13}$$

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}_l}{\partial t}+\vec{v}_l \nabla \vec{v}_l+\overline{\vec{v}_h \nabla \vec{v}_h}\right)$$

$$=-T_l \nabla \overline{\ln n_e}-l \vec{E}_l-\frac{\overline{\vec{v}_h \times \vec{B}_h}}{c}-e \frac{\vec{v}_l \times \vec{B}_l}{c}. \tag{1-3-14}$$

由于m很小，$\vec{v}_i$与$\vec{v}_l$差不多，故在(1-3-14)中可忽略$m\vec{v}_l$的项，再设$B_l=0$，于是可得

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_l}{\partial t}=-\frac{4\pi e}{c}\{n_i \vec{v}_i-n_l \vec{v}_l-\overline{n_h \vec{v}_h}\},$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_l=4\pi e(n_i-n_l)+f(x) \tag{1-3-15}$$

或

$$-\Delta \varphi=4\pi e(n_i-n_l)+f(x), \tag{1-3-16}$$

其中，$E_l=-\Delta\varphi$，$f(x)$为变元x的任意函数．为简单计，取$f(x)=0$，由方程组(1-3-3)～(1-3-7)减去平均后的相应方程组，且设$\vec{v}_l=0$，并忽略$\nabla \cdot\{n_h\vec{v}_h-\overline{n_h\vec{v}_h}\}$，$m(\vec{v}_h\nabla\vec{v}_h-\overline{v_h\nabla\vec{v}_h})$等项，在$\frac{n_h}{n_l}\ll 1$近似下可得双流体耦合方程组

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla \cdot(n_i \vec{v}_i)=0, \tag{1-3-17}$$

$$n_i M\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial e}+\vec{v}_i \nabla \vec{v}_i\right)=-T_i \nabla n_i+n_i e \vec{E}_l, \tag{1-3-18}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_l=4\pi e(n_i-n_l), \tag{1-3-19}$$

$$e\vec{E}_l=-T_e \frac{\nabla n_l}{n_l}-\frac{m}{2}\nabla \vec{v}_h^2, \tag{1-3-20}$$

$$\frac{\partial n_h}{\partial t}+\nabla(n_l \vec{v}_h)=0, \tag{1-3-21}$$

$$m\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t}=-T_e \nabla\left(\frac{n_h}{n_l}\right)-e\vec{E}_h, \tag{1-3-22}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{E}_h}{\partial t^2}&-c^2\nabla^2 \vec{E}_h+c^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}_h)-v_e^2\nabla(\nabla\cdot\vec{E}_h)+v_e^2\\&\cdot(\nabla\cdot\vec{E}_h)(\nabla \ln n_l)-\frac{\partial E_h}{\partial t}\frac{\partial \ln n_l}{\partial t}\\&=-\frac{4\pi n_e e^2}{m}\cdot\vec{E}_h-\frac{mc^2}{2}[\nabla(\nabla\cdot\vec{v}_h)-\nabla^2\vec{v}_h]\frac{\partial \ln n_l}{\partial t}.\end{aligned} \tag{1-3-23}$$

其中 c 为光速，$v_e^2=\dfrac{T_e}{m}$ 是电子热运动速度的平方.

现设

$$\nabla\left(\frac{n_h}{n_l}\right)\sim\frac{\nabla n_h}{n_l}, \tag{1-3-24}$$

于是(1-3-22)可近似为

$$m\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t}=-T_e\frac{\nabla n_h}{n_l}-e\vec{E}_h. \tag{1-3-25}$$

若 $k^2\lambda_D^2\ll 1\left(\text{其中 } k \text{ 为波数}, \lambda_D^2=\dfrac{T_e}{4\pi n_0 e^2}\right)$，则有估计

$$\left|\frac{T_e \nabla n_h/n_l}{e E_h}\right|\approx k^2\lambda_D^2\ll 1.$$

于是在(1-3-25)中忽略 $-T_e\dfrac{\nabla n_h}{n_l}$ 项，可解出

$$\vec{v}_h=\frac{e\vec{\varepsilon}_h(\vec{x},t)e^{-iw_p t}}{imw_p}+\text{c. c}, \tag{1-3-26}$$

其中

$$\vec{E}_h=\vec{\varepsilon}_h(\vec{x},t)e^{-iw_p t}+\text{c. c},$$

$$w_p=\frac{4\pi n_0 e^2}{m}$$

c. c 表示前一项的复数共轭项.

在(1-3-20)中,

$$-\frac{m}{2}\nabla\overline{\vec{v}_h^2}=\frac{m}{2}\frac{e^2}{m^2w_p^2}\nabla\overline{\vec{E}_h^2}.$$

在(1-3-23)中，再设 $\frac{\partial \ln n_l}{\partial t}=0$，于是最后我们得到简化的双流体方程组

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot n_i\vec{v}_i=0, \tag{1-3-27}$$

$$n_iM\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial t}+\vec{v}_i\nabla\vec{v}_i\right)=-T_i\nabla n_i+n_ie\vec{E}_l, \tag{1-3-28}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}_l=4\pi e(n_i-n_l), \tag{1-3-29}$$

$$\vec{E}_l=-\frac{T_e\nabla n_l}{n_l}-\frac{e^2}{2mw_p^2}\nabla\overline{\vec{E}_h^2}, \tag{1-3-30}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}_h}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\vec{E}_h+c^2\nabla\nabla\cdot\vec{E}_h-v_e^2\nabla\nabla\cdot\vec{E}_h,$$

$$=-\frac{4\pi n_le^2}{m}\vec{E}_h. \tag{1-3-31}$$

方程组(1-3-27)～(1-3-31)是封闭的，即共有未知函数及未知函数向量5个：n_i, n_l, $\vec{v}_i$, $\vec{E}_l$, $\vec{E}_h$，而方程(包括向量方程)组的个数正好也是5个．它至少有三种波：离子声波、等离子体波和光波．每一个波都有产生空间凝聚的非线性项：离子声波是输运项 $\vec{v}_i\nabla\vec{v}_i$，等离子体波和光波是方程(1-3-31)的非线性项．三种波又都有色散项：离子声波是电荷分离项 $\nabla\cdot\vec{E}_l$，等离子体波是 $v_e^2\nabla^2\vec{E}_h$ 项，光波是 $c^2\nabla^2\vec{E}_h$ 项．由于非线性项和色散项相互作用达到的某种平衡，于是形成了声．等离子体、光孤立子，这套方程组就是我们研究等离子体孤立子问题的出发点，以下分别讨论之.

3.2　离子声波孤立子

把高频振荡取作零，方程组(1-3-27)～(1-3-31)为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla\cdot(n_i\vec{v}_i)=0, \tag{1-3-32}$$

$$n_i M\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}+\vec{v}\,\nabla \vec{v}_i\right)=-T_i \nabla n_i-n_i e \nabla \varphi, \qquad (1\text{-}3\text{-}33)$$

$$\nabla^2 \varphi=4\pi e(n_l-n_i), \qquad (1\text{-}3\text{-}34)$$

$$n_l=n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{Te}\right). \qquad (1\text{-}3\text{-}35)$$

其中 $\vec{E}_h=0$, $\vec{E}_l=-\nabla\varphi$ 为纵波. 考虑一维情况, 且设 $T_i=0$, $\vec{v}_i=v_i$, 无量纲化上述方程组可得

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial n_i v_i}{\partial x}=0, \qquad (1\text{-}3\text{-}36)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (1\text{-}3\text{-}37)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=e^{\varphi}-n_i. \qquad (1\text{-}3\text{-}38)$$

令 $\xi=x-Dt$, 且设 $|x|\to\infty$ 时, $n_i\to 1$, $v_i\to 0$, $\varphi\to 0$, 可得

$$n_i(D-v_i)=D, \qquad (1\text{-}3\text{-}39)$$

$$\frac{1}{2}(D-v_i)^2=\frac{1}{2}D^2-\varphi, \qquad (1\text{-}3\text{-}40)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=e^{\varphi}-n_i(\xi). \qquad (1\text{-}3\text{-}41)$$

由

$$n_i=\frac{D}{\sqrt{D^2-2\varphi}}, \qquad (1\text{-}3\text{-}42)$$

可得

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=e^{\varphi}-\frac{D}{\sqrt{D^2-2\varphi}}=F(\varphi)=G'(\varphi), \qquad (1\text{-}3\text{-}43)$$

其中

$$G(\varphi)=e^{\varphi}+D\sqrt{D^2-2\varphi}-(D^2+1). \qquad (1\text{-}3\text{-}44)$$

设 $\delta D=D-1\ll 1$, 则由(1-3-43)可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2=\frac{1}{3}\varphi^2(3\delta D-\varphi),$$

$$\varphi(\xi)=3\delta D\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\delta D}{2}}(x-Dt)\right],\qquad(1\text{-}3\text{-}45)$$

其中孤立子波的峰值是 $3\delta D$, 宽度是 $\sqrt{\frac{2}{\delta D}}$.

作变量交换

$$\xi=\epsilon^{\frac{1}{2}}(x-t),\ \tau=\epsilon^{\frac{3}{2}}t,\qquad(1\text{-}3\text{-}46)$$

则离子声波方程组(1-3-36)、(1-3-37)、(1-3-38)变为

$$\epsilon\frac{\partial n_i}{\partial\tau}-\frac{\partial n_i}{\partial\xi}+\frac{\partial n_i v_i}{\partial\xi}=0,\qquad(1\text{-}3\text{-}47)$$

$$\epsilon\frac{\partial v_i}{\partial\tau}-\frac{\partial v_i}{\partial\xi}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial\xi}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},\qquad(1\text{-}3\text{-}48)$$

$$\epsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=e^{\varphi}-n_i.\qquad(1\text{-}3\text{-}49)$$

n_i, v_i, φ 依 ϵ 展开

$$n_i=1+\epsilon n^{(1)}+\epsilon^2 n^{(2)}+\cdots$$

$$v_i=\epsilon v^{(1)}+\epsilon^2 v^{(2)}+\cdots,$$

$$\varphi=\epsilon\varphi^{(1)}+\epsilon^2\varphi^{(2)}+\cdots.$$

代入(1-3-47)～(1-3-49)可得

$$\begin{cases}n^{(1)}=v^{(1)}=\varphi^{(1)}, & (1\text{-}3\text{-}50)\\ \dfrac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial\xi^2}=\varphi^{(2)}+\dfrac{(\varphi^{(1)})^2}{2}-n^{(2)}, & (1\text{-}3\text{-}51)\\ \dfrac{\partial n^{(1)}}{\partial\tau}-\dfrac{\partial n^{(2)}}{\partial\xi}+\dfrac{\partial v^{(2)}}{\partial\xi}+\dfrac{\partial}{\partial\xi}n^{(1)}v^{(1)}=0, & (1\text{-}3\text{-}52)\\ \dfrac{\partial v^{(1)}}{\partial\tau}-\dfrac{\partial v^{(2)}}{\partial\xi}+v^{(1)}\dfrac{\partial v^{(1)}}{\partial\xi}=-\dfrac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial\xi}. & (1\text{-}3\text{-}53)\end{cases}$$

(1-3-51)对 ξ 作微商, 再与(1-3-52)、(1-3-53)求和可得

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\tau}+n^{(1)}\frac{\partial n^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 n^{(1)}}{\partial\xi^3}=0,\qquad(1\text{-}3\text{-}54)$$

此即 KdV 方程.

3.3 Langmuir 孤立子

从方程组(1-3-27)～(1-3-31)出发，取 $n_l=n_i$，设

$$n_i(x, t)=n_0(x)+n(x, t),$$

其中 $n(x, t)$ 为小量，对方程组(1-3-27)、(1-3-28)及(1-3-31)作线性化后得

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot n_0 v=0, \tag{1-3-55}$$

$$n_0 M\frac{\partial v}{\partial t}=-T_i\nabla n_i-T_e\nabla n_l-\frac{n_0 e^2}{2mw_p^2}\nabla\overline{E_h^2} \tag{1-3-56}$$

$$\frac{\partial^2 E_h}{\partial t^2}-v_e^2\nabla^2 E_h=-\frac{4\pi(n_0+n)e^2}{m}E_h. \tag{1-3-57}$$

这里只考虑纵波，即在(1-3-31)中 $-c^2\nabla^2E_h+c^2\nabla\nabla\cdot E_h$ 为零，可得(1-3-57). 记 $E_h=E$，(1-3-55)对 t 微商一次，(1-3-56)作一次散度运算，可得

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\nabla^2 n=\nabla^2\frac{\overline{E^2}}{8\pi M}, \tag{1-3-58}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-v_e^2\nabla^2 E=-w_p^2\left(1+\frac{n}{n_0}\right)E, \tag{1-3-59}$$

其中 $c_s^2=\dfrac{T_i+T_e}{M}\approx\dfrac{T_e}{M}$，$w_p^2=\dfrac{4\pi n_0 e^2}{m}$. 将 E 写成

$$E(x, t)=\varepsilon(x, t)e^{-iw_pt}+\text{c. c}, \tag{1-3-60}$$

其中 E 的高频部分包含在因子 e^{-iw_pt} 中，$\varepsilon(x, t)$ 为缓变振幅. 忽略 ε_{tt} 项，可得

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\nabla^2 n=\nabla^2\frac{|\varepsilon|^2}{2\pi M}, \tag{1-3-61}$$

$$-2iw_p\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-v_e^2\nabla^2\varepsilon=-w_p^2\frac{n}{n_0}\varepsilon, \tag{1-3-62}$$

这就是著名的Захаров方程. 无量纲化可得

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-\Delta n=\nabla^2|\varepsilon|^2, \tag{1-3-63}$$

$$i\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\Delta\varepsilon-n\varepsilon=0. \tag{1-3-64}$$

令

$$\varepsilon=\varphi(x-ct)e^{-ipt+iqx+i\theta},$$
$$n=n(x-ct), \tag{1-3-65}$$

其中 p. q. θ, c 均为实常数，将(1-3-65)代入方程 (1-3-63)及(1-3-64)，不难得到它的孤立子解

$$\begin{cases}\varepsilon(x,\ t)=\dfrac{m_1}{\sqrt{2(1-c^2)}}\operatorname{sech}\left\{\dfrac{m_1}{2(1-c^2)}(x-ct\right.\\ \qquad\left.-x_0)\right\}e^{i\frac{c}{2}x-i\left(\frac{c^2}{4}-\frac{m_1^2}{4(1-c^2)}\right)t+i\theta},\\ n(x,\ t)=-\dfrac{m_1^2}{2(1-c^2)}\operatorname{sech}^2\left\{\dfrac{m_1}{2(1-c^2)}(x-ct-x_0)\right\}.\end{cases} \tag{1-3-66}$$

其中设 $q=\frac{c}{2}$(即使 φ' 的系数为零)．这里有 4 个参数，x_0 代表 $t=0$ 时波包位置，θ 代表初始位相．主要参数是 m 和 c，c 表示孤立子速度．从(1-3-66)可知，c^2 必须小于 1，即孤立子一定是亚音速的．$\frac{m^2}{2(1-c^2)}$ 是密度凹陷的深度，$\frac{2(1-c^2)}{m}$ 是凹陷宽度，深度和宽度平方成反比．当 $c^2\ll1$ 时，可作静态近似，从方程(1-3-63)得

$$n=-|\varepsilon|^2, \tag{1-3-67}$$

代入(1-3-64)，即得非线性 Schrödinger 方程

$$i\varepsilon_t+\varepsilon_{xx}+|\varepsilon|^2\varepsilon=0. \tag{1-3-68}$$

V. G. Makhenkov 等对 Захаров 方程组初始波包的发展和孤立子之间相互作用进行了详细的数值计算，得到了非常丰富的物理图象，如图 1-11～18 所示．

数值分析表明，Langmuir 波孤立子的形成及其相互作用，一般通过两个阶段，第一个阶段是与孤立子间的相互吸引相联的快阶段，孤立子相互作用后聚合成为一个孤立子，此时孤立子处于激发态中，或称处于非周期不稳定状态中；第二阶段，它是较缓慢的，逐渐分离成两个孤立子，它们的形状分别和碰撞前保持不变或近

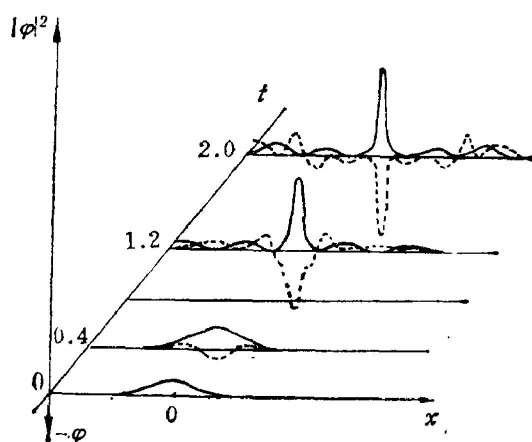


图 1-11　初始波包形成的孤立子

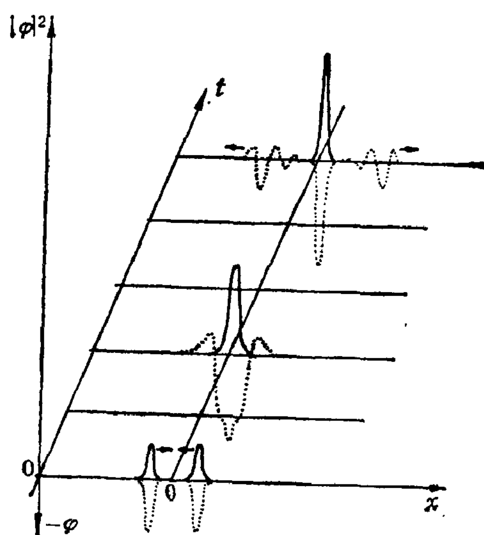


图 1-12　两个等同的 Langmuir 孤立子由于 s 波辐射合而为一

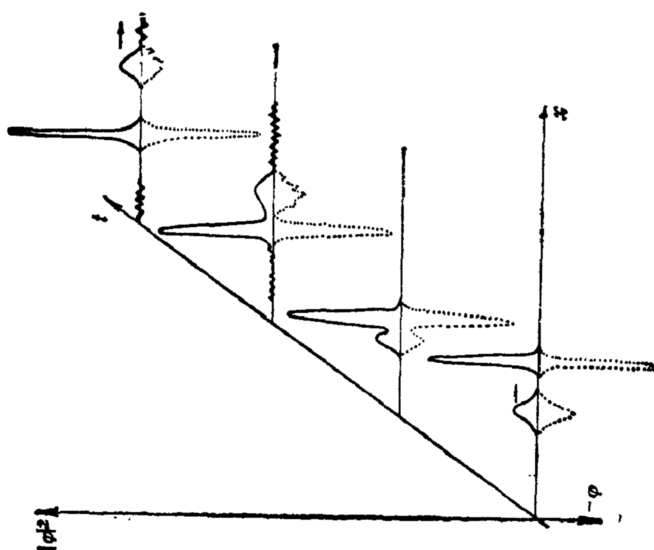


图 1-13　不同质量的 l 孤立子的相互作用
（一个轻的孤立子击中另一个重的）

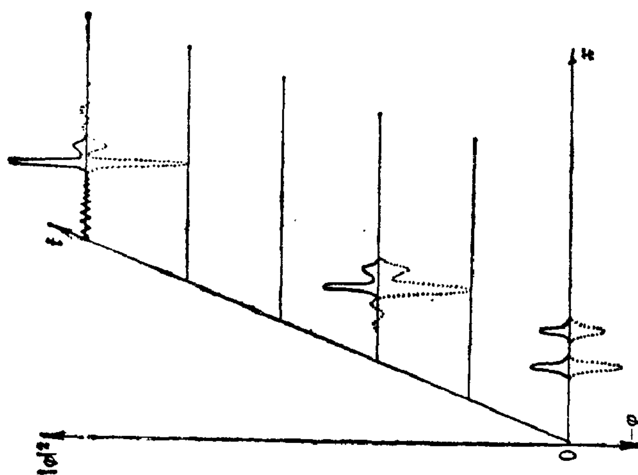


图 1-14　两个近乎相等质量的孤立
子的相互作用

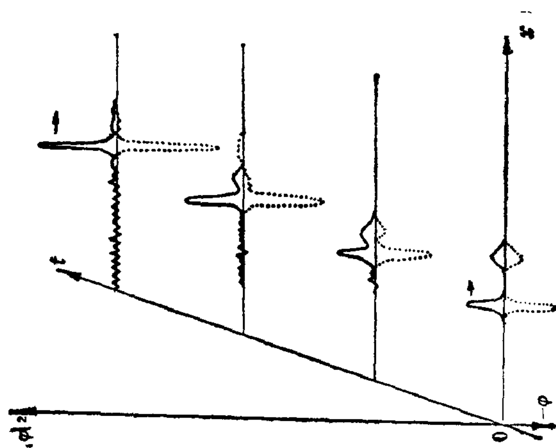


图 1-15 不同质量的孤立子的相互作用
（一个重的孤立子携带一个轻的）

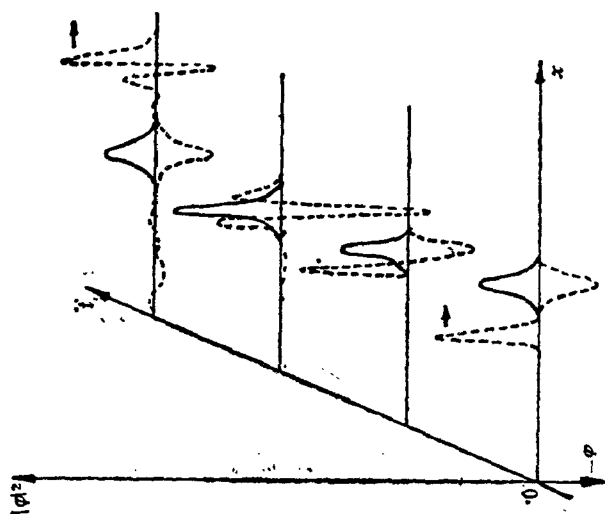


图 1-16 l 孤立子和 s 压缩脉冲中的相互作用

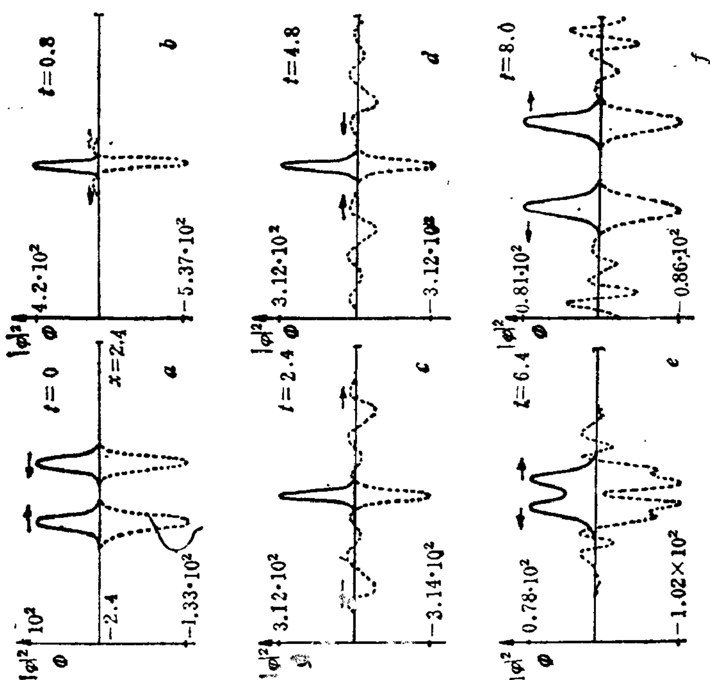


图 1-18　在周期边界条件下，两个孤立子相撞而分开的过程

图 1-17　l 孤立子和 s 稀疏脉冲中的相互作用

乎不变，然后各奔前程.

如果波包在波数 $\vec{k}$ 空间是充分窄小时，则可得方程组

$$i\varepsilon_t+\nabla^2\varepsilon+n\varepsilon=0, \tag{1-3-69}$$

$$\Box n\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)n=\nabla^2|\varepsilon|^2. \tag{1-3-70}$$

此时，可得到哨孤立子(Whistler Soliton). 由于方程(1-4-69)中的相互作用项前的符号和 Захаров 方程的相反，这就导致了该孤立子运动是超声的，而且它有密度峰，不同于 Langmuir 孤立子的密度坑. 对于哨孤立子的形成和相互作用数值模拟得到的结果，如图 1-19～20 所示.

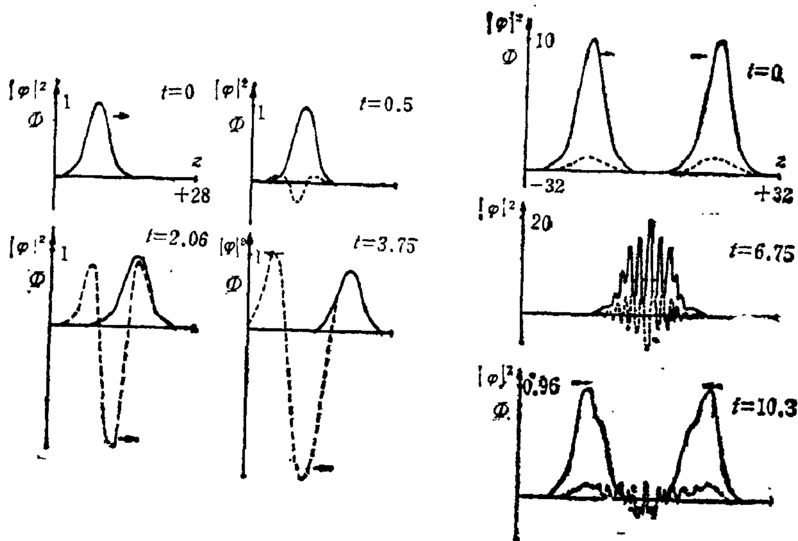


图 1-19　超声哨孤立子的形成　　　图 1-20　两个等 w 孤立子对撞相互作用

3.4　Ls 孤立子(近声区耦合的 Langmuir 波和离子声波孤立子)

当 $c\to1$ 时，即接近于声速区时，我们从孤立子的表达式(1-3-66)可看到等离子体扰动密度、能量、孤立子宽度的倒数等均趋于

零，于是有些物理学家提出 Boussinesq 方程或 KdV 方程来代替声波方程，在这种情况下，密度扰动较自洽地满足方程

$$n_{tt}-n_{xx}-\beta(n^2)_{xx}-\alpha n_{xxxx}=|\varepsilon|^2_{xx} \tag{1-3-71}$$

或

$$n_t+n_x+\beta(n^2)_x+\alpha n_{xxx}=-|\varepsilon|^2_x. \tag{1-3-72}$$

对于耦合方程组

$$i\varepsilon_t+\varepsilon_{xx}-n\varepsilon=0, \tag{1-3-73}$$

$$n_{tt}-n_{xx}-\frac{\delta}{3}n_{xxxx}-\delta(n^2)_{xx}=|\varepsilon|^2_{xx}, \tag{1-3-74}$$

其中 $\delta=\frac{4}{3}\frac{m_e}{m_i}$，我们可找到(1-3-73)、(1-3-74)的孤立子解

$$\begin{cases}\varepsilon_{ls}(x,t)=A\tanh\{B(x-vt-x_0)\}\operatorname{sech}\{B(x-vt-x_0)\}\\ \qquad\times\exp\left\{i\left(\frac{1}{2}vx-\Omega t-\theta\right)\right\},\\ n_{ls}(x,t)=6\lambda\operatorname{sech}^2\{B(x-vt-x_0)\},\end{cases} \tag{1-3-75}$$

其中 $A^2=48\lambda^2\delta$，$\lambda=\Omega-\frac{v^2}{4}$，$v^2<1$.

从守恒量可找到 Langmuir 孤立子 l, ls 孤立子与声孤立子 s 相互作用过程的选择定则：

$$l+l\to l+ls,\ l+s\to l+ls.$$

用计算机对这些过程进行了详细的研究，计算结果如图 1-21 所示.

有时也用 IBq 方程

$$\left(\Box-\frac{\delta}{3}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}\right)n-\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}n^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\varepsilon|^2 \tag{1-3-76}$$

来代替 Bq 方程(1-3-74).

3.5 光孤立子

光孤立子和 l 孤立子是类似的，只是色散项由 $v_e^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}$ 变成

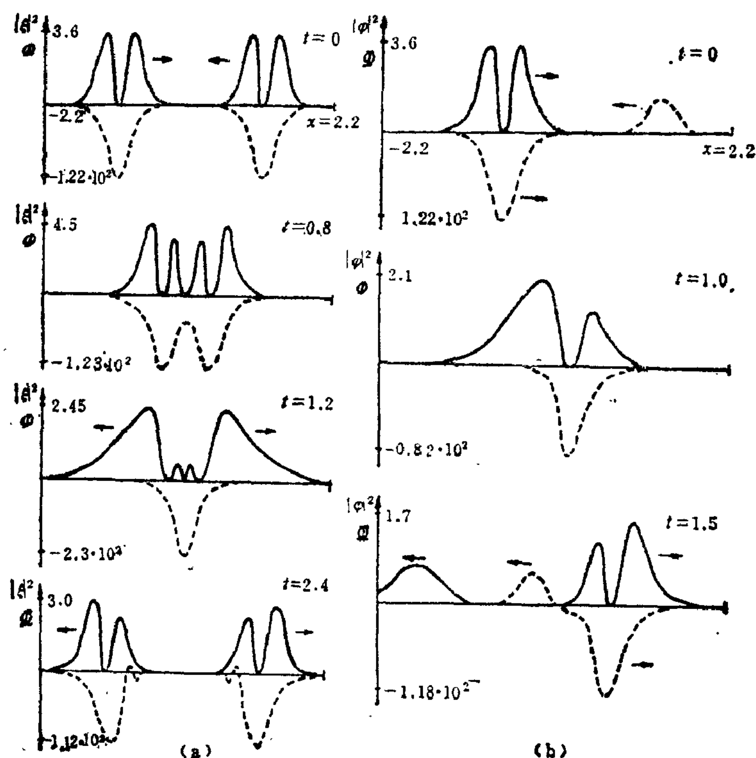


图 1-21 (a) ls 孤立子的对碰;
(b) ls 孤立子和压缩 s 孤立子的相互作用

$c^2\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$，色散项要大得多，因此光孤立子波宽要宽得多，在激光吸收中的坑子有可能就是光孤立子．和(1-3-58)、(1-3-59)相对应的方程组为

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\overline{E^2}}{8\pi M},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=-\omega_p^2\left(1+\frac{n}{n_0}\right)E. \qquad (1\text{-}3\text{-}77)$$

令 $E(x,t)=\varepsilon(x,t)e^{-i\omega_p t}+\text{c. c}$，并忽略含 $\varepsilon_{tt}(x,t)$ 项得

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}-c_s^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{|\varepsilon|^2}{8\pi M},\tag{1-3-78}$$

$$-2iw_p\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}=-w_p^2\frac{n}{n_0}\varepsilon.\tag{1-3-79}$$

它和 Захаров 方程的差别，仅仅在于把 v_e^2 换成 c^2，因而光孤立子的宽度要比 l 孤立子的宽度宽 $\frac{c}{v_e}$ 倍.

3.6 简化双流体方程组(1-3-27)～(1-3-31)的孤立子

对于方程组(1-3-27)～(1-3-31)，现取各物理量的单位为

$$[t]=\left(\frac{M}{4\pi n_0 e^2}\right)^{\frac{1}{2}}=w_{pi}^{-1},\quad [x]=\left(\frac{T_e}{4\pi n_0 e^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\lambda_D,$$

$$[v]=\frac{[x]}{[t]}=\left(\frac{T_e}{M}\right)^{\frac{1}{2}},\quad [n_i]=n_0,$$

$$[\varphi]=\frac{T_e}{e}(E_l=-\nabla\varphi),\quad [|\varepsilon|^2]=4\pi n_0 T_e.$$

设 $T_i=0$，于是方程组(1-3-27)～(1-3-31)的无量纲形式为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\nabla(n_i\vec{v}_i)=0,\tag{1-3-80}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}+\vec{v}_i\nabla\vec{v}_i=-\nabla\varphi,\tag{1-3-81}$$

$$\nabla^2\varphi=n_l-n_i=\exp(\varphi-|\varepsilon|^2)-n_i,\tag{1-3-82}$$

$$n_l=\exp(\varphi-|\varepsilon|^2),\tag{1-3-83}$$

$$\frac{2i}{w_p}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}-\frac{1}{w_p^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}=-\nu\nabla^2\varepsilon+[\exp(\varphi-|\varepsilon|^2)-1]\varepsilon,\tag{1-3-84}$$

$$E_l=-\nabla\varphi,\tag{1-3-85}$$

其中

$$\nu=\begin{cases}1, & \vec{E}_h \text{ 为纵场,}\\ \dfrac{c_0^2}{v_e^2}, & \vec{E}_h \text{ 为横场,}\end{cases}$$

$$w_p=\sqrt{\frac{M}{m}},\quad v_e^2=\frac{T_e}{m},$$

c_0 为光速．以下讨论一维情况 $\vec{v}_i=v$，设

$$\varepsilon(x,\ t)=\psi(x-ct)\exp(-ipt+iqx),\qquad(1\text{-}3\text{-}86)$$

再设 n_i，v，φ 均为 $x-ct$ 的函数，将(1-3-86)代入(1-3-84)，令其实部，虚部分别为零，从(1-3-80)、(1-3-81)、(1-3-82)和(1-3-84)诸方程可得平面孤立波方程组

$$\left(\frac{\nu-c^2}{w_p^2}\right)\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=[\exp(\varphi-\psi^2)-1+a^2]\psi,\qquad(1\text{-}3\text{-}87)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=\exp(\varphi-\psi^2)-\frac{1}{\sqrt{1-2\varphi/c^2}},\qquad(1\text{-}3\text{-}88)$$

$$n_i=\frac{1}{\sqrt{1-2\varphi/c^2}},\qquad(1\text{-}3\text{-}89)$$

$$n_l=\exp(\varphi-\psi^2),\qquad(1\text{-}3\text{-}90)$$

其中

$$a^2=\nu q^2-\left(\frac{p}{w_p}\right)^2-\frac{2p}{w_p}>0,\qquad(1\text{-}3\text{-}91)$$

$$\nu q=\frac{c}{w_p}\left(1+\frac{p}{w_p}\right),\qquad(1\text{-}3\text{-}92)$$

c 为孤立波的传播速度．下面考察纵波和横波弱非线性情况：$\varphi\ll1$，$\varphi-\psi^2\ll1$．先看纵波，$\nu=1$，将 n_i 和 n_l 展开，取到 φ 和 ψ^2 项有

$$n_l=1+\varphi-\psi^2,\qquad(1\text{-}3\text{-}93)$$

$$n_i=1+\frac{\varphi}{c^2}.\qquad(1\text{-}3\text{-}94)$$

再设 $n_l=n_i$(电中性)得

$$\varphi-\psi^2=\frac{\varphi}{c^2},\qquad(1\text{-}3\text{-}95)$$

方程(1-3-87)$\left(忽略\ \frac{c^2}{w_p}\right)$为

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=[\exp(\varphi-\psi^2)-1+a^2]\psi.\qquad(1\text{-}3\text{-}96)$$

将(1-3-95)代入(1-3-96)得

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=\left(\frac{1}{c^2-1}\psi^2+a^2\right)\psi, \tag{1-3-97}$$

其解为

$$\psi=a\sqrt{2(1-c^2)}\,\mathrm{sech}\,a\xi. \tag{1-3-98}$$

从(1-3-95)和(1-3-98)可得

$$\varphi=-2a^2c^2\,\mathrm{sech}^2\,a\xi. \tag{1-3-99}$$

(1-3-98)、(1-3-99)即是Захаров方程的孤立子解，它和前面得到的孤立子表达式(1-3-66)是一致的．从(1-3-98)、(1-3-99)可看出孤立子解φ和ψ都是单峰对称的．

在n_l和n_i的展开式中，适当展开到高次项，也可得到φ为对称，而ψ为反对称的Makhanhov-Nishikawa孤立波解．在$c^2\approx1$附近，取φ和ψ为同量级，并取得二次项，这时有方程组

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=(\varphi+a^2)\psi, \tag{1-3-100}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=-\frac{1-c^2}{c^2}\varphi-\frac{3-c^4}{2c^4}\varphi^2-\psi^2, \tag{1-3-101}$$

其解为

$$\begin{cases}\psi=A\,\mathrm{sech}\,a\xi\,\mathrm{th}\,a\xi,\\ \varphi=B\,\mathrm{sech}^2\xi,\end{cases} \tag{1-3-102}$$

其中

$$A=6a^2\left(4a^2-1+\frac{1}{c^2}\right),\ B=-6a^2,$$

且a^2与c^2满足如下关系式

$$a^2=\frac{c^2(1-c^2)}{9-3c^2-2c^4}. \tag{1-3-103}$$

其次，讨论横波情况．对于弱非线性情况，可得到解

$$\psi=a\sqrt{2(1-c^2)}\,\mathrm{sech}\,\frac{a}{\sqrt{\nu}}\xi. \tag{1-3-104}$$

此式给出的振幅与(1-3-98)相同，只是波的宽度增大$\sqrt{\nu}$倍．

对于(1-3-87)、(1-3-88)数值计算的结果和图象，如图1-22、23所示。

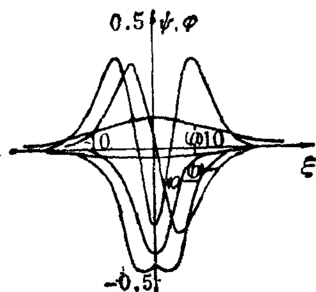


图1-22 在 ψ-ξ, φ-ξ 平面中的孤立波示意图

对方程组(1-3-87、88)式，$c^2=0.5$；全部在下半平面的 φ，其他的为 ψ. (a)单峰；(b)第一个反对称；(c)双峰

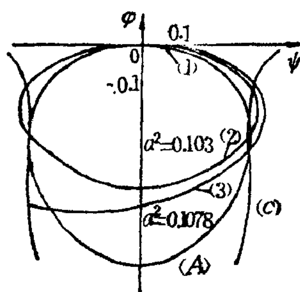


图1-23 电荷分离情况下的孤立波系

对方程(1-3-87、88)，$c^2=0.5$. (1)单峰；(2)第一个反对称；(3)双峰对称

§4 Langmuir 波的坍塌(collapse)

多维孤立波在一定条件下是存在的，但一般是不稳定的，最后导致波的坍塌，趋于具有奇性的自型解。这种情况有些类似于聚心的冲击波，最后趋于坍塌性质的 Gudeley 自型解。

下面以非线性 Schrödinger 方程为例说明这些情况。设有如下形式的非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t+\nabla^2u+f(|u|^2)u=0, \tag{1-4-1}$$

具有孤立波解形式

$$u(x,\ t)=\phi(x;\lambda)e^{i\lambda t}, \tag{1-4-2}$$

其中 $\phi(x;\lambda)$ 应满足

$$\nabla^2\phi-\lambda\phi+f(\phi^2)\phi=0, \tag{1-4-3}$$

$\lambda\in R$. 我们先看看为使这种孤立波解存在应满足的条件，引入积

分量

$$N(\phi)=\int|\phi|^2dx, \quad T(\phi)=\int\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2dx,$$

$$I_0(\phi)=\int F(\phi^2)dx, \quad I_1(\phi)=\int f(\phi^2)\phi^2dx,$$

其中
$$F(\phi^2)=\int_0^{\phi^2}f(s)ds,$$

Hamiton 量
$$H=2T-I_0.$$

作用量
$$S(\phi)=\frac{1}{2}[H(\phi)+\lambda N(\phi)].$$

设 $\phi(x)$ 为(1-4-3)的一个解，令 $\phi_\alpha(x)=\phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. 则

$$S(\phi_\alpha)=\alpha^{n-2}T(\phi)+\frac{1}{2}\alpha^n[\lambda N(\phi)-I_0(\phi)].$$

因为 $\phi(x)$ 为(1-4-3)的一个解，易知它是 $S(\phi)$ 的一个临界点，

$$\frac{d}{d\alpha}S(\phi_\alpha)|_{\alpha=1}=(n-2)T(\phi)+\frac{n}{2}[\lambda N(\phi)-I_0(\phi)]=0.\tag{1-4-4}$$

另一方面，对(1-4-3)式乘 ϕ，积分之可得

$$2T(\phi)=I_1(\phi)-\lambda N(\phi).\tag{1-4-5}$$

由(1-4-4)、(1-4-5)联立，并设 $f(\phi^2)=\phi^{2\sigma}$, $\sigma>0$, 可得

$$H(\phi)=\frac{n-\frac{2}{\sigma}}{2\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)-n}\lambda N(\phi),\tag{1-4-6}$$

其中 $\sigma<\frac{2}{n-2}$. 利用 $H=2T-I_0$ 可得

$$\left[\frac{n}{\sigma+1}-(n-2)\right]I_1(\phi)=2\lambda N(\phi),$$

其中

$$I_1=\int\phi^{2\sigma+2}dx=(\sigma+1)I_0.$$

因 $I_1>0$, 仅当对 $\lambda>0$

$$\sigma < \frac{2}{n-2} \qquad n>2,$$
$$\sigma < \infty \qquad n \leqslant 2 \tag{1-4-7}$$

成立. 可以证明,条件(1-4-7)也是非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + \nabla^2 u + |u|^{2\sigma} u = 0$$

孤立波解存在的充分条件.

对于一般具非线性项 $f(\phi^2)\phi$, 以下条件是孤立波解存在的充分条件:

(1) $\lambda>0$, $f(0)=0$;

(2) $$-\infty \leqslant \lim_{\phi\to\infty} \frac{f(\phi^2)}{\phi^{l-1}} \leqslant 0, \tag{1-4-8}$$

其中

$$l = \frac{n+2}{n-2}, \quad n>2,$$
$$l>0, \qquad n \leqslant 2. \tag{1-4-9}$$

对于 $f(\phi^2)=\phi^{2\sigma}$, $\sigma>0$, 存在唯一的孤立波解的条件是

$$\begin{cases} 0<\sigma<\infty, \ 1\leqslant n\leqslant 2, \\ 0<\sigma\leqslant \dfrac{1}{n-2}, \ 2\leqslant n\leqslant 4, \\ 0<\sigma<\dfrac{8-n}{2n}, \ 4<n<8. \end{cases} \tag{1-4-10}$$

一般说来,这些多维孤立波是不稳定的,孤立波的稳定性条件是

$$0<\sigma<\frac{2}{n}. \tag{1-4-11}$$

如果非线性项的增长阶数满足以下条件:

$$\frac{2}{n}<\sigma<\frac{2}{n-2}, \quad n>2,$$
$$\frac{2}{n}<\sigma<\infty, \qquad n\leqslant 2, \tag{1-4-12}$$

则这种多维孤立波解是不稳定的. 例如,对于如下的三维非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t+\Delta u+|u|^2u=0$$

的孤立波解是不稳定的($\sigma=1$).

定义波包的“惯性动量”为

$$I=N\langle|x-\langle x\rangle|^2\rangle, \tag{1-4-13}$$

其中 $\langle h(x)\rangle=N^{-1}\int h(x)|u|^2dx$, $N=\int|u|^2dx$. 由直接计算可得

$$\ddot{I}=4\left\{2H-\frac{1}{2}N|U|^2+(n+2)\int F(|u|^2)dx-n\int f(|u|^2)\cdot|u|^2dx\right\}, \tag{1-4-14}$$

其中 U 表示质量中心的速度, $U=\frac{-2\vec{P}}{N}$. 如引入质量中心的相对能量

$$2H_0\equiv 2H-\frac{1}{2}N|U|^2, \tag{1-4-15}$$

且设

$$A\equiv 4\left[(n+2)\int F(|u|^2)dx-n\int f(|u|^2)|u|^2dx\right]=0,$$

则由(1-4-14)有

$$\ddot{I}=8H_0. \tag{1-4-16}$$

$A=0$, 对于 $f(|u|^2)=|u|^{2\sigma}$, 它对应于 $\sigma=\frac{2}{n}$ 的情况. 由(1-4-16)对 t 积分二次, 如 $H_0<0$, 则在 t 的有限时刻内, $I\to 0$. 此时由于整个质量 $N=\int|u|^2dx$ 是守恒的, 它意味着质点中心 $|u|\to\infty$, 而其他地方 $u\to 0$, 这种现象称为坍塌(Collapse)或“blow up”. 对于一般情况, $A\neq 0$, 由(1-4-14)对 t 积分二次, 得

$$I=4H_0t+Bt+c+\int_0^t dt'\int_0^{t'}A(t'')dt'', \tag{1-4-17}$$

其中

$$B\equiv\dot{I}|_{t=0}=4\mathrm{Im}\int\vec{x}\cdot\vec{P}(u_0^*\cdot\nabla u_0)dx,$$

$$C\equiv I|_{t=0}=\int|\vec{x}|^2|u_0|^2dx,$$

故在 $A\leqslant 0$ 时可得孤立波解坍塌的充分条件：

$$\begin{aligned}&(1)\ H_0<0;\\&(2)\ H_0=0,\ B<0;\\&(3)\ H_0>0,\ B\leqslant -4\sqrt{H_0C}.\end{aligned}\tag{1-4-18}$$

对于 $f(|u|^2)=q|u|^{2\sigma}$, $q>0$, 坍塌条件对应于 $\sigma>\frac{2}{n}$, 具体数值计算结果如图 1-24、25 所示.

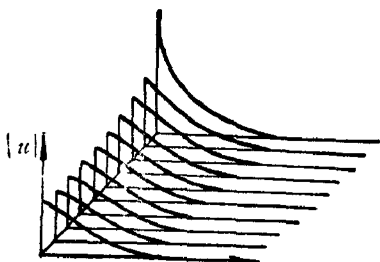


图 1-24 振幅 $|u|$ 随时间发展的坍塌图象

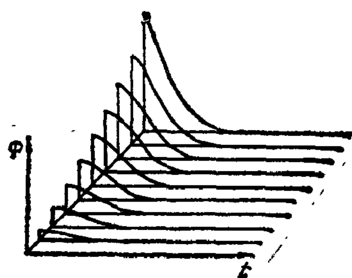


图 1-25 位相 φ 随时间的发展变化

孤立波坍塌后，它趋于具有奇性的自型解

$$u(x,\ t)=\frac{\Phi(\eta)}{f(t)}\exp[i\varphi(\eta,\ t)],\tag{1-4-19}$$

其中

$$f(t)=\alpha(t_0-t)^{\beta},\quad \eta=\frac{x}{f(t)},$$

β 为小于 1 的一个正数.

§5 孤立子的相互作用和 $t\to\infty$ 的渐近性质

孤立子在非线性相互作用后不改变它原来的振幅和波形，当 $t\to\infty$ 时，它具有稳定的结构，是孤立子非常重要的性质. 这种现象对于 KdV 方程首先为 Kruskal, Zabusky 在数值计算中发现,

后来 P. D. Lax 从理论上给予严格的分析证明. Lax 还细致地分析了两个孤立子非线性相互作用的详细过程，他指出：

(1) 若波速 $C_1 \gg C_2$，第一个波高于(因而也快于)第二个波，若第一个波位于第二个波的左方，则第一个波一定会赶上第二个波．在相互作用时，大的波首先吞并小的(第二个)波，然后再吐出它，此时只有一个最大值(峰值).

(2) 若波速 $C_1 \approx C_2$，此时大的波赶上小的波，相互作用时，大的波峰值下降，小的波峰值上升，存在两个峰值．然后再交换一下这种过程.

当 $C_1 \gg C_2$ 时，两个孤立子相互作用示意图如图 1-26 所示.

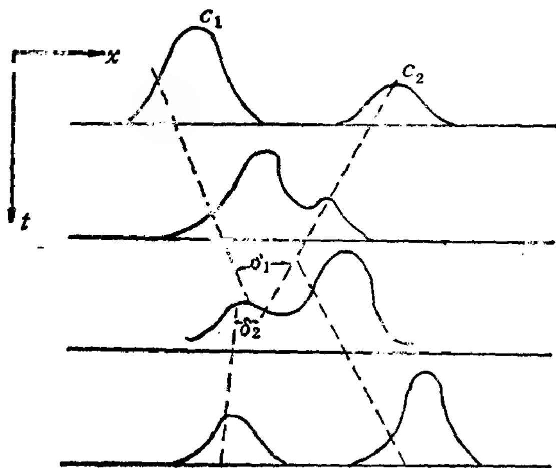


图 1-26

Lax 还分析了 KdV 方程在 $t \to \infty$ 时解的性质．他指出：若 $u(x, t)$ 为 KdV 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1-5-1}$$

的解，它对一切 x, t 定义，且在 $x = \pm\infty$ 处消失，则存在离散的正数 $C_1, C_2, \cdots, C_N$(称它为 u 的特征速度)和相位移 θ_j^+，使得

$$\lim_{t\to\pm\infty} u(x,t)=\begin{cases} S(\xi-\theta_j^{\pm})C_j, & C=C_j, \\ 0, & C\neq C_j, \end{cases} \tag{1-5-2}$$

其中 S 表示(1-5-1)的孤立子解,$\xi=x-Ct$.

以下我们用两种不同的方法来论证 Lax 所得的结论. 首先,考虑纯离散谱的情况(即反射系数 $b(k,t)\equiv 0$). 此时我们可利用反散射法求解 N 个孤立子所得到的结果,用代数分析手段来证明这一事实: 如果 $t\to-\infty$时有 N 个具有特征值 $k_1,k_2,\cdots,k_N$ 的孤立子,则当 $t\to\infty$ 时 KdV 方程的解再由这 N 个特征值的孤立子所组成,只是它们的位相有了平移.

事实上,由散射反演法理论可知,当反射系数 $b(k,t)=0$ 时,Гельфанд--Левитан 方程为

$$K(x,y,t)+\sum_{m=1}^{N}C_m^2(t)e^{-k_m(x+y)} + \sum_{m=1}^{N}C_m^2(t)e^{-k_m y}\int_x^{\infty}e^{-k_m z}K(x,z,t)\,dz=0, \tag{1-5-3}$$

其中 $C_m(t)=C_m(0)e^{4k_m^3 t}$, $\lambda=-k_m^2$ 为 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx}-(u(0,x)-\lambda)\psi=0, \quad -\infty<x<\infty \tag{1-5-4}$$

的离散特征值. KdV 方程(1-5-1)的解为

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x,t). \tag{1-5-5}$$

如

$$K(x,y,t)=-\sum_{m=1}^{N}C_m(t)\psi_m(x,t)e^{-k_m y}, \tag{1-5-6}$$

其中 $\psi_m(x,t)$满足如下的线性代数方程组

$$\psi_m(x,t)+\sum_{n=1}^{N}C_m(t)C_n(t)\frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\psi_n(x,t)=C_m(t)e^{-k_m x}, \quad (m=1,2,\cdots,N). \tag{1-5-7}$$

由(1-5-5)知,

$$u(x,t)=2\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{N}C_m(t)\psi_m(x,\ t)e^{-k_m x}=2\sum_{m=1}^{N}f'_m(x,\ t),$$

其中 $$f_m(x,\ t)=C_m(t)\psi_m(x,\ t)e^{-k_m x}.$$

因此，为了求得 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,\ t)$，必须计算 $\sum\limits_m f'_m(x,\ t)$，

为此改写(1-5-7)为

$$C_m^{-2}(t)e^{2k_m x}f_m(x,\ t)+\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n(x,\ t)}{k_m+k_n}=1,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ N. \tag{1-5-8}$$

上式对 x 求导得

$$C_m^{-2}(t)e^{2k_m x}f'_m(x,\ t)+\sum_{n=1}^{N}\frac{f'_n(x,\ t)}{k_m+k_n}=-2k_m C_m^{-2}e^{2k_m x}f_m. \tag{1-5-9}$$

为了考察 $|t|\to\infty$ 时，$f'_m(x,\ t)$ 的渐近状态，取运动坐标系

$$\xi=x-4k_p^2t,\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ N,$$

其中 $\lambda_p=-k_p^2$ 为第 p 个孤立子的特征值. $4k_p^2$ 为它的运动速度，于是有

$$\begin{aligned}C_m^{-2}(t)e^{2k_m x}&=C_m(0)^{-2}\exp\{-8k_m(k_m^2-k_p^2)t+2k_m\xi\}\\&=C_m(\xi)\exp\{-8k_m(k_m^2-k_p^2)t\},\end{aligned}$$

其中 $C_m(\xi)=C_m(0)^{-2}e^{2k_m\xi}$. 于是(1-5-8)、(1-5-9)可改写为

$$C_m(\xi)e^{-8k_m(k_m^2-k_p^2)t}f_m+\sum_{m=1}^{N}\frac{f_n}{k_m+k_n}=1, \tag{1-5-10}$$

$$\begin{aligned}&C_m(\xi)e^{-8k_m(k_m^2-k_p^2)t}f'_m+\sum_{n=1}^{N}\frac{f'_n}{k_m+k_n}\\&=-2k_m C_m(\xi)e^{-8k_m(k_m^2-k_p^2)t}f_m.\end{aligned} \tag{1-5-11}$$

设 $k_1>k_2>\cdots>k_N>0$，作如下考察：

5.1 $t\to\infty$ 的渐进状态

对(1-5-10)取极限，可得

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}\dfrac{f_n}{k_m+k_n}=1,\ m=1,\ 2,\ \cdots p-1,\\ C_pf_p+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{f_n}{k_p+k_n}=1, \qquad m=p,\\ f_m=0, \qquad m=p+1,\ \cdots,\ N.\end{cases}$$

上式可简写为

$$\sum_{m=1}^{p}\frac{f_n}{k_m+k_n}=1-C_p\delta_{mp}f_p \quad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{1-5-12}$$

$$f_m=0 \quad (m=p+1,\ \cdots,\ N). \tag{1-5-13}$$

类似有

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{f'_n}{k_m+k_n}=-C_p\delta_{mp}(2k_pf_p+f'_p) \quad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{1-5-14}$$

$$f'_m=-2k_mf_m=0 \quad (m=p+1,\ \cdots,\ N). \tag{1-5-15}$$

易知，矩阵 $K_p=\left(\dfrac{1}{(k_m+k_n)}\right)(m=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 具有正的行列式.

事实上，由于

$$0<\det C=\det\left(C_mC_n\frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\right)$$

$$=\det\left(\frac{1}{k_m+k_n}\right)\prod_{m=1}^{N}C_m^2e^{-2\sum\limits_{m=1}^{N}k_mx},$$

故有 $\det\left(\dfrac{1}{k_m+k_n}\right)>0 \quad (m,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，由 Gramer 法则，及(1-5-12)、(1-5-14)可解出 f_m, f'_m,

$$f_m\det K_p=\sum_{n=1}^{p}K_{nm}-C_pK_{pm}f_p \quad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{1-5-16}$$

$$f'_m\det K_p=-C_pK_{pm}(2k_pf_p+f'_p) \quad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{1-5-17}$$

其中 K_{mn} 为矩阵 $\left(\dfrac{1}{k_m+k_n}\right)$ 元的代数余子式．我们用 L_p 表示 K_p 最后一行的元素都为 1 的矩阵．令 $m=p$，解出 f_p, f'_p 得

$$f_p=\frac{\det L_p}{\det K_p+C_p\det K_{p-1}},$$

$$f'_p=-\frac{2C_pk_p\det K_{p-1}f_p}{\det K_p+C_p\det K_{p-1}}.$$

对(1-5-17)求和，并将 f_p, f'_p 的上述表达式代入得

$$\sum_{m=1}^{p}f'_m\det K_p=-\sum_{m=1}^{p}C_pK_{pm}(2k_pf_p-f'_p)$$

$$=-\sum_{m=1}^{p}C_pK_{pm}\cdot 2k_pf_p\left(1-\frac{C_p\det K_{p-1}}{\det K_p+C_p\det K_{p-1}}\right)$$

$$=-\sum_{m=1}^{p}C_pK_{pm}f_p\cdot 2k_p\frac{\det K_p}{\det K_p+C_p\det K_{p-1}}$$

$$=-C_p\det L_pf_p\cdot 2k_p\frac{\det K_p}{\det K_p+C_p\det K_{p-1}}$$

$$=-2k_pC_p(\det L_p)^2\frac{\det K_p}{(\det K_p+C_p\det K_{p-1})^2},$$

故有
$$\lim_{t\to\infty}\sum_{m=1}^{p}f'_m=-\frac{2k_pC_p}{\left[\dfrac{\det K_p}{\det L_p}+C_p\dfrac{\det K_{p-1}}{\det L_p}\right]^2}.$$

从 K_p 中的各行减去最后一行，易得

$$\det K_p=\frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p-k_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(k_p+k_m)}\det L_p.$$

同理，从 L_p 中的各列减去最后一列，有

$$\det L_p=\frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p-k_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p+k_m)}\det K_{p-1},$$

$$\frac{\det K_p}{\det L_p}=\frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p-k_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(k_p+k_m)},$$

$$\frac{\det K_{p-1}}{\det L_p}=\frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p+k_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p-k_m)}.$$

再注意到 $C_p=C_p(0)^{-2}e^{2k_p\xi}$，定义 ξ_p 为

$$e^{2k_p\xi_p}\equiv\frac{C_p^2(0)}{2k_p}\prod_{m=1}^{p-1}\left(\frac{k_p-k_m}{k_p+k_m}\right)^2,$$

故有

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ \xi\text{ 固定}}}u=\lim_{\substack{t\to\infty\\ \xi\text{ 固定}}}2\sum_{m=1}^{p}f'_m=\frac{-4k_pC_p}{\left[\dfrac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p-k_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(k_p+k_m)}+C_p\dfrac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p+k_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(k_p-k_m)}\right]^2}$$

$$=-\frac{4k_pC_p}{\prod\limits_{m=1}^{p-1}\left(\dfrac{k_p-k_m}{k_p+k_m}\right)^2\left[\dfrac{1}{4k_p^2}+\dfrac{2C_p}{2k_p}\prod\limits_{m=1}^{p-1}\left(\dfrac{k_p+k_m}{k_p-k_m}\right)^2+C_p^2\prod\limits_{m=1}^{p-1}\left(\dfrac{k_p+k_m}{k_p-k_m}\right)^4\right]}$$

$$=-16k_p^3C_p\prod_{m=1}^{p-1}\left(\frac{k_p+k_m}{k_p-k_m}\right)^2\left[1+2k_pC_p\prod_{m=1}^{p-1}\left(\frac{k_p+k_m}{k_p-k_m}\right)^2\right]^{-2}$$

$$=-8k_p^2\left[2k_pC_p\prod_{m=1}^{p-1}\left(\frac{k_p+k_m}{k_p-k_m}\right)^2\right]\times\left[1+2k_pC_p\prod_{m=1}^{p-1}\left(\frac{k_p+k_m}{k_p-k_m}\right)^2\right]^{-2}$$

$$=-8k_p^2e^{2k_p(\xi-\xi_p)}\left[1+e^{2k_p(\xi-\xi_p)}\right]^{-2}$$

$$=-2k_p^2\operatorname{sech}^2[k_p(\xi-\xi_p)]$$

$$=-2k_p^2\operatorname{sech}^2[k_p(x-4k_p^2t-\xi_p)].$$

这就是说，在 $x=4k_p^2t$ 的周围，它就是振幅为 $2k_p^2$，速度为 $4k_p^2$ 的孤立子.

5.2 $t\to-\infty$ 的渐近状态

由(1-5-10)、(1-5-11)有

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{f_n}{k_m+k_n}=1-C_p\delta_{mp}f_p\quad(m=p,\ \cdots,\ N),$$

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{f'_n}{k_m+k_n}=-C_p\delta_{mp}(2k_pf_p+f'_p)\quad(n=p,\ \cdots,\ N),$$

$$f'_m=-2k_mf_m=0\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1).$$

如同 $t\to\infty$ 的讨论一样，定义 $\bar{\xi}_p$ 为

$$e^{2k_p\bar{\xi}_p}\equiv\frac{C_p^2(0)}{2k_p}\prod_{m=1+1}^{N}\left(\frac{k_p-k_m}{k_p+k_m}\right)^2,$$

于是可得

$$\lim_{t\to\infty}u(x,\ t)=-2k_p^2\operatorname{sech}^2[k_p(x-4k_p^2t-\bar{\xi}_p)],$$

相位差

$$\xi_p-\bar{\xi}_p=\frac{1}{k_p}\left[\sum_{m=1}^{p-1}\log\left(\frac{k_m-k_p}{k_m+k_p}\right)-\sum_{m=p+1}^{N}\log\left(\frac{k_p-k_m}{k_p+k_m}\right)\right].$$

我们也可用另外的办法来分析有限个孤立子的相互作用．设 KdV 方程为

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0,\tag{1-5-18}$$

令 $u=p_x$，则有

$$(p_t)_x+\left(\frac{1}{2}p_x^2\right)_x+(p_{xxx})_x=0,$$

积分之得

$$p_t+\frac{1}{2}p_x^2+p_{xxx}=0.\tag{1-5-19}$$

类似于 Hopf-Cole 变换 $p=12(\log F)_x$ 代入上式消去一些项再合并为

$$F(F_t+F_{xxx})_x-F_x(F_t+F_{xxx})+3(F_{xx}^2-F_xF_{xxx})=0.\tag{1-5-20}$$

注意到在(1-5-20)中含有算子 $L=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}$，而

$$F=1+e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3t}\quad(\alpha,\ s\ 为实数)$$

为
$$F_t+F_{xxx}=0$$
的特解．如果(1-5-20)为线性的，可指望对 α, s 迭加求和产生它的解．现由于(1-5-20)为非线性，具有相互作用项，我们可用通常

的办法依相互作用项近似展开为

$$F=1+F^{(1)}+F^{(2)}+\cdots,$$

代入(1-5-20)可得一系列方程

$$\{F_t^{(1)}+F_{xxx}^{(1)}\}_x=0,$$

$$\{F_t^{(2)}+F_{xxx}^{(2)}\}_x=-3[(F_{xx}^{(1)})^2-F_x^{(1)}F_{xxx}^{(1)}],$$

$$\cdots$$

如果 $F^{(1)}$ 只取两项: $F^{(1)}=f_1+f_2$,

$$f_j=e^{-\alpha_j(x-s_j)+\alpha_j^3t}\quad(j=1,\ 2).$$

显然，这样选取的 $F^{(1)}$ 满足第一个方程，将它代入 $F^{(2)}$ 的方程得

$$\{F_t^{(2)}+F_{xxx}^{(2)}\}_x=3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)^2f_1f_2,$$

可解出

$$F^{(2)}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{(\alpha_2+\alpha_1)^2}f_1f_2.$$

使人感到惊奇的是 $F^{(3)}=F^{(4)}=\cdots=0$。于是我们得到(1-5-20)的精确解为

$$F=1+f_1+f_2+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{(\alpha_2+\alpha_1)^2}f_1f_2.\qquad(1\text{-}5\text{-}21)$$

我们注意到在此表达式中相互作用项仅含有 f_1f_2，而没有 $f_1^2f_2^2$ 项，这个结果可推广到 N 个 f_j 上。设 $F^{(1)}=\sum_{j=1}^{N}f_j$，则 $F^{(2)}$ 含有 f_jf_k 项 $(j\neq k)$，而没有 f_j^2 项，$F^{(3)}$ 含有 $f_jf_kf_l$ 项 $(j\neq k\neq l)$，而没有 f_j^3, f_j^2, f_k 等项。$F^{(N)}\propto f_1f_2\cdots f_N$。于是，

$$F=1+\sum_j f_j+\sum_{j\neq k}a_{ij}f_jf_k+\sum_{j\neq k\neq l}a_{jkl}f_jf_kf_l+\cdots$$

$$+a_{12\cdots N}f_1f_2\cdots f_N.$$

可以证明，$F=\det(F_{mn})$，其中 $F_{mn}=\delta_{mn}+\dfrac{2\alpha_m}{\alpha_m+\alpha_n}f_m$，矩阵 (F_{mn}) 和由散射反演法求得的矩阵

$$C=\left(\delta_{mn}+\frac{e^{-(k_m+k_n)x}}{k_m+k_n}\right)$$

是完全一致的．现考虑 $N=2$, $u=p_x=12(\log F)_{xx}$ 及 F 的表达式(1-5-19)，可得 KdV 方程(1-5-16)解的表达式为

$$\frac{u}{12}=\{\alpha_1^2 f_1+\alpha_2^2 f_2+2(\alpha_2-\alpha_1)^2 f_1 f_2+[(\alpha_2-\alpha_1)/(\alpha_2+\alpha_1)]^2 \cdot(\alpha_2^2 f_1^2 f_2+\alpha_1^2 f_1 f_2^2)\}/\{[1+f_1+f_2+((\alpha_2-\alpha_1)/(\alpha_2+\alpha_1))^2 f_1 f_2]^2\}, \tag{1-5-22}$$

其中
$$f_j=\exp[-\alpha_j(x-s_j)+\alpha_j^3 t].$$

对应于 KdV 方程的一个孤立子解

$$\frac{u}{12}=\frac{\alpha^2 f}{(1+f)^2},$$

即
$$u=3\alpha^2\operatorname{sech}^2\frac{\theta-\theta_0}{2}.$$

其中
$$\theta=\alpha x-\alpha^3 t,\ \theta_0=s\alpha,\ f=e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3 t}.$$

当 $f=1$ 时，u 取极大值，最大振幅为 $3\alpha^2$．取极大值的位置为 $-\alpha(x-s)+\alpha^3 t=0$，即 $x=s+\alpha^2 t$，波速 $c=\alpha^2$．为了考察孤立子之间的相互作用和 $t\to\pm\infty$ 的渐近状态，充分利用解的表达式(1-5-22)，下面我们分几种情况来讨论．

5.3　几种情况的讨论

第一种情况：在 (x, t) 区域上 $f_1\approx 1$，f_2 很大或很小．

(1) $f_1\approx 1$, $f_2\ll 1$，从(1-5-20)可知

$$\frac{u}{12}\approx\frac{\alpha_1^2 f_1}{(1+f_1)^2},$$

即为孤立子 α_1 波．

(2) $f_1\approx 1$, $f_2\gg 1$，从(1-5-22)可知

$$\frac{u}{12}\approx\frac{[(\alpha_2-\alpha_1)/(\alpha_2+\alpha_1)]^2\alpha_1^2 f_1 f_2^2}{\{f_2+[(\alpha_2-\alpha_1)/(\alpha_2+\alpha_1)]^2 f_1 f_2\}^2}=\frac{\alpha_1^2\tilde{f}_1}{(1+\tilde{f}_1)^2},$$

其中
$$\tilde{f}=\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}\right)^2 f_1.$$

此时仍为孤立子 α_1 波，仅相位 s_1 换为

$$\tilde{s}_1 = s_1 - \frac{1}{\alpha_1}\log\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2.$$

第二种情况：在(x, t)区域上，$f_2\approx1$，f_1很大或很小，类似第一种情况的分析，此时为孤立子α_2波。

第三种情况：f_1，f_2均很小或很大，此时$u\approx0$。

第四种情况：$f_1\approx1$，$f_2\approx1$，相互作用区。

现设$\alpha_2>\alpha_1>0$，讨论α_2波追赶α_1波的情况。

(1) 当$t\to-\infty$时，

α_1波：$f_1\approx1$，$x=s_1+\alpha_1^2t$，

$$f_2=e^{-\alpha_2(x-s_2)+\alpha_2^3t}=e^{-\alpha_2[s_1-s_2]-\alpha_2[\alpha_1^2-\alpha_2^2]t}\ll1 \quad (t\to-\infty),$$

依前面的讨论，此时表明在$x=s_1+\alpha_1^2t$处为孤立子α_1波。

α_2波：$f_2\approx1$，$x=s_2+\alpha_2^2t$，

$$f_1=e^{-\alpha_1(x-s_1)+\alpha_1^3t}=e^{-\alpha_1(s_2-s_1)+\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)t}\gg1 \quad (t\to-\infty),$$

此表明在

$$x=s_2-\frac{1}{\alpha_2}\log\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2+\alpha_2^2t$$

为孤立子α_2波，其余地方$u\approx0$(f_1，f_2很大或很小)。

(2) 当$t\to\infty$时，

α_1波：$f_1\approx1$，$f_2\gg1$，$x=s_1-\dfrac{1}{\alpha_1}\log\left(\dfrac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2+\alpha_1^3t$。

α_2波：$f_2\approx1$，$f_1\ll1$，$x=s_2+\alpha_2^2t$。

其余处：$u\approx0$。

上述(1)、(2)结果表明：孤立子相互作用后不改变原来的参量α_1，α_2，快波α_2位于前头。碰撞相互作用过程仅使

α_2波向前平移$\dfrac{1}{\alpha_2}\log\left(\dfrac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2$，

α_1波向后平移$\dfrac{1}{\alpha_1}\log\left(\dfrac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2$。

在$f_1\approx1$, $f_2\approx1$相互作用的时间、地点约为

$$x=s_1+\alpha_1^2t=s_2+\alpha_2^2t,\ t=\frac{-(s_2-s_1)}{\alpha_2^2-\alpha_1^2},$$

$$x=\frac{\alpha_2^2s_1-\alpha_1^2s_2}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}.$$

§6　分子系统中的孤立子

最近以来，人们以极大的兴趣关注在化学反应和其他局部作用中激发起来的孤立子．在生物过程中，孤立子的激发占有很重要的位置，这种孤立子是不能直接由光激发的．以下我们简要地叙述一下在一维分子系统中激子和孤立子的情况，它们性质上的差别，α螺旋蛋白质分子的准周期结构以及它的孤立子．

6.1　一维分子系统中的激子

在由同一种分子组成的分子系统中，分子之间的共振作用形成了激发的集体性．因我们关心在生物中的应用，以下仅考虑一维准分子结构——具有极长的分子链．记分子间的平衡距离为a，邻近分子间共振作用的能量为$-J$，则由平面波

$$\psi_k(z,\ t)=A\exp\{i(\vec{k}z-\Omega\vec{k})t\}\tag{1-6-1}$$

形成的激子能量为

$$\hbar\Omega(\vec{k})=E(0)+\frac{\hbar^2k^2}{2m_{ex}},\tag{1-6-2}$$

其中波矢量$\vec{k}$直接沿着链方向，且满足$|\vec{k}|a\ll1$；

$$m_{ex}=\frac{\hbar^2}{2Ja^2}\tag{1-6-3}$$

为有效激子质量，$E(0)$为它的初始能量．

设由平面波(1-6-1)形成的激发在整个系统中是均匀分布的．在直线l_0上局部的准定常激发可由波包

$$\psi_{ex}(z,\ t)=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}A(k)\exp\{i[kz-\Omega(k)t]\}dk\tag{1-6-4}$$

所描述，其中$\Delta k=\frac{\pi}{2l_0}$. 局域激子以速度

$$V(k_0)=\frac{\hbar k_0}{m_{ex}} \tag{1-6-5}$$

沿着链方向传播. 受激发的区域为

$$l_\tau=\left[l_0^2+\left(\frac{\hbar\tau}{l_0 m_{ex}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1-6-6}$$

与激子激发(1-5-1)相对应的 Hamilton 为

$$H_{ex}=\sum_n[(\varepsilon-D)B_n^+B_n-J(B_{n+1}^+B_n+B_{n+1}B_n^+)], \tag{1-6-7}$$

其中ε表示孤立子的激发能，B_n^+表示序号为n的分子的激发算符，D为变形激发的能量算符.

质量为M的分子从平衡位置位移为u_n的能量算符可写为

$$H_{ph}=\frac{1}{2}\sum_n\left[\frac{1}{M}\hat{P}_n^2+w(u_n-u_{n-1})^2\right], \tag{1-6-8}$$

其中$\hat{P}_n$表示正规共轭位移的动量算符，w为链的弹性系数.

$$v_{aq}=a\sqrt{\frac{w}{M}} \tag{1-6-9}$$

表示链的横向声波速度.

具有从平衡位置位移的，由分子激发的相互作用 Hamilton 为

$$H_{int}=\chi\sum_n(u_n-u_{n-1})B_n^+B_n. \tag{1-6-10}$$

我们注意到，在激子激发态(1-5-1)中的分子链是不存在局部形变的，由算符(1-6-10)所描述的相互作用通过发射声子而使激子减速.

6.2 一维分子系统中的孤立子

在一维分子系统中，伴随着链的形变慢运动局域内分子的激发是可能的，这种激发就是孤立子. 相应的定态 Hamilton 为

$$H_{sol}=H_{ex}+H_{ph}+H_{int}, \tag{1-6-11}$$

其中 H_{ex}, H_{ph}, H_{int} 分别已为(1-6-7)、(1-6-8)、(1-6-10)所定义.

为了确定这种激发的性质,我们考虑函数

$$\psi_{sol}=\sum_n a_n(t)e^{\sigma(t)}B_n^+|0\rangle \tag{1-6-12}$$

归一化条件为

$$\sum_n|a_n|^2=1, \tag{1-6-13}$$

算符 $\sigma(t)$ 为

$$\sigma(t)\equiv\frac{i}{\hbar}\sum_n[\beta_n(t)\hat{P}_n-\pi_n(t)u_n]. \tag{1-6-14}$$

函数 $|a_n(t)|^2$ 表示通过一个链内分子激发的分布，容易得到如下的方程

$$\beta_n(t)=\langle\psi_{sol}|u_n|\psi_{sol}\rangle,$$

$$\pi_n(t)=\langle\psi_{sol}|\hat{P}_n|\psi_{sol}\rangle.$$

这些函数分别表示在状态(1-6-12)下位移和动量的平均值.

未知函数 $a_n(t)$, $\beta_n(t)$ 和 $\pi_n(t)$ 为如下泛函

$$\{a_n,\ \beta_n,\ \pi_n\}=\langle\psi_{sol}|H_{sol}|\psi_{sol}\rangle \tag{1-6-15}$$

的极小值. 如引进无量纲变量 $\xi=\dfrac{z}{a}$ 和连续近似函数 $a(\xi,\ t)$, $\beta(\xi,\ t)$, $\pi(\xi,\ t)$, 使 $a(n,\ t)=a_n(t)$, $\beta(n,\ t)=\beta_n(t)$, $\pi(n,\ t)=\pi_n(t)$. 由(1-6-15)的极小值条件可得如下两个微分方程

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\wedge+J\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-2\chi\frac{\partial\beta(\xi,\ t)}{\partial\xi}\right]a(\xi,\ t)=0,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nu_{aq}^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\beta(\xi,\ t)-\left|\frac{2\chi}{M}\ \frac{\partial}{\partial\xi}a(\xi,t)\right|^2=0, \tag{1-6-16}$$

其中

$$\wedge=\epsilon-D+W-2J,\ \nu_{aq}^2=\frac{w}{M};$$

$$W=\frac{1}{2}\int\left[M\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2+w\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2\right]d\xi \tag{1-6-17}$$

为链的形变能量.

为方便起见,引入

$$\rho(\xi,\ t)=-\frac{\partial\beta(\xi,\ t)}{\partial\xi},\qquad (1\text{-}6\text{-}18)$$

于是(1-6-16)可变换为

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\wedge+J\frac{\partial^2}{\partial\xi}+2\chi\rho(\xi,\ t)\right]a(\xi,\ t)=0,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nu_{aq}^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\rho(\xi,\ t)+\frac{2\chi}{M}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}|a(\xi,\ t)|^2=0.$$

(1-6-19)

设对应于以运动速度 $v=a\nu<v_{aq}$ 激发的(1-6-19) 的行波解有如下形式:

$$\rho(\xi,\ t)=\rho(\xi-\nu t),\ a(\xi,\ t)=\Phi(\xi-\nu t)\exp[i\gamma(\xi,\ t)].$$

由方程(1-6-19)可得

$$\rho(\xi,\ t)=-\frac{2\chi|a(\xi,\ t)|^2}{w(1-s^2)},\qquad (1\text{-}6\text{-}20)$$

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\wedge+J\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+G|a(\xi,\ t)|^2\right]a(\xi,\ t)=0,$$

(1-6-21)

其中

$$s=\frac{v}{v_{aq}}\ll 1,\ G\equiv\frac{4\chi^2}{(1-s^2)w}.\qquad (1\text{-}6\text{-}22)$$

对于具有非线性参量(1-6-22)的非线性Schrödinger方程(1-6-21)的解,在条件

$$\int|a(\xi,\ t)|^2d\xi=1$$

下具有形式

$$a(\xi,\ t)=\frac{\sqrt{m}\exp\left\{i\left[\frac{\hbar\nu}{2J}(\xi-\xi_0)-\frac{E\nu t}{\hbar}\right]\right\}}{\sqrt{2}\cosh[\mu(\xi-\xi_0)-\nu(t)]},$$

(1-6-23)

其中

$$\mu=\frac{\chi^2}{(1-s^2)w}.\qquad (1\text{-}6\text{-}24)$$

$a(\xi, t)$的平方模

$$|a(\xi, t)|^2=2\mu\mathrm{sech}^2[\mu(\xi-\xi_0-\nu t)] \qquad (1\text{-}6\text{-}25)$$

表示沿分子链激发的分布.

于是,由方程(1-6-20)可得

$$\rho(\xi, t)=\frac{\chi\mu}{(1-s^2)w\cosh^2[\mu(\xi-\xi_0-\nu t)]}, \qquad (1\text{-}6\text{-}26)$$

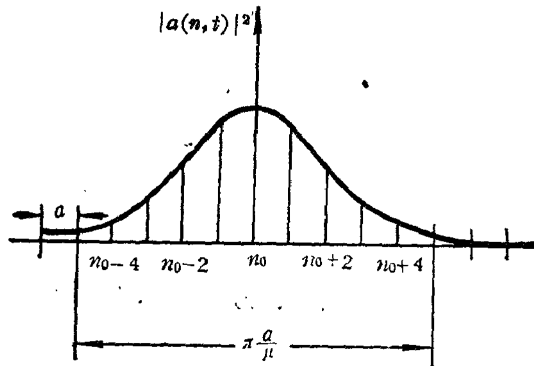


图 1-27 内激发分布的概率$|a(n, t)|^2$随分子链相邻分子相对距离的变化

其中ξ表示最大变形的位置. 激发区的大小为

$$\Delta z=\frac{\pi a}{\mu}=\frac{\pi a(1-s\chi^2)wJ}{x\chi^2},$$

其运行速度为$V=a\nu$,在图 1-27 中我们可以看到分子内激发分布的概率$|a(n, t)|^2$随相邻分子间的相对距离的变化, 对于确定的时间,受激区的宽度为$\frac{\pi a}{\mu}$.

沿着链孤立子具有如下能量:

$$E_v=E_0+\frac{1}{2}m_{sol}V^2, \qquad (1\text{-}6\text{-}27)$$

其中

$$E_0=\frac{\epsilon-D-2J-\chi^4}{3w^2J} \qquad (1\text{-}6\text{-}28)$$

为孤立子的内能，

$$m_{sol}=m_{ex}+\frac{4\chi^4\left(1+\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{2}s^4\right)}{3w^2(1-s^2)^3JV_{aq}^2} \qquad (1-6-29)$$

为孤立子的有效质量.

对于有限能量值(1-6-27)，孤立子的运行速度永远小于分子链的横向声速度，即 $s<1$. 对于软的链(小的 w)，从(1-6-29)可以看出孤立子的有效质量将会很大，甚至当孤立子的运行速度很小时，它的动能还可能达到很高的数值.

在低温下孤立子和光子的相互作用是很不同于光子和激子的相互作用. 由平面波所描述的光子和激子相互作用时，它们的能量、动量守恒律是成立的. 系统的初态和终态对应于同一不变形链. 对于孤立子来说，由于它是局域激发的，它和光子相互作用时，动量守恒律是不成立的. 另外，在孤立子激发时，分子链是局部形变的.

6.3 α 螺旋蛋白质分子的准周期结构

所有的蛋白质分子都是由氨基酸分子组成的. 在图 1-28 中，我们能看到氨基酸分子的化学结构，其中 R 表示一个原子基团，它区分不同的氨基酸分子

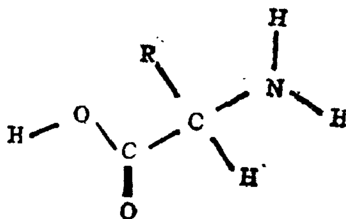


图 1-28 氨基酸分子的化学结构，R 是原子基团，它区分不同的氨基酸

这里约有 20 个那样的基团：

氢键(—H)，甲基(—CH_3)，乙基(—CH_2—CH_3)；羧乙基

(—CH_2—COOH)；丙基(—CH_2—CH_2—CH_3)等等. 因此约有20个不同的氨基酸.

如果两个氨基酸分子连在一起,如图1-29所示,此时,左分子的原子H和右分子的原子H—O形成分子H_2O,左原子N和C联成肽键,如图1-30所示.

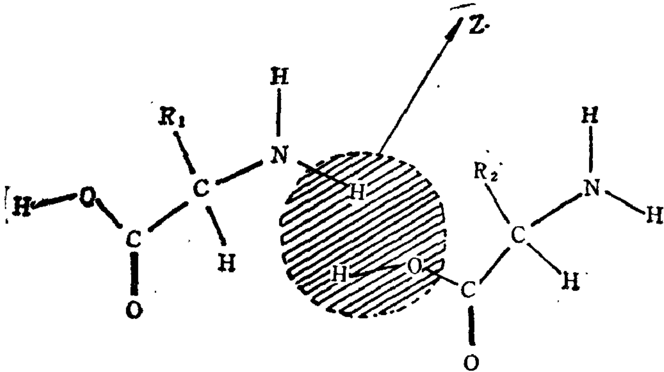


图1-29　两个氨基酸分子之间肽键的形成

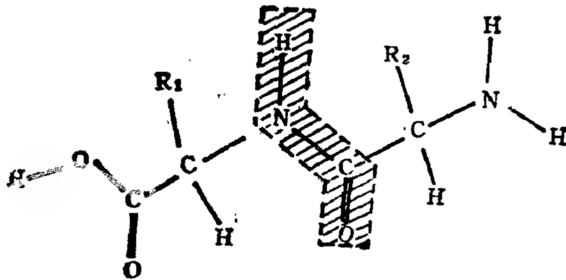


图1-30　两个氨基酸分子形成的二聚体

原子HNCO位于同一平面上,称为肽基团. 从图1-30可以看出,生成的二聚体能和另一个氨基酸相连,于是可形成很长的肽链,它们具有原子重量10^5～10^6dalton. 这些肽分子被称为蛋白质,见图1-31.

在肽链原子之间的相互作用以及它们和水分子的相互作用形

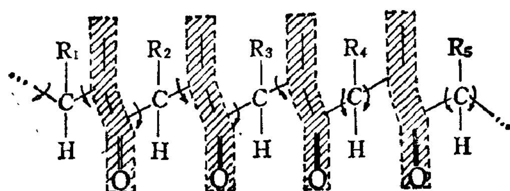


图1-31 蛋白质分子中重复的肽基团

成一个空间结构，称之为蛋白质的二级结构. 在蛋白质分子的许多不同二级结构中，其中有一个是Pauling建立起来的，它是一个很重要的结构，称之为α螺旋结构.

在α螺旋蛋白质分子中，肽基团被如下安排着：序号为1的肽基团的原子H以氢键和序号为4的肽基团的原子O相连；序号为2的肽基团的原子H，以H键和序号为5的肽基团的原子O相连等等. 因此在这样的螺旋体中存在肽基团的三种键，它们均以氢键相连，如图1-32的I, II, III.

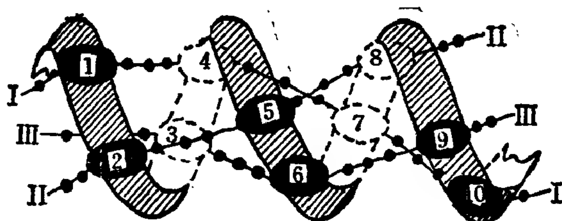


图1-32 在蛋白质分子中肽基团的三种链(I, II, III)，其中氢键以三点表示

由于在α螺旋蛋白质中近邻肽基团之间偶极子——偶极子的相互作用，在肽基团中具有激发能量$\epsilon=0.021\text{eV}$的振动激发(C═O)变成整体激发，由氢键相连的肽链是比较软的，因此三种肽链的整体激发将为振动的孤立子所描述.

6.4 在α螺旋蛋白质分子中的孤立子

包含在α螺旋蛋白质分子中肽基的三种链是具有周期原子基

团以相对弱力(氢键)相互作用分子系统的一个例子.

在 α 螺旋蛋白质分子(它的轴和 z 轴一致)中，肽基团的平衡位置可用半径矢量

$$R_{n\alpha}=R\left[e_x\cos\frac{2\pi}{p}(3n+\alpha)+e_y\sin\frac{2\pi}{p}(3n+\alpha)\right]+l_z\frac{l}{p}(3n+\alpha), \quad (1\text{-}6\text{-}30)$$

来表示，其中 n 表示三个相邻肽基团的元胞序数，它们具有不同指标 $\alpha=1, 2, 3$; l 为螺距(5.4Å); R 是以肽基团为中心的半径(1.8Å); $p=3.6$ 为螺旋一次转角推算出的肽基团数.

对于一切实际生物过程来说，腺苷三磷酸(ATP)分子水解作用所释放的能量(等于 0.54eV)是一个不变的能量单位. 这个能量足以使在具有能量0.21eV的肽基团中具有特色的酰胺—I(amid-I)振动激发起来，这种振动的偶极动量是很大的(0.3Debye)，它保证了在蛋白质分子整体激发中发生大的共振作用.

这种整体激发的理论已为 Davydov, Erenko 和 Sergienko 所发展，现已证实，对应于内酰胺—I(amid-I)的整体激发就是孤立子，即局域性的整体激发表现为内肽和变形激发的组合. 三个链($\alpha=1, 2, 3$)中的任何一个，激发的分布和肽基团之间的距离变化可分别用函数 $a_\alpha(\xi, t)$, $\rho_\alpha(\xi, t)$ 来表示，它们满足方程

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\Lambda+J\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\chi\rho_\alpha(\xi, t)\right]a_\alpha(\xi, t)=L[a_{\alpha+1}(\xi, t)+a_{\alpha-1}(\xi, t)], \quad (1\text{-}6\text{-}31)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nu_{aq}^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]\rho_\alpha(\xi, t)=-\frac{2\chi}{M}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}|a_\alpha(\xi, t)|^2, \quad (1\text{-}6\text{-}32)$$

其中 $\Lambda=\epsilon-D-2J+\frac{1}{2}\sum_\alpha\int\left[\frac{1}{M}\left(\frac{2\beta_\alpha}{\partial t}\right)^2+w\rho_\alpha^2\right]d\xi,$

$$\rho_{\alpha}(\xi,\ t)=-\frac{\partial\beta_{\alpha}(\xi,\ t)}{\partial\xi}. \tag{1-6-33}$$

J 为沿着每个链的相邻肽基团共振作用的能量，L 为不同链的最近的肽基团之间的共振作用能量.

如果我们引入函数

$$\Phi(\xi-\nu t)=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\cosh[\mu(\xi-\xi_0-\nu t)]}, \tag{1-6-34}$$

使归一化$\int\Phi^2(\xi-\nu t)d\xi=1$，则对于具有这种速度 $v=a\nu$，能量为

$$E_\nu=E_0+\frac{1}{2}m_{sol}V^2$$

的整体激发，可得函数

$$\rho_{\alpha}(\xi,\ t)=\frac{\chi A_\alpha^2}{(1-s^2)w}\{1-\tanh[\mu(\xi-\xi_0-\nu t)]\},$$

$$a_{\alpha}(\xi,\ t)=A_{\alpha}\Phi(\xi-\nu t)\exp\left\{i\left[\frac{h\nu}{2J}(\xi-\xi_0)-E_\nu\frac{t}{h}\right]\right\},$$

$$\rho_{\alpha}(\xi,\ t)=\frac{\chi A_\alpha^2}{(1-s^2)w}\Phi^2(\xi-\nu t), \tag{1-6-35}$$

其中 μ, E_ν, A_α 满足方程

$$\begin{aligned}&[\mathscr{L}-\mu^2J]A_\alpha-L(A_{\alpha+1}+A_{\alpha-1})=0,\\&A_\alpha[GA_\alpha^2-4\mu J]=0,\quad\sum_\alpha|A_\alpha|^2=1,\end{aligned} \tag{1-6-36}$$

$$\mathscr{L}\equiv E_\nu-\in+D-w+2J-\frac{\hbar^2\nu^2}{2J}. \tag{1-6-37}$$

由方程(1-6-36)可确定两种可能的激发：对称的和反对称的孤立子.

对于对称孤立子，

$$\begin{aligned}&A_1=A_2=A_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\\&\mu_{sm}=\chi^2[3(1-s^2)wJ]^{-1},\\&E_0=\frac{\in-D-2J+2L-\chi^4}{27w^2J},\end{aligned} \tag{1-6-38}$$

$$z_0 = \frac{3l}{3.6},$$

$$m_{sol}^{(sm)} = m_{ex} + \frac{4\chi^4\left(1+\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{2}s^4\right)}{27w^2z_0^2(1-s^2)^3\nu_{aq}^2J}.$$

对于反对称孤立子，

$$A_1=0,\quad A_2=-A_3=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mu_{as}=\chi^2[2(1-s^2)wJ]^{-1},$$

$$E_0^{(as)}=\in-D-2J-L-\frac{\chi^4}{12w^2J}, \tag{1-6-39}$$

$$m_{sol}^{(as)}=m_{ex}+\frac{\chi^4\left[1+\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{2}\rho^4\right]}{3w^2z_0^2(1-s^2)^3\nu_{aq}^2J}.$$

比较(1-6-38)，(1-6-39)，可看到如下关系式是成立的：

$$\mu_{sm}=\frac{2}{3}\mu_{as},$$

$$E_0^{(sm)}-E_0^{(as)}=3L+\frac{5\chi^4}{108w^2J}>0,$$

$$-m_{sol}^{(sm)}+m_{sol}^{(as)}=\frac{5\chi^4\left[1+\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{2}s^4\right]}{27w^2z_0^2(1-s^2)^3\nu_{aq}^2J}.$$

可以看出，反对称孤立子具有小于零点的能量，大的有效质量和高度的紧致性，因此它具有极大稳定的激发能力.

对称和反对称孤立子的辐射生存时间已被Erenbo, Sergienko和Davydov计算过，他们得到如下的结果：

$$\tau_{sm}=\frac{2\mu_{sm}\cos h^2\left(\frac{\pi h\gamma}{2J\mu_{sm}}\right)}{3\pi^2\cos^2\delta}\tau_0, \tag{1-6-40}$$

$$\tau_{as}=\frac{2\mu_{sm}\cos h^2\left(\frac{\pi}{6\mu_{as}}\right)}{1.94\pi^2\sin^2\delta}\tau_0,$$

其中 $\tau_0 \approx 7\times10^{-3}$s 为胱胺-I(amid-I) 的辐射生存时间. $\delta\approx30$ 为螺旋轴与振动偶极动量的夹角.

从(1-6-40)可知, 对称孤立子的辐射生存时间随着速度的增加而增加, 而反对称孤立子的辐射生存时间是与速度无关的, 是随着夹角 δ 的减少而增大. $\frac{\pi}{\mu_{as}}$ 表示在激发域肽基团的数目, 如果它等于 3, 则由(1-6-40)可知反对称孤立子的辐射生存时间等于 0.5s; 如果 $\frac{\pi}{\mu_{as}}=6$, 则 $\tau_{as}=41$s.

以上表明, 孤立子是 ATP 分子沿着 α 螺旋蛋白质分子水解作用的能量的极好载体, 没有显著的丢失. 当孤立子激发时, 在生物反应中, 它是一种很稳定的状态. 利用孤立子的这种概念, 人们已在分子水平上解释动物肌肉收缩的机制.

§7 Toda 晶格和 Born-Infeld 方程

FPU 考察具有相等质量的 64 个质点以非线性弹簧相连的力学系统. 分别考虑运动方程组

$$\begin{cases} \ddot{x}_1=(x_{i+1}+x_{i-1}-2x_i)+\alpha[(x_{i+1}-x_i)^2 \\ \qquad -(x_i-x_{i-1})^2] \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 64), \\ \ddot{x}_i=(x_{i+1}+x_{i-1}-2x_i)+\beta[(x_{i+1}-x_i)^3 \\ \qquad -(x_i-x_{i-1})^3] \qquad (i=1,\ \cdots,\ 64), \\ \ddot{x}_i=\delta_1(x_{i+1}-x_i)-\delta_2(x_i-x_{i-1})+C \quad (i=1,\ \cdots,\ 64), \end{cases} \tag{1-7-1}$$

具有周期初值条件

$$x_i(0)=\sin\frac{i\pi}{64},\ \dot{x}_i(0)=0 \quad (i=1,\ \cdots,\ 64), \tag{1-7-2}$$

其中 $x_i(t)$表示第 i 个质点距平衡态的位移. 他们考虑各种能量分配, 令

$$a_k=\sum x_i \sin\frac{ik\pi}{64}, \tag{1-7-3}$$

则能量

$$\begin{cases} E_{xi}^{kin}+E_{xi}^{pot}=\frac{1}{2}\dot{x}_i^2+\frac{(x_{in}-x_i)^2+(x_i-x_{i-1})^2}{2}, \\ E_{ah}^{kin}+E_{ah}^{pot}=\frac{1}{2}\dot{a}_k^2+2a_k^2\sin^2\frac{h\pi}{128}. \end{cases} \tag{1-7-4}$$

经典统计力学认为:任何微弱的非线性作用必将导致能量的平衡.但实际计算结果却使人们大吃一惊,它并不趋于热化. 当时 FPU 只在频率空间来考察,未能发现孤立子解. 后来 Toda 考虑晶体的非线性振动,近似模拟这种情况,得到了孤立子解,使 FPU 问题得到了正确的解答. 我们把晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条,如以 $r_n(t)$表示第 n 个弹簧关于它的平衡位置的偏离,则可得常微分差分方程组(运动方程组)

$$m\ddot{r}_n=2f(r_n)-f(r_{n+1})-f(r_{n-1}),\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots, \tag{1-7-5}$$

其中 $f(r)$表示弹簧的作用力. Toda 设 $f(r)=-\alpha(1-e^{-\beta r})$, 当 $f(r)$为线性函数时,如 $f(r)=-\gamma r$, 则有

$$m\ddot{r}_n=\gamma(\gamma_{n+1}+\gamma_{n-1}-2\gamma_n), \tag{1-7-6}$$

其行波解为

$$\gamma_n=a\cos\theta,\ \theta=wt-pn,$$

代入(1-7-6)可得色散关系

$$\frac{mw^2}{\gamma}=4\sin^2\frac{p}{2}.$$

对于非线性情况, Toda 的解法是:令 $\dot{s}_n=f(r_n)$, 于是(1-7-5)化为等价方程组

$$\dot{s}_n=f(r_n),\ m\dot{r}_n=2s_n-s_{n+1}-s_{n-1}.$$

因为

$$f(r)=-\alpha(1-e^{-\beta r}),$$

$$\ddot{s}_n=f'(r_n)\dot{r}_n=-\alpha\beta e^{-\beta r_n}\dot{r}_n=-\beta(\alpha+\dot{s}_n)\dot{r}_n,$$

故有

$$\frac{m}{\beta}\frac{\ddot{s}_n}{\alpha+\dot{s}_n}=s_{n+1}+s_{n-1}-2s_n. \tag{1-7-7}$$

考虑(1-7-7)的行波解

$$s_n=s(\theta),\theta=wt-pn, \tag{1-7-8}$$

则 $s(\theta)$ 满足常微分差分方程

$$\frac{mw^2}{\beta}\frac{s''}{\alpha+ws'}=s(\theta+p)-s(\theta-p)-2s(\theta). \tag{1-7-9}$$

由等式

$$d_n^2(\theta+p)-d_n^2(\theta-p)=-2k^2\frac{d}{dp}\left(\frac{s_n\theta c_n\theta d_n\theta s_n^2 p}{1-k^2 s_n^2\theta s_n^2\theta}\right),$$

其中 c_n, s_n, d_n为 雅可比椭圆函数，k 为这些函数的模. 令

$$E(\xi)=\int_0^\xi d_n^2 z dz,$$

(1-7-9)对 p 积分有

$$E(\theta+p)+E(\theta-p)-2E(0)=\frac{E''(\theta)}{q+E'(\theta)},\quad q=\frac{1}{s_n^2 p}-1,$$

故得 s_n 的解

$$s_n=s(\theta)=bz(2K\theta),$$

其中 $z(\theta)=E(\theta)-\theta\frac{E(K)}{K}$，它是具有周期 $2K$ 的雅可比 Zeta 函数，

$$b=\left(\frac{m\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{s_n^2 2K_p}-1+\frac{E}{K}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad \theta=wt-pn,$$

$$w=\frac{1}{2K}\left(\frac{\alpha\beta}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{s_n^2 2k_p}-1+\frac{E}{K}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

当 $k\to0$ 时，

$$s_n=\frac{bk^2}{4}\sin 2\pi\theta \quad (线性情况);$$

当 $k\to1$ 时，

$$s_n=\frac{1}{4}\frac{m}{\alpha\beta}(\bar{b})^2\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(k_n-\bar{b}t)+\delta\right], \tag{1-7-10}$$

其中 $b=\frac{4\alpha\beta}{m}\operatorname{sech}^2\frac{k}{2}$，$\delta$ 为参数，于是我们可得到孤立子群(1-7-10)。

对于微分差分方程(1-7-5)，如果对差分取极限，可得到非线性波动方程，例如，可得如下一类非线性波动方程

$$y_{tt}=c^2\left[y_{xx}+\alpha(1+p)h^p(y_x)^p y_{xx}+\frac{1}{12}h^2y_{xxxx}\right.$$
$$\left.-s_{gn}(y_t)\frac{\lambda}{h^2}\cdot|y_t|^q\right], \tag{1-7-11}$$

其中 c, α, p, h, λ, q 均为实常数.

Born-Infeld 方程：M. Born 和 M. L. Infeld 曾在非线性修正 Maxwell 方程时，得到方程

$$(1-\varphi_t^2)\varphi_{xx}+2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}-(1+\varphi_x^2)\varphi_{tt}=0. \tag{1-7-12}$$

对此方程 Barbaskov 和 Chernikov 在 1966 年得到它的孤立子解，当

$$1+\varphi_x^2-\varphi_t^2>0$$

时，易知(1-7-12)为双曲型方程. 令 $\xi=x-t$, $\eta=x+t$, $u=\varphi_\xi$, $v=\varphi_\eta$，则由(1-7-12)可得等价方程组

$$\begin{cases}u_\eta-u_\xi=0,\\ v^2u_\xi-(1+2uv)u_\eta+u^2v_\eta=0.\end{cases} \tag{1-7-13}$$

设 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\neq 0$，则 $u_\xi=J\eta_v$, $u_\eta=-J\xi_v$, $v_\xi=-J\eta_u$, $v_\eta=J\xi_u$，于是由(1-7-13)可得

$$\begin{cases}\xi_v-\eta_u=0,\\ v^2\eta_v+(1+2uv)\xi_v+u^2\xi_u=0.\end{cases} \tag{1-7-14}$$

由此可得

$$u^2\xi_{uv}+(1+2uv)\xi_{uv}+v^2\xi_{vv}+2u\xi_u+2v\xi_v=0. \tag{1-7-15}$$

(1-7-15)的特征方程为

$$u^2dv^2-(1+uv)dudv+v^2du^2=0.$$

令 $r=\dfrac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}$, $s=\dfrac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}$, $(u,v)\to(r,s)$得

$$
\begin{aligned}
&r^2\xi_r+\eta_r=0,\\
&\xi_s+s^2\eta_s=0,
\end{aligned}
\tag{1-7-16}
$$

(1-7-16)消去 η 得

$$
\xi_{rs}=0. \tag{1-7-17}
$$

(1-7-17)的一般解为

$$
x-t=\xi=F(r)-\int\rho^2G'(\rho)\,d\rho, \tag{1-7-18}
$$

$$
x+t=\eta=G(s)-\int r^2F'(r)\,dr, \tag{1-7-19}
$$

其中 $F(r)$, $G(s)$ 为任意函数，因

$$
\varphi_r=u\xi_r+v\eta_r=\frac{r}{1-rs}\xi_r+\frac{s}{1-rs}\eta_r=rF'(r),
$$

$$
\varphi_s=sG'(s),
$$

故可得

$$
\varphi=\int rF'(r)\,dr+\int sG'(s)\,ds.
$$

令 $F(r)=\rho$, $G(s)=\sigma$, 且设 $r=\Phi_1'(\rho)$, $s=\Phi_2'(\sigma)$, 则有

$$
\varphi=\Phi_1(\rho)+\Phi_2(\sigma).
$$

由(1-7-18)、(1-7-19)可得

$$
x-t=\rho-\int_{-\infty}^{\sigma}\Phi_2'(\sigma)\,d\sigma,
$$

$$
x+t=\sigma+\int_{\rho}^{\infty}\Phi_1'^2(\rho)\,\partial\rho.
$$

设 $\Phi_1(\rho)$, $\Phi_2(\sigma)$ 为局部的，且分别在 $-1<\rho<0$, $0<\sigma<1$ 不为零，

$$
\varphi=\Phi_1(x-t)+\Phi_2(x+t),\quad t<0. \tag{1-7-20}
$$

Φ_1 波从 $x=-\infty$ 进入，Φ_2 波从 $x=+\infty$ 进入，则当 $t\to\infty$ 有

$$
\varphi=\Phi_1\left[x-t+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2'^2(\sigma)\,d\sigma\right]+\Phi_2\left[x+t-\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1'^2(\rho)\,d\rho\right]. \tag{1-7-21}
$$

参考文献

[1] A. C. Scott, F. Y. Chu, D. W. Mdlaughlin, The soliton: A new concept in applied science, Proc. IEEE, 61 (1973), 1443～1483.

[2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the recurrence of initial States, Phys. Rev. Lett., 15 (1965), 240～243.

[3] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and Solitary waves, Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 21(1968), 467～490.

[4] E. Fermi, J. Pasta and Ulam, Studies of Nonlinear Problems, I, Los Alamos Rep. LA(1940), 1955.

[5] M. Toda, Theory of nonlinear lattices, solid state Sciences 20, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] D. J. Korteweg and G. De Vries, On the Change of form long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., 39 (1895), 422～443.

[7] C. B. Whitham, Linear and nonlinear waves, Wiley, Interscience, New York, 1974.

[8] M. Born and L. Infeld, Foundations of a new field theory, Proc. Roy. Soc. London Vol. 144A (1934), 425～451.

[9] V. G. Makhankov, Phys. Reports, A review section of Phys, Lett. (section C), Vol. 35 (1978), No. 1.

[10] V.E.Zakharov,Collapse of Langmuir waves, Sov. Phys. JETP, 35, (1972), 908～914.

[11] V. E. Zakharov and V. S. Synakh, The nature of the self-focusing singularity, Sov. Phys. JETP, 41 (1976), 465～468.

[12] K. Nishikawa et al., Coupled nonlinear electron-plasma and Ion-Acoustic wave, Phys. Rev. Lett., 33, 33(1974), 148.

[13] 于敏,激光等离子体相互作用与孤立子问题, 1978 年。

[14] 陈雁萍等,等离子体的孤立波,接聚变与等离子体物理,第 1 卷,第 1 期,1981, 33～42.

[15] A. S Davydov, Solitons in Molecular System, Phys. Scripta, 20 (1979), 387～392.

[16] A. C., Scott, The Laser-Raman Spectram of a davydov solitons, Phys. Lett., 86A (1981), 60～65.

[17] A. C., Scott, The Vibrational Structure of Davydov Solitons, Phys. Scripta,

25(1982), 651～65).

[18] 郭柏灵,非线性波与孤立子,力学与实践,第2期,1982, 8～16.

[19] 郭柏灵,一类更广泛的KdV方程的行波解结构及其守恒律,科学探索,第3卷第2期,1983, 31～40.

[20] 郭柏灵、庞小峰,孤立子,科学出版社,1987, 1～363.

[21] Guo Boling Existence and nonexistence for the inifial boundary problem of one class of system of multilimensonal nonlinear schrödinger equations with operator and their soliton solutioes, Math. Acta Scientia, 9: 1 (1989), 45～56.

第二章

反散射方法

李翊神

自从Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura(简称 GGKM)发现可以用 Schrödinger 方程的反散射理论求解 KdV 方程的初值问题以来,这种求解非线性偏微分方程的方法近几年发展很快,现已成功地用于求解许多在应用中十分重要的非线性方程,它无疑是数学物理方法上的一个重大发现(见本章末[11]~[15]).我们知道,长期以来,数学物理方法主要是处理线性偏微分方程问题,而对非线性问题的求解,则显得十分困难,因此一直没有一种系统的求解方法,这一局面由于出现了所谓"反散射方法(Inverse Scattering Method)"而开始有所变化.现在已看出,这一发现不但对应用技术提供了崭新的方法和概念,而且对数学自身的发展也有深远的影响.

本章内容就是介绍这个方法.在§1中讲解 Schrödinger 方程正散射问题,§2讲解 Schrödinger 方程的反散射问题,§3讲解如何应用上述理论求解 KdV 方程的初值问题,§4在简单介绍这个方法的基本思想后转入讲解 AKNS 方程,§5讨论 AKNS 特征值问题的正散射与反散射问题,§6讨论如何应用反散射方法

①本章反散射方法为国家教育委员会科学基金支持项目。

求 AKNS 方程初值问题的解，§7 以 Toda 晶格方程为对象简单介绍离散特征值问题的反散射方法及 Toda 晶格方程初值问题的解，§8 以 K-P 方程为对象初步介绍空间二维的反散射方法，并引进了 $\bar{\partial}$(D. bare) 方法. 最后一节介绍这种方法近来发展情况.

§1 正散射问题

这一节将考虑直线上的 Schrödinger 方程的正散射问题，方程

$$Lf=-f''+q(x)f=\lambda f,\ \lambda=k^2, \tag{2-1-1}$$

$f'=\dfrac{df}{dx}$，$q(x)$是实函数.

当 $q(x)\equiv 0$ 时，方程(2-1-1)有两个基本解 e^{ikx}，e^{-ikx}，由傅里叶变换理论知，如果$f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$，作傅里叶变换

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}f(x)dx, \tag{2-1-2}$$

其傅里叶逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\hat{f}(k)dk. \tag{2-1-3}$$

变换关系可写成 δ 函数形式

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-y)}dk. \tag{2-1-4}$$

以下考虑当 $q(x)\not\equiv 0$ 时，方程(2-1-1)的基本解，它有下列性质.

1.1 Jost 解的性质

如果当$|x|\to\infty$时，$q(x)$很快趋于零，这时可以设想方程(2-1-1)有两个具有以下渐近性质的基本解

$$f_+(x,k)\sim e^{ikx},\quad x\to+\infty, \tag{2-1-5}$$

$$f_-(x,k)\sim e^{-ikx},\ x\to-\infty. \tag{2-1-6}$$

通常，物理上称这两个解为Jost解或Jost函数．由常微分方程的常数变易法，知这两个基本解等价于以下积分方程

$$f_+(x,k)=e^{ikx}-\int_x^\infty\frac{\sin k(x-s)}{k}q(s)f_+(s,k)ds, \tag{2-1-7}$$

$$f_-(x,k)=e^{-ikx}+\int_{-\infty}^x\frac{\sin k(x-s)}{k}q(s)f_-(s,k)ds, \tag{2-1-8}$$

如果令

$$m_+=e^{-ikx}f_+(x,k),\ m_-=e^{ikx}f_-(x,k), \tag{2-1-9}$$

则(2-1-7)、(2-1-8)可分别改写为

$$m_+(x,k)=1-\int_x^\infty\frac{1}{2ik}(1-e^{-2ik(x-s)})q(s)m_+(s,k)ds, \tag{2-1-10}$$

$$m_-(x,k)=1+\int_{-\infty}^x\frac{1}{2ik}(e^{2ik(x-s)}-1)q(s)m_-(s,k)ds. \tag{2-1-11}$$

为了讨论Jost解的性质，以下总假设

$$P_j(\infty)<\infty,\ P_j(x)=\int_{-\infty}^x|x^jq(x)|dx,\ j=0,1,2. \tag{2-1-12}$$

首先用逐次逼近法证明方程(2-1-11)当 $\mathrm{Im}k\geqslant0$ 时Jost解的存在性．由于

$$\left|\frac{1}{2ik}(e^{2ik(x-s)}-1)\right|\leqslant\frac{1}{|k|},\quad 当\ s<x,$$

解 m_- 可写成

$$m_-=\sum_{j=0}^\infty h_j(x,k), \tag{2-1-13}$$

其中

$$h_0=1,\ h_j(x,k)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{2ik}(e^{2ik(x-s)}-1)q(s)h_{j-1}(s,k)ds.$$

由归纳法可得以下估计式

$$|h_j|\leqslant\frac{1}{k}\int_{-\infty}^\infty|q(s)||h_{j-1}|ds\leqslant\frac{1}{k^j}\cdot\frac{1}{j!}P_0^j(x).$$

因此，当 $k\neq0$ 时，级数(2-1-13)绝对且一致收敛．这就证明了当

$x<a<\infty$, $\mathrm{Im}k\geqslant 0$, $k\neq 0$ 时解的存在性. 由于 $h_j(x, k)$ 是 k 的解析函数, 因此 $m_-(x, k)$ 也是 k 的解析函数, 而且 $m_-(x, k)$ 满足以下不等式

$$|m_-(x, k)|\leqslant e^{\frac{1}{k}P_0(x)}, \quad k\neq 0. \tag{2-1-14}$$

当 $k=0$ 时,

$$m_-(x, 0)=1+\int_{-\infty}^{x}(x-s)q(s)m_-(s, 0)ds. \tag{2-1-15}$$

令

$$m_-(x, 0)=\sum_{j=0}^{\infty}h_j(x), \tag{2-1-16}$$

其中 $$h_0(x)=1,\ h_j(x)=\int_{-\infty}^{x}(x-s)q(x)h_{j-1}(s)ds.$$

由归纳法知,

$$|h_j(x)|\leqslant\frac{1}{j!}(M(x))^j,$$

其中 $$M(x)=\int_{-\infty}^{x}(x-s)|q(s)|ds.$$

因此级数(2-1-16)也是绝对且一致收敛, 这就证明了当 $k=0$ 时方程(2-1-11)解的存在性.

进一步注意到

$$\left|\frac{1}{2ik}(e^{2ik(x-s)}-1)=\right|\int_0^{x-s}e^{ikv}dv\left|\leqslant x-s,\quad x-s>0,\ \mathrm{Im}k>0.\right. \tag{2-1-17}$$

用上述方法由(2-1-11)推得, 当 $\mathrm{Im}k\geqslant 0$, $k\neq 0$ 时,

$$|m_-(x, k)-1|\leqslant M(x)e^{M(x)}. \tag{2-1-18}$$

当 $x\to\infty$ 时, 这个界是指数增长的, 由这个等式只能推出当 $x\in(-\infty, a]$, $a<+\infty$, $m_-(x, k)$ 是一致有界, 但由此可推得 $m_-(x, k)$ 在 $\mathrm{Im}k>0$ 时解析, 而且连续到边界. 由(2-1-11)及不等式(2-1-17)可推得

$$|m_-(x,k)-1|\leqslant x\int_{-\infty}^{x}|q(s)||m_-(s,k)|ds$$

$$+\int_{-\infty}^{x}(-s)|q(s)||m_-(s,k)ds$$

$$\leqslant c_1x\int_{-\infty}^{x}(1+|s|)|q(s)|ds$$

$$+c_2\int_{-\infty}^{0}(-s)|q(s)|ds$$

$$\leqslant\begin{cases}c_3(1+x)\int_{-\infty}^{x}(1+|s|)|q(s)|ds, & x>0,\\ c_4\int_{-\infty}^{x}(-s)|q(s)|ds & x<0;\end{cases}$$

因此,

$$|m_-(x,k)-1|\leqslant c_5(1+\max(x,0))\int_{-\infty}^{x}(1+|s|)|q(s)|ds. \tag{2-1-19}$$

结合(2-1-19)及(2-1-14)得到 Jost 解的估计式

$$|m(x,k)-1|\leqslant\frac{c(1+\max(x,0))}{1+|k|}\int_{-\infty}^{x}(1+|s|)|q(s)|ds \tag{2-1-20}$$

以下证明(2-1-11)Jost 解的存在性. 设有两个解 m_-^1 及 m_-^2, 令 $m=m_-^1-m_-^2$, 则

$$m(x,k)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\sin k(x-s)}{k}q(s)m(s,k)ds.$$

令 $|m(x,k)|=f(x,k)$, $g(x,k)=\int_{-\infty}^{x}(x-s)|q(s)|f(s,k)ds$,

则 $f(x,k)\leqslant g(x,k),\quad \mathrm{Im}k\geqslant 0.$

$$g_x=\int_{-\infty}^{x}|q(s)|f(s,k)ds\leqslant g(x,k)\int_{-\infty}^{x}|q(s)|ds,$$

$$(g(x,s)e^{-\int_{-\infty}^{x}(x-s)|q(s)|ds})_x\leqslant 0,$$

$$g(x,\ s)\leqslant 0.$$

由此推出，$$f(x,\ k)=|m(x,\ k)|\equiv 0.$$

通过(2-1-11)可进一步得到Jost解 $m_-(x,\ k)$ 对 x 及 k 的导数的估计，令

$$\frac{dm_-}{dx}=m'_-,\qquad \frac{dm_-}{dk}=\dot{m}_-,\tag{2-1-21}$$

(2-1-11)式对 k 求导得

$$\dot{m}_-(x,\ k)=\int_{-\infty}^{x}\frac{d}{dk}\left(\frac{e^{2ik(x-s)}-1}{2ik}\right)q(s)m_-(s,\ k)ds+\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{2ik(x-s)}-1}{2ik}q(s)\dot{m}(s,\ k)ds.$$

因为 $$\left|\frac{d}{dk}\left(\frac{e^{2ik(x-s)}-1}{2ik}\right)\right|\leqslant(x-s)^2,\ s\leqslant x,$$

再由(2-1-20)及不等式

$$\int_{-\infty}^{x}|q(s)|(s-x)^2|m_-(s,\ k)|ds\leqslant c_5(1+x\max(x,\ 0))$$

可估得

$$|\dot{m}(x,\ k)|\leqslant c_5(1+x\max(x,\ 0))+\int_{-\infty}^{x}(x-s)|q(s)||\dot{m}(s,\ k)|ds,$$

再对上式用迭代法可估得

$$|\dot{m}_-(x,\ k)|\leqslant c(1+x\max(x,\ 0)).\tag{2-1-22}$$

类似方法可得

$$|m'_-(x,\ k)|\leqslant\frac{c}{1+|k|}.\tag{2-1-23}$$

利用(2-1-10)可得到对 $m_+(x,\ k)$ 类似估计，综合以上结果可得以下命题.

命题1 在条件(2-1-12)下，方程(2-1-10)与(2-1-11)(或方程(2-1-7)与(2-1-8))，当 $\mathrm{Im}k\geqslant 0$ 时，Jost解存在且唯一；当 $\mathrm{Im}k>0$ 时，它是关于 k 的解析函数，且在 $\mathrm{Im}k\geqslant 0$ 时是 k 的连续函数，对 $m_-(x,\ k)$ 有估计式(2-1-20)、(2-1-22)及(2-1-23)，对

$m_+(x, k)$有估计式

$$|m_+(x, k)-1|\leqslant\frac{c(1+\max(-x, 0))}{1+|k|}\int_x^{\infty}(1+|s|)|q(s)|ds, \tag{2-1-20}_+$$

$$|\dot{m}_-(x, k)|\leqslant c(1-x\max(-x, 0)), \tag{2-1-22}_+$$

$$|m'_+(x, k)|\leqslant\frac{c}{1+|k|}. \tag{2-1-23}$$

注意：(1) 由以上结果可推得，$f_+(x, k)$，$f_-(x, k)$对x及k的导数的渐近式等于其渐近式对x及k的导数，即

$$\begin{cases} f_+(x, k)\sim e^{ikx},\ x\to+\infty;\ f_-(x, k)\sim e^{-ikx}, & x\to-\infty,\\ f'_+(x, k)\sim ike^{ikx},\ x\to+\infty;\ f'_-(x, k)\sim -ike^{-ikx}, & x\to-\infty,\\ \dot{f}_+(x, k)\sim ixe^{ikx},\ x\to+\infty;\ \dot{f}_-(x, k)\sim -ixe^{-ikx}, & x\to-\infty. \end{cases} \tag{2-1-24}$$

(2) 若$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\varepsilon|x|}|q(x)|dx<\infty$，$\varepsilon>0$，则 Jost 解 $f_+(x, k)$，$f_-(x, k)$可解析开拓到$\text{Im}k<\varepsilon$．通常称$|\text{Im}k|\leqslant\varepsilon$为Bergman带，特别当$q(x)$为紧函数时，Jost 解可解析开拓到$k$的全平面．

(3) 若记$f_\pm(x, k)$的共轭为$\overline{f_\pm(x, k)}$，k的共轭为$\bar{k}$，则由积分方程(2-1-7)、(2-1-8)的解的唯一性可得

$$\overline{f_\pm(x, k)}=f_\pm(x, -k).$$

1.2 S矩阵及其性质

由于$f_\pm(x, k)$当$\text{Im}k\geqslant0$时有意义．故当$\text{Im}k\leqslant0$时$f_\pm(x, -k)$有意义．特别当$\text{Im}k=0$时，由上述(3)知$\overline{f_\pm(x, k)}=f_\pm(x, -k)$．由$f_+(x, k)\sim e^{ikx}$，$f'_+(x, -k)\sim -ike^{-ikx}$，$x\to+\infty$，故有

$$\begin{aligned} W[f_+(x, k), f_+(x, -k)] &\equiv f'_+(x, k)f_+(x, -k)\\ &\quad-f'_+(x, -k)f_+(x, k)]\\ &=2ik. \end{aligned} \tag{2-1-25}$$

因此当$\text{Im}k=0$，$k\neq0$时，$f_+(x, k)$，$f_+(x, -k)$是线性无关的解．令

$$f_-(x,k)=a_+(k)f_+(x,-k)+b_+(k)f_+(x,k), \quad (2\text{-}1\text{-}26)$$

或写成

$$T_+(k)f_-(x,k)=f_+(x,-k)+R_+(k)f_+(x,k), \quad (2\text{-}1\text{-}27)$$

其中

$$T_+(k)=\frac{1}{a_+(k)},\ R_+(k)=\frac{b_+(k)}{a_+(k)}. \quad (2\text{-}1\text{-}28)$$

$T_+(k)$, $R_+(k)$称为散射系数，物理上称$T_+(k)$为穿透系数(Transmission Coefficient)，$R_+(k)$为反射系数(Reflection Coefficient)．以下要进一步讨论散射数据的性质.

从(2-1-25)、(2-1-26)可推得

$$\begin{cases} 2ika_+(k)=W[f_+(x,k),f_-(x,k)], \\ 2ikb_+(k)=W[f_-(x,k),f_+(x,-k)]. \end{cases} \quad (2\text{-}1\text{-}29)$$

由于$f_\pm(x,k)$在k的上半平面解析，由(2-1-29)第一式推得，当$k\neq 0$时$a_+(k)$也是k的上半平面的解析函数．当k为实数时，由$T_+(k)$, $R_+(k)$的定义推出

$$\overline{T_+(k)}=T_+(-k), \qquad \overline{R_+(k)}=R(-k). \quad (2\text{-}1\text{-}30)$$

令$f_+=f_+(x,k)$, $f_-=f_-(x,k)$及关系式(设k为实数)

$$W[f_+,f_-]W[\bar f_+,\bar f_-]=\begin{vmatrix} W[f_+,\bar f_+] & W[f_+,\bar f_-] \\ W[f_-,\bar f_+] & W[f_-,\bar f_-] \end{vmatrix},$$

得

$$\frac{1}{|T_+(k)|^2}=\frac{1}{T_+(k)}\frac{1}{T_+(-k)}=\frac{1}{4k^2}W[f_+,f_-]W[\bar f_+,\bar f_-]$$

$$=1-\frac{1}{4k^2}W[f_-,\bar f_+]W[f_+,\bar f_-]$$

$$=1+\frac{|R_+(k)|^2}{|T_+(k)|^2},$$

由此推得

$$|T_+(k)|^2+|R_+(k)|^2=1. \quad (2\text{-}1\text{-}31)$$

以下进一步讨论$k\to\infty$, $k\to 0$时散射系数的性质，为此在(2-1-11)中令$x\to+\infty$，得

$$m_-(x,k)\sim 1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)m_-(s,k)ds$$
$$+e^{2ikx}\left(\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2iks}q(s)m_-(s,k)ds\right).$$

将(2-1-26)改写成

$$m_-(x,k)=\frac{1}{T_+(k)}m_+(x,-k)+\frac{R_+(k)}{T_+(k)}e^{2ikx}m_+(x,k),$$

再令 $x\to\infty$ 得

$$m_-(x,k)\sim\frac{1}{T_+(k)}+\frac{R_+(k)}{T_+(k)}e^{2ikx}.$$

由此推得

$$a_+(k)\equiv\frac{1}{T_T(k)}=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)m_-(s,k)ds, \tag{2-1-32}$$

$$b_+(k)\equiv\frac{R_+(k)}{T_+(k)}=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2iks}q(s)m_-(s,k)ds. \tag{2-1-33}$$

用命题 1, 对 $m_-(x,k)$的估计立即得

$$a_+(k)=1-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)ds+o\left(\frac{1}{k^2}\right),\ \mathrm{Im}k\geqslant 0,\ |k|\to\infty, \tag{2-1-34}$$

$$b_+(k)=\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)e_-^{2iks}ds+o\left(\frac{1}{k^2}\right),\ \mathrm{Im}k\geqslant 0,\ |k|\to\infty. \tag{2-1-35}$$

令

$$\gamma=\int_{-\infty}^{\infty}q(s)m_-(s,0)ds, \tag{2-1-36}$$

则 $$a_+(k)=1-\frac{\gamma}{2ik}-\frac{1}{2ik}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)[m_-(s,k)-m_-(s,0)]ds.$$

由(2-1-22)可知，当 $k\to 0$ 时，上式最后一项极限存在，故当 $\gamma=0$ 时，$\lim\limits_{k\to 0}a_+(k)=$常数; 当 $\gamma\neq 0$ 时，

$$T_+(k)=\frac{1}{a_+(k)}=k\times(\text{常数})+o(1), \tag{2-1-37}$$

而且由关系式

$$\frac{1+R_+(k)}{T_+(k)}=1+\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\frac{e^{-2iks}-1}{2ik}m_-(s,\ k)ds$$

$$=1-\int_{-\infty}^{\infty}q(s)sm_-(s,\ k)ds+o(1),\ k\to 0,$$

因此,

$$1+R_+(k)=k\times(\text{常数})+o(1),\ k\to 0. \tag{2-1-38}$$

以下讨论 $a_+(k)$ 的零点,若 $\mathrm{Im}k>0$,使 $a_+(k)=0$,即

$$W[f_+(x,\ k),\ f_-(x,\ k)]=0,$$

因而 $f_+(x,\ k)$, $f_-(x,\ k)$ 线性相关. 记

$$f_-(x,\ k)=bf_+(x,\ k), \tag{2-1-39}$$

所以这个解当 $|x|\to\infty$ 时以指数趋于零, 我们称这个 k 为方程 (2-1-1) 的特征值. 这个 k 只能对应于实的 λ, 因为若 λ 为复数, 则

$$-f''+qf=\lambda f,$$

$$-\bar{f}''+q\bar{f}=\bar{\lambda}\bar{f},$$

由此推出 $\frac{d}{dx}(-f'\bar{f}+\bar{f}'f)=(\lambda-\bar{\lambda})f\bar{f}$. 由于当 $|x|\to\infty$ 时 f 很快趋于零, 因此 $\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\bar{\lambda})|f|^2dx=0$, 这只能 $\lambda=\bar{\lambda}$. 由于 $\lambda>0$ 时, f 不能趋于零, 故只能 $\lambda\leqslant 0$, 而 $\lambda=0$ 时有一个解 $f_-(x,\ 0)\sim 1$ (当 $x\to-\infty$), 另一个线性无关解 $f_1=f\int\frac{c}{f^2}dx\to x$ (当 $x\to-\infty$), 因此, $\lambda=0$ 不是特征值, 即特征值只能分布在 $\lambda<0$ 的实轴上, 也就是特征值只能在 k 平面的虚轴上. 由于在 $\mathrm{Im}k>0$ 上, $a_+(k)$ 解析, 且 $a_+(k)\sim 1$, $|k|\to\infty$, 因此 $a(k)$ 在 $\mathrm{Im}k>0$ 上只能有有限多个零点, 记为 ik_j, $k_j>0$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 以下证明 ik_j 只能是 $a_+(k)$ 的单重零点. 由

$$-f''_-+q(x)f_-=k^2f_-$$

得

$$-\dot{f}''_-+q(x)\dot{f}_-=2kf_-+k^2\dot{f}_-.$$

又因 $$-f''_+ + q(x)f_+ = k^2 f_+,$$

由此得 $$W[f_+, \dot{f}_-]^x_{-l} = \int_{-l}^{x} 2kf_+f_-dx.$$

同理有 $$W[f_-, \dot{f}_+]_x^l = \int_x^l 2kf_+f_-dx.$$

先令 $k=ik_j$, 再令 $l\to\infty$, 得

$$\{W[f_+, \dot{f}_-]+W[\dot{f}_+, f_-]\}_{k=ik_j}=\int_{-\infty}^{\infty} 2ik_jf_+(x, ik_j)f_-(x, ik_j)dx.$$

因为
$$\begin{aligned}\frac{d}{dk}\{2ika_+(k)\}\Big|_{k=ik_j} &= \frac{d}{dk}W[f_+, f_-]\Big|_{k=ik_j}\\ &=\{W[f_+, \dot{f}_-]+W[\dot{f}_+, f_-]\}_{k=ik_j}\\ &=\int_{-\infty}^{\infty} 2ik_jb_jf_+^2(x, ik_j)dx\\ &=\{2ik\dot{a}_+(k)+2ia_+(k)\}\big|_{k=ik_j}\\ &=-2k_j\dot{a}_+(ik_j),\end{aligned}$$

所以

$$\dot{a}_+(ik_j) = -ib_j\int_{-\infty}^{\infty} f_+^2(x, ik_j)dx. \tag{2-1-40}$$

由于 $f_+(x, ik_j)$ 是实函数, 故 $\dot{a}_+(ik_j)\neq 0$.

定义 $C_j^2=\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_+^2(x, ik_j)dx\right]^{-1}=\dfrac{-ib_j}{\dot{a}_+(ik_j)}$ 为归一化因子.

若令

$$f_+(x, k)=a_-(k)f_-(x, -k)+b_-(k)f_-(x, k), \tag{2-1-41}$$

则有

$$\begin{cases} 2ika_-(k)=W[f_+(x, k), f_-(x, k)], \\ 2ikb_-(k)=W[f_-(x, k), f_+(x, k)]. \end{cases} \tag{2-1-42}$$

令

$$T_-(k)=\frac{1}{a_-(k)}, \qquad R_-(k)=\frac{b_-(k)}{a_-(k)}, \tag{2-1-43}$$

则 $R_-(k)$, $T_-(k)$ 具有与 $R_+(k)$, $T_+(k)$ 类似性质, 通常物理上称

$$S(k)=\begin{pmatrix} T_+(k) & R_-(k) \\ R_+(k) & T_-(k) \end{pmatrix} \tag{2-1-44}$$

为散射矩阵. 归纳上述结果得以下命题.

命题 2　S 矩阵在全实轴上连续且有以下性质:

(i) 对称性:

$$T_+(k)=T_-(k)=T(k)=\frac{1}{a(k)}=\frac{1}{a_+(k)}=\frac{1}{a_-(k)},\quad \mathrm{Im}k=0, \tag{2-1-45}$$

(ii) 实性:

$$T(k)=\overline{T(-k)},\ R_\pm(k)=\overline{R_\pm(-k)},\ \mathrm{Im}k=0, \tag{2-1-46}$$

(iii) 么正性:

$$T(k)R_-(-k)+T(-k)R_+(k)=0. \tag{2-1-47}$$

$$|T(k)|^2+|(R_-(k)|^2=|T(k)|^2+|R_+(k)|^2=1. \tag{2-1-48}$$

(iv) 渐近性: 当 $\mathrm{Im}k\geqslant 0$,

当 $\gamma\neq 0$ 时,

$$\begin{cases} T(k)=k\times(\text{常数})+o(1),\ |k|\to 0, \\ R_\pm(k)+1=k\times(\text{常数})+o(1),\ |k|\to 0; \end{cases} \tag{2-1-49}$$

当 $\gamma=0$ 时,

$$T(k)>\text{常数}>0,\ |R_\pm(k)|<1. \tag{2-1-50}$$

当 $|k|\to\infty$ 时,

$$\begin{cases} T(k)=1+o\left(\dfrac{1}{k}\right), \\ R_\pm(k)=o\left(\dfrac{1}{k}\right). \end{cases} \tag{2-1-51}$$

(v) 解析性: $T(k)$ 在上半平面解析, 且连续直达边界, $T(k)$ 在正实轴上有有限个单重极点 ik_j, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ (设 $k_1>k_2>\cdots>k_n>0$), 其对应特征函数的归一化因子

$$C_j^2=\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_+^2(x,\ ik_j)dx\right]^{-1}=\frac{-ib_j}{\dot a(ik_j)}. \tag{2-1-52}$$

由于 S 矩阵的各元素与特征值之间还存在进一步的关系，我们将证明以下命题.

命题 3

$$T(k)=\begin{cases}\left[\exp\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\log(1-|R_+(\omega)|^2)}{\omega-k}d\omega\right\}\right]\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\dfrac{k+ik_j}{k-ik_j}, & \mathrm{Im}\,k>0,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}T(k+i\varepsilon), & \mathrm{Im}\,k=0.\end{cases}\tag{2-1-53}$$

证明 设 $T(0)\neq0$，令 $h(k)=T(k)\prod\limits_{j=1}^{n}\dfrac{k-ik_j}{k+ik_j}$，

$h(k)$ 在 $\mathrm{Im}(k)>0$ 解析，$|h(k)|\to1$，$|k|\to\infty$，

$\log h(k)$ 在 $\mathrm{Im}(k)>0$ 解析，$\log h(k)\to0$，$|k|\to\infty$.

由勾西公式，当 k 在上半平面时，

$$\log h(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\log h(\omega)}{\omega-k}d\omega,$$

C 是迴路，它由以原点为心，r 为半径经过 ω 上半平面的大圆 C 及实轴线 $[-r, r]$ 组成，且包含点 k 在内. 由约当引理知，

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{\log h(\omega)}{\omega-k}d\omega=0.$$

由此得到，

$$\log h(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log h(\omega)}{\omega-k}d\omega.\tag{2-1-54}$$

同理，有

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log h(\omega)}{\omega-\bar{k}}d\omega$$

或

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log h(\omega)}{\omega-k}d\omega.\tag{2-1-55}$$

因为 $\log|h(k)|^2=\log|T(k)|^2=\log(1-|R_+(k)|^2)$，(2-1-54)减去(2-1-55)，即得

$$\log h(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log(1-|R_+(\omega)|^2)}{\omega-k}d\omega.$$

由此即得(2-1-53)第一式，当 k 从上半平面趋于实轴，(2-1-53)中的积分要理解为勾西取主值. 若 $T(0)=0$，上述积分中在 $k=0$ 附近也理解为勾西取主值.

1.3 例子

例 1

$$q(x)=2a^2\operatorname{sech}^2 ax. \tag{2-1-56}$$

容易验证，

$$f_+(x,k)=\frac{1}{ik-a}(ik-a\operatorname{th}ax)e^{ikx}\sim e^{ikx},\ x\to\infty.$$

$$f_-(x,k)=\frac{1}{ik-a}(ik+a\operatorname{th}ax)e^{-ikx}\sim e^{-ikx},\ x\to-\infty. \tag{2-1-57}$$

从(2-1-26)和(2-1-28)容易算得

$$R_\pm(k)=0,\ T_+(k)=T_-(k)=\frac{ik-a}{ik+a}=T(k). \tag{2-1-58}$$

$T(k)$ 只有一个单重极点 $k=ia$，这个特征值对应的特征函数

$$f_+(x,ia)=f_-(x,ia)=\frac{1}{2}\operatorname{sech}ax,\ b=1, \tag{2-1-59}$$

$$C^2=\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_+^2(x,ia)dx\right]^{-1}=2a=\frac{-i}{\dot a_+(ia)}. \tag{2-1-60}$$

例 2

$$q(x)=-\beta\delta(x),\ \beta>0. \tag{2-1-61}$$

容易求得

$$f_+(x,k)=\begin{cases}e^{ikx},\ x>0,\\ \left(1-\dfrac{i\beta}{2k}\right)e^{ikx}+\dfrac{i\beta}{2k}e^{-ikx},\ x<0,\end{cases} \tag{2-1-62}$$

$$f_-(x,k)=\begin{cases}e^{-ikx},\ x<0,\\ \left(1-\dfrac{i\beta}{2k}\right)e^{-ikx}+\dfrac{i\beta}{2k}e^{ikx},\ x>0.\end{cases} \tag{2-1-63}$$

从(2-1-26)和(2-1-41)算得

$$R_+(k)=\frac{i\beta}{2k-i\beta},\ R_-(k)=\frac{i\beta}{2k-i\beta},$$

$$T_+(k)=T_-(k)=T(k)=\frac{2k}{2k-i\beta}. \qquad (2-1-64)$$

$T(k)$有唯一的单重极点 $k=\frac{i\beta}{2}$，这个特征值对应的特征函数

$$f_+\left(x,\ \frac{i\beta}{2}\right)=f_-\left(x,\ \frac{i\beta}{2}\right)=\begin{cases}e^{-\frac{\beta}{2}x},x>0,\\ e^{\frac{\beta}{2}x},x<0,\end{cases}\quad (b_1=1)\ (2-1-65)$$

$$C^2=\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_+^2\left(x,\ \frac{i\beta}{2}\right)dx\right]^{-1}=\frac{\beta}{2}=\frac{-i}{\dot{a}_+\left(\frac{i\beta}{2}\right)}. \qquad (2-1-66)$$

作为这一节的结束，我们定义散射数据如下：

$$ST:\{R_+(k),\ \mathrm{Im}k=0,\ ik_j,C_j^2,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}. \qquad (2-1-67)$$

给定 Schrödinger 方程的位势 $q(x)$，可求得散射数据 ST. 下一节将讨论如何在给定散射数据 ST 后求位势 $q(x)$，这就是反散射问题。

§2 反散射问题

2.1 平移变换

在 n 维空间中的一组基可通过上三角矩阵变换到另一组基，对 Schrödinger 方程 $q(x)\equiv 0$ 时的基本解 e^{ikx}，可看为无穷维空间的基，而 $q(x)\neq 0$ 时的 Jost 解$f_+(x,\ k)$是另一组基，设想这两组基可以通过伏德拉积分算子联系起来，即

$$f_+(x,\ k)=e^{ikx}+\int_x^{\infty}K(x,\ s)e^{iks}ds. \qquad (2-2-1)$$

为了证明积分核 $K(x,\ s)$的存在性，改写(2-2-1)为

$$f_+(x,\ k)e^{-ikx}=1+\int_x^{\infty}K(x,\ s)e^{ik(s-x)}ds.$$

令 $s-x=2y$，$s\geqslant x$，$y\geqslant 0$，则

$$m_+(x,k)=1+\int_0^\infty 2K(x,x+2y)e^{2iky}dy$$
$$=1+\int_0^\infty B(x,y)e^{2iky}dy, \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$
$$B(x,y)=2K(x,x+2y). \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

将(2-2-2)代入(2-1-10)，得

$$\int_0^\infty B(x,y)e^{2iky}dy=\int_x^\infty \frac{1}{2ik}(e^{2ik(s-x)}-1)q(s)ds+$$
$$+\int_x^\infty \frac{1}{2ik}(e^{2ik(s-x)}-1)q(s)ds\int_0^\infty B(s,z)e^{2ikz}dz$$
$$=J_1+J_2.$$

变换积分次序得

$$J_1=\int_0^\infty e^{2iky}\left[\int_{x+y}^\infty q(s)ds\right]dy,$$
$$J_2=\int_0^\infty dz\int_x^\infty ds\int_z^{s-x+z}e^{2iky}q(s)B(s,z)dz$$
$$=\int_0^\infty dz\int_z^\infty e^{2iky}dy\int_{x+y-z}^\infty q(s)B(s,z)dz$$
$$=\int_0^\infty e^{2iky}dy\left[\int_0^y dz\int_{x+y-z}^\infty q(s)B(s,z)dz\right],$$

由傅里叶变换的唯一性得

$$B(x,y)=\int_{x+y}^\infty q(s)ds+\int_0^y dz\int_{x+y-z}^\infty q(s)B(s,z)dz. \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

命题 1 当 $y\geqslant 0$，积分方程(2-2-4)的解 $B(x,y)$ 存在且唯一，并且有

$$|B(x,y)|\leqslant e^{\nu(x)}\eta(x+y), \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

其中

$$\eta(x)=\int_x^\infty |q(s)|ds,\ \nu(x)=\int_x^\infty (s-x)|q(s)|ds, \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

还有

$$\frac{\partial}{\partial x}B(x,y)\bigg|_{y=0}=-q(x), \qquad (2\text{-}2\text{-}7)$$

或
$$\frac{d}{dx}K(x,x) = -\frac{1}{2}q(x).$$

证明 用逐次逼近法，令

$$B(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(x, y), \tag{2-2-8}$$

$$B_0(x, y) = \int_{x+y}^{\infty} q(s)ds, \ B_n(x, y) = \int_0^y dz \int_{x+y-z}^{\infty} q(s)B_{n-1}(s, y)ds. \tag{2-2-9}$$

用归纳法可以证明

$$|B_n(x, y)| \leqslant \frac{\nu^n(x)}{n!} \ \eta(x+y), \quad n \geqslant 0.$$

由这个估计式推得级数(2-2-8)绝对且一致收敛，这就证明了解的存在性。唯一性的证法与证明方程(2-1-11)的唯一性类似(读者可自行证明)，由级数(2-2-8)即得不等式(2-2-5)。等式(2-2-7)的证明可直接对(2-2-4)求导即得.

注意：用类似的方法可以证明存在核函数 $K_1(x, t)$，使得

$$f_-(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} K_1(x, s)e^{-iks}ds, \ K_1(x, s) = 0, \ s > x. \tag{2-2-10}$$

2.2 Гельфанд-Левиган-Марченко 积分方程(Γ-L-M 方程)

以下建立反散射问题的基本方程.

命题 2 给定(2-1-67)的散射数据 ST，则 $K(x, y)$ 满足 Γ-L-M 方程

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} K(x, s)F(s+y)ds = 0, \ y \geqslant x, \tag{2-2-11}$$

其中

$$\begin{cases} F(x) = F_c(x) + F_d(x), \\ F_c(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_+(k)e^{ikx}dk, \ F_d(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_j^2 e^{-k_j x}. \end{cases} \tag{2-2-12}$$

证明 改写(2-1-27)式为

$$(T(k)-1)f_-(x,\ k)=R_+(k)(f_+(x,\ k)-e^{ikx})+R_+(k)e^{ikx}$$
$$+(f_+(x,\ -k)-e^{-ikx})$$
$$+(e^{-ikx}-f_-(x,\ k))$$

由上节命题1知 $T(k)-1,\ R_+(k),\ f_+(x,\ k)-e^{ikx},\ e^{-ikx}-f_-(x,\ k)$ 对变量 k 是平方可积的函数. 当 $y\geqslant x$ 时, 对上式作傅里叶变换

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(T(k)-1)f_-(x,\ k)e^{iky}dk$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_+(k)(f_+(x,\ k)-e^{ikx})e^{iky}dk$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_+(k)e^{ik(x+y)}dk$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f_+(x,\ -k)-e^{-ikx})e^{iky}dk$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-ikx}-f_-(x,\ k))e^{iky}dk.$$

上式右边最后一项等于 $K_1(x,\ y)$, 右边第一项由卷积公式等于

$$\int_x^{\infty}F_c(x+s)K(x,\ s)ds,$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(T(k)-1)f_-(x,\ k)e^{iky}dk$$
$$=\int_x^{\infty}F_c(x+s)K(x,\ s)ds+F_c(x+y)+K(x,\ y).$$

等式右边可改写成迴路积分形式, 其迴路通过 k 的上半平面包含所有特征值. 由 $T(k)-1$ 的渐近式及约当引理知

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}(T(k)-1)f_-(x,\ k)e^{iky}dk=0,$$

故得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(T(k)-1)f_-(x,\ k)e^{iky}dy$$

$$=\frac{i}{2\pi i}\int_c (T(k)-1)f_-(x,k)e^{iky}dy$$

$$=i\mathrm{Res}[(T(k)-1)f_-(x,k)e^{iky}]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{\dot a(ik_j)}f_-(x,ik_j)e^{-k_jy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{ib_j}{\dot a(ik_j)}f_+(x,ik_j)e^{-k_jy}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{ib_j}{\dot a(ik_j)}e^{-k_j(x+y)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{ib_j}{\dot a(ik_j)}\int_x^\infty K(x,s)e^{-k_j(y+s)}ds$$

$$=-F_d(x+y)-\int_x^\infty K(x,s)F_d(s+y)ds.$$

将左边式移到右边，即得基本积分方程(2-2-11)

命题3 对任意 x，积分方程(2-2-11)的平方可积的解必存在且唯一.

证明 根据积分方程理论知道，只要证明其齐次方程只有零解即可. 为简单起见，写齐次方程如下：

$$h(y)+\int_x^\infty F(y+s)h(s)ds=0. \tag{2-2-13}$$

今证其实的解 $h(y)$ 必恒为零. 可改写上述方程为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty h^2(y)dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty R_+(k)\left[\int_x^\infty h(s)e^{iks}ds\int_x^\infty h(y)e^{iky}dy\right]dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n}C_j^2\left[\int_x^\infty h(s)e^{-k_js}ds\right]^2=0.$$

令

$$\varphi(h)=\int_x^\infty h(s)e^{iks}ds, \tag{2-2-14}$$

函数 $\varphi(k)$ 是 k 在 $\mathrm{Im}k>0$ 的解析函数，且连续到达边界，由傅里叶变换知，上式可改写为

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(k)\varphi(-k)dk+\int_{-\infty}^\infty R_+(k)\varphi(k)\varphi(h)dk$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} C_j^2\varphi^2(ik_j)=0. \qquad (2\text{-}2\text{-}15)$$

令

$$\psi_1=\varphi(-k)+R_+(k)\varphi(k), \quad \psi_2=\varphi(h)\sqrt{1-|R_+(k)|^2}, \qquad (2\text{-}2\text{-}16)$$

由关系式

$$|\psi_2(h)|^2+|\psi_1(h)|^2=2\varphi(h)\varphi(-h)+2R(k)\varphi(-k)\varphi(h),$$

则(2-2-15)可改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}(|\psi_1|^2+|\psi_2|^2)dk+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}C_j^2\varphi^2(ik_j)=0.$$

由于 $\varphi(ik_j)$ 是实函数，故推出 $\psi_1\equiv\psi_2\equiv0$.

因为 $|k|\to\infty$ 时，$T(k)=1+o\left(\frac{1}{k}\right)$，故 k 充分大时

$$|T(k)|=\sqrt{1-|R_+(k)|^2}$$

不等于零，因此由(2-2-16)推出 $\varphi(h)\equiv0$. 由此推出 $h(x)\equiv0$

以下考虑两个例子.

例 1 $\quad ST:\{R_+(k)=0,\ ik_1=ia,\ c_1^2=2a\}$.

$$F(x)=F_d(x)+F_c(x)=2ae^{-ax},$$

Γ-L-M 方程为

$$K(x,y)+\int_x^{\infty}K(x,s)e^{-a(s+y)}ds+2ae^{-a(x+y)}=0.$$

令 $K(x,y)=\varphi(x)e^{-ay}$，则

$$\varphi(x)+2ae^{-ax}+2a\varphi(x)\int_x^{\infty}e^{-2as}ds=0,$$

解得

$$\varphi(x)=\frac{-2ae^{-ax}}{1+e^{-2ax}}, \quad K(x,x)=\frac{-2a}{e^{2ax}+1},$$

$$q(x)=-\frac{d}{dx}K(x,x)=-2a^2\operatorname{sech}^2 ax.$$

这个结果与本章 1.3 段中例 1 结果相一致。

例 2 $R_+(k)=\frac{i\beta}{2k-i\beta},\quad k_1=i\frac{\beta}{2},\ C_1^2=\frac{\beta}{2},$

$$F_c(x)=\begin{cases}-\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}x}, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad F_d=\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}x},$$

所以 $x>0$ 时，$F(x)=0$，因此，$K(x,y)\equiv0$.

$x<0$ 时，$F(x)=\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}x}$.

Γ-L-M 方程为

$$K(x,y)+\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}(x+y)}+\int_x^{-y}K(x,s)\frac{\beta}{2}e^{-\frac{\beta}{2}(s+y)}ds=0,$$

由此解出
$$K(x,y)\equiv-\frac{\beta}{2},$$

$$q(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,x)=-\beta\delta(x),$$

这结果与本章 1.3 段中的例 2 结果一致.

§ 3 KdV 方程初值问题的解

这一节将考虑 KdV 方程初值问题的解. 设函数 $q=q(x,t)$，令 $q_t=\frac{\partial q}{\partial t},\quad q_x=\frac{\partial q}{\partial x}$，KdV 方程为

$$q_t-6qq_x+q_{xxx}=0,\quad -\infty<x<\infty,\tag{2-3-1}$$

初值

$$q|_{t=0}=q(x).\tag{2-3-2}$$

以下假定 $q(x,t)$ 对所有 $t\geqslant0$ 满足条件(2-1-12)，设想 KdV 方程的解 $q(x,t)$ 作为 Schrödinger 方程(2-1-1)的位势时，其散射数据 $R(k,t)$，ik_j，$C_j^2(t)$ 将是 t 的函数. 我们将讨论这散射数据的变化规律.

3.1 散射数据随时间的变化规律

设

$$-\varphi_{xx}+q(x,\ t)\varphi=\lambda\varphi, \tag{2-3-3}$$

即
$$q(x,\ t)=\lambda+\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}.$$

对上式进行直接而冗长的计算可得引理.

引理 设 $q(x,\ t)$, $\varphi(x,\ t)$ 满足(2-3-3), 则

$$(q_t-6qq_x+q_{xxx})\varphi^2=\lambda_t\varphi^2+(\varphi R_x-\varphi_x R)_x, \tag{2-3-4}$$

其中

$$R=\varphi_t+\varphi_{xxx}-3(q+\lambda)\varphi_x. \tag{2-3-5}$$

命题 (G. G. K. M 定理) 设 $q(x,\ t)$是 KdV 方程(2-3-1)的解, 而且$q(x,\ t)$是Schrödinger 方程 (2-1-1)的位势, 其散射数据为 $R_+(x,\ t)$, $ik_j(t)$, $c_j^2(t)$, 则散射数据满足以下方程,

$$\frac{dk_j}{dt}=0, \tag{2-3-6}$$

$$\frac{dc_j^2}{dt}=8k_j^3c_j^2, \tag{2-3-7}$$

$$\frac{dR_+}{dt}=8ik^3R_+. \tag{2-3-8}$$

证明 由(2-3-4)得

$$\lambda_t\varphi^2+(\varphi R_x-\varphi_x R)_x=0, \tag{2-3-9}$$

若 $\lambda=\lambda_n$ 是特征值, 对应特征函数 $\varphi=\varphi_n$, 由命题知当$|x|\to\infty$时, φ_n 及其对 t, x 的各阶导数趋于零, 由此得到

$$\lambda_{nt}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2dx=-(\varphi_n R_{nx}-\varphi_{nx}R_n)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0,$$

因此, $\lambda_{nt}=0$, 即得(2-3-6)式.

由 $\lambda_{nt}=0$ 得 $\varphi_n R_{nx}-\varphi_{nx}R_n=c_2$(常数), 因此

$$R_n = c_2\varphi_n\int^x \varphi_n^{-2}dx + c_1\varphi_n,\quad c_1 \text{ 为常数.}$$

由此得

$$\varphi_{nt} + \varphi_{nxxx} - 3(q+\lambda_n)\varphi_{nx} = c_2\varphi_n\int^x \varphi_n^{-2}dx + c_1\varphi_n. \qquad (2\text{-}3\text{-}10)$$

由于 φ_n 以指数趋于零，当 $|x|\to\infty$，故 $\varphi_n\int^x \varphi_n^{-2}\,dx$ 以指数趋于 ∞，当 $|x|\to\infty$. 但 R_n 当 $|x|\to\infty$ 时以指数趋于零，故 $c_2\equiv 0$，再将(2-3-10)改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\varphi_n^2}{2}\right)_t dx + \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_n\varphi_{nxx} - 2\varphi_{nx}^2 - 3\lambda_n^2)_x dx = c_1\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2 dx.$$

若取 φ_n 为归一化的特征函数，上式左边为零，故 $c_1\equiv 0$，因此 $\varphi_{nt} + \varphi_{nxxx} - 3(q+\lambda_n)\varphi_{nx} = 0$. 当 $x\to\infty$ 时，归一化的特征函数 φ_n 的渐近式为 $\varphi_n \sim C_n(t)e^{-k_n x}$. 由于 φ_n 导数的渐近式等于其渐近式的导数，故得

$$(C_{nt} - k_n^3 C_n - 3k_n^3 C_n)e^{-k_n x} = 0,$$

即 $$\frac{dc_n}{dt} - 4k_n^3 c_n = 0,\quad \text{这就证明了(2-3-7)式.}$$

又因 $\lambda>0$ 是连续谱，故 $\frac{d\lambda}{dt}=0$，因此 $\lambda>0$ 时，

$$\varphi_t + \varphi_{xxx} - 3(q+\lambda)\varphi_x = c_2\varphi\int_{-\infty}^{x}\varphi^{-2}dx + c_1\varphi,$$

取 $\varphi = Tf_-$，令 $x\to-\infty$，得

$$(T_t + ik^3T + 3ik^3T)e^{-ikx} = \left(\frac{C_2}{T}\int_{-\infty}^{x} e^{2ikx}dx + c_1T\right)e^{-ikx}.$$

由此推出 $c_2\equiv 0$，而且 $T + (4ik^3 - c_1)T = 0$. 再令 $x\to+\infty$，由于 $\varphi = Tf_- \sim e^{-ikx} + R_+e^{ikx}$，从而得到

$$R_{+t}e^{ikx}+(ik^3e^{-ikx}-R_+ik^3e^{ikx})+3ik^3e^{-ikx}$$
$$-3ik^3R_+e^{ikx}=c_1(e^{-ikx}+R_+e^{ikx}),$$

比较等式两边得

$$c_1=4ik^3,\ R_{+t}-4ik^3R_+=c_1R_+.$$

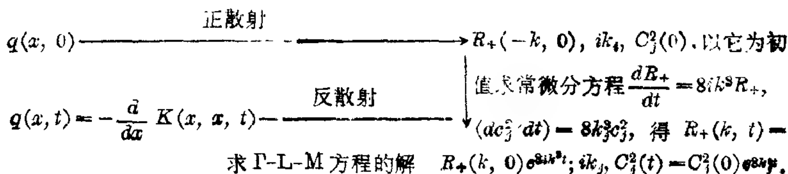
这就证明了(2-3-8)式，附带还得到 $T_t=0$ 或 $a_t=0$.

3.2 用反散射方法求解 KdV 方程初值问题的步骤

根据以上讨论，第一步是先求初条件 $q(x, 0)$ 的散射数据 $ST:\{R_+(k, 0),\ ik_j,\ c_j^2(0)\}$；第二步以这个散射数据为初始条件求解方程(2-3-7)、(2-3-8)，得到 $q(x, t)$ 的散射数据

$ST:\{R_+(k, t)=R_+(k, 0)e^{8ik^3t},\ ik_j,\ C_j^2(t)=C_j^2(0)e^{8k_j^3t}\}$；

第三步以这个 $R_+(k, t)$，ik_j，$C_j^2(t)$ 为散射数据，求解基本方程(2-2-11)得 $K(x, y, t)$，然后令 $q(x, t)=-2\frac{d}{dx}K(x, x, t)$，即得 KdV 方程初值问题的解．这些步骤可图解如下：



从以上图解看出，上述解法与用傅里叶变换法求线性方程初值问题的相似性．设 $P_n(\partial x)$ 表示对 x 偏导数的 n 次多项式，考虑线性方程

$$u_t=P_n(\partial_x)u, \tag{2-3-11}$$

初始条件

$$u|_{t=0}=u(x)=u(x, 0). \tag{2-3-12}$$

用傅里叶方法求解，先做傅里叶变换

$$\hat{u}(k, 0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x, 0)e^{ikx}dx, \tag{2-3-13}$$

将求解(2-3-11)、(2-3-12)的问题化为对变量 k 的常微分方程的

初值问题，

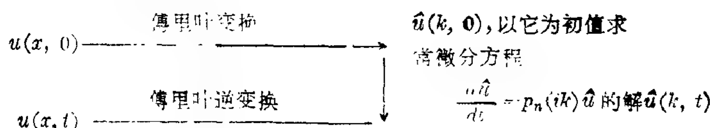
$$\hat{u}_t = P_n(ik)\hat{u}, \tag{2-3-14}$$

$$\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}(k, 0). \tag{2-3-15}$$

从(2-3-14)、(2-3-15)解出 $\hat{u}(k, t)$，再用傅里叶逆变换

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t)e^{ikx}dk, \tag{2-3-16}$$

就得到解 $u(x, t)$. 其图解如下：



由于上述的相似性，因此反散射方法有时又被叫做非线性傅里叶分析. 其特点是将求解一个非线性偏微分方程的初值问题分解为三次求解线性方程的问题.

最后我们要指出，以上只给出了求解 KdV 方程初值问题的方法，至于由此方法得到的 $q(x, t)$是否是问题的古典解，还要仔细讨论，这里就不再叙述了.

3.3 无反射势与 N 个孤立子解

设 $R_+(k)=0$, N 个特征值 ik_j, $j=1, 2, \cdots, N$, $k_1>k_2>\cdots>k_N>0$, 对应的归一化因子为 $c_j^2(t)=c_j^2(0)e^{8k_j^3t}$ 其 Г-L-M 方程为

$$K(x, y)+\sum_{j=1}^{N} c_j^2(t)e^{-k_j(x+y)}+\sum_{j=1}^{N} c_j^2(t)e^{-k_jy}\int_x^{\infty}K(x, s)e^{-ik_js}ds=0, \tag{2-3-17}$$

令

$$K(x, y)=\sum_{l=1}^{N} c_l(t)h_l(x)e^{-k_ly}, \tag{2-3-18}$$

代入(2-3-17)得到对 $h_l(x)$的代数方程

$$h_j(x)+\sum_{l=1}^{N}c_j(t)c_l(t)\left(\frac{e^{-(k_j+k_l)x}}{k_j+k_l}\right)h_l=-c_j(t)e^{-k_jx}. \tag{2-3-19}$$

令 $B=I+A$, I 是 $n\times n$ 的单位矩阵, $B=(b_{jl})$,

$$A=(a_{jl})=\left(\frac{c_j(t)c_l(t)}{k_j+k_l}e^{-(k_j+k_l)x}\right),$$

$$h_l(x)=\frac{1}{\det B}\begin{vmatrix} b_{1,1}\cdots b_{1,l-1} & -c_1e^{-k_1x} & b_{1,l+1}\cdots b_{1,N} \\ b_{2,1}\cdots b_{2,l-1}, & -c_2e^{-k_2x} & b_{2,l+1}\cdots b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N,1}\cdots b_{N,l-1} & -c_Ne^{-k_Nx} & b_{N,l+1}\cdots b_{N,N} \end{vmatrix}$$

注意到 $-c_l(t)c_j(t)e^{-(k_j+k_l)x}=\frac{db_{jl}}{dx}$, 则有

$$K(x,x)=\sum_{l=1}^{n}c_le^{-k_lx}h_l(x)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\det B}\begin{vmatrix} b_{1,1}b_{1,2}\cdots b_{1,l-1}\frac{db_{1l}}{dx}b_{1,l+1}\cdots b_{1,N} \\ b_{2,1}b_{2,2}\cdots b_{2,l-1}\frac{db_{2l}}{dx}b_{2,l+1}\cdots b_{2,N} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_{N,1}b_{N,2}\cdots b_{N,l-1}\frac{db_{Nl}}{dx}b_{N,l+1}\cdots b_{N,N} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\det B}\frac{d}{dx}(\det B)=\frac{d}{dt}\log\det B,$$

所以

$$q(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x)=-2\frac{d^2}{dx^2}\log\det(I+A). \quad (2\text{-}3\text{-}20)$$

以下讨论当 $t\to+\infty$ 时, $q(x,t)$ 的渐近行为. 取常速度 $4k_j^2$ 的运动坐标

$$\xi_j=x+4k_j^2t. \quad (2\text{-}3\text{-}21)$$

可以改写为

$$\xi_j=\xi_l-\varepsilon_{j,l}t,\ \varepsilon_{j,l}=4k_j^2-4k_l^2, \quad (2\text{-}3\text{-}22)$$

因此有 $\varepsilon_{j,l}>0$, $1\leqslant j\leqslant l$; $\varepsilon_{j,l}=0$, $j=l$; $\varepsilon_{j,l}<0$, $l<j\leqslant n$, 当 l 固定, 令 $t\to+\infty$,

$$
\Delta(x,t)\sim\prod_{j=0}^{l-1}e^{-2k_j(\xi_l-\varepsilon_j t')}\begin{vmatrix}
\dfrac{c_1^2(0)}{k_1+k_1} & \dfrac{c_1(0)c_2(0)}{k_1+k_2} & \cdots & \dfrac{c_1(0)c_l(0)}{k_1+k_l}e^{-k_l\xi_l} & & & \\
\dfrac{c_2(0)c_1(0)}{k_2+k_1} & \dfrac{c_2^2(0)}{k_2+k_2} & \cdot & \dfrac{c_2(0)c_l(0)}{k_2+k_l}e^{-k_l\xi_l} & & 0 & \\
\vdots & & & & & & \\
\dfrac{c_l(0)c_1(0)}{k_l+k_1}e^{-k_l\xi_l} & \cdots & & 1+\dfrac{c_l^2(0)}{k_l+k_l}e^{-2k_l\xi_l} & & & \\
 & & & & 1 & \cdots & \\
 & & 0 & & & 1 & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & & & 0 & & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\prod_{j=1}^{l-1}e^{-2k_j(\xi_l-\varepsilon_j t')}\left\{\prod_{\rho=1}^{l-1}c_\rho^2(0)\begin{vmatrix}
(2k_1)^{-1} & (k_1+k_2)^{-1} & \cdots & (k_1+k_{l-1})^{-1}\\
(k_1+k_2)^{-1} & (2k_2)^{-1} & \cdots & (k_2+k_{l-1})^{-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
(k_{l-1}+k_1)^{-1} & (k_{l-1}+k_2)^{-1} & \cdots & (2k_{l-1})^{-1}
\end{vmatrix}\right.
$$

$$
\left.+\prod_{\rho=1}^{l}c_\rho^2(0)e^{2k_l\xi_l}\begin{vmatrix}
(2k_1)^{-1} & (k_1+k_2)^{-1} & \cdots & (k_1+k_l)^{-1}\\
(k_1+k_2)^{-1} & (2k_2)^{-1} & \cdots & (k_2+k_l)^{-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
(k_l+k_1)^{-1} & (k_l+k_2)^{-1} & \cdots & (2k_l)^{-1}
\end{vmatrix}\right\}
$$

以 $a_{ij}=(k_i+k_j)^{-1}$ 为元素的 $l\times l$ 矩阵行列式等于

$$
|a_{ij}|=\left[\prod_{i<j}^{l}(k_i-k_j)\right]^2\left[\prod_{i,j}^{l}(k_i+k_j)\right]^{-1},
$$

$$
\Delta(x,t)\sim\prod_{j=1}^{l-1}e^{-2k_j(\xi_l-\varepsilon_j t')}A_l^+\left[1+B_l^+e^{-2k_l\xi_l}\right],\quad t\to+\infty,
$$

其中
$$
A_l^+=\prod_{\rho=1}^{l-1}c_\rho^2(0)\left[\prod_{i<j}^{l-1}(k_i-k_j)\right]^2\left[\prod_{i,j}^{l-1}(k_i+k_j)\right]^{-1},
$$

$$
B_l^+=\frac{c_l^2(0)}{2k_l}\left[\prod_{j=1}^{l-1}\frac{k_j-k_l}{k_j+k_l}\right]^2.
$$

从 $q(x,t)=-2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{d\Delta}{dx}\right)$算得在常速度 $4k_l^2$ 运动坐标系

中，当 $t\to+\infty$ 时，

$$q(x,\ t)\sim-2k_l^2\operatorname{sech}^2(k_l\xi_l+\delta_l^+),\tag{2-3-23}$$

$$\delta_l^+=-\frac{1}{2}\log B_l^+;\tag{2-3-24}$$

同样方法可得，当 $t\to-\infty$ 时，

$$q(x,\ t)\sim-2k_l^2\operatorname{sech}^2(k_l\xi_l+\delta_l^-),\tag{2-3-25}$$

$$\delta_l^-=-\frac{1}{2}\log B_l^-,\quad B_l^-=\frac{c_l^2(0)}{2k_l}\Big[\prod_{j\neq l}^{n}\frac{k_l-k_j}{k_l+k_j}\Big]^2.\tag{2-3-26}$$

象这样，即 $t\to-\infty$ 时有 n 个振幅为 $4k_j^2$、宽度为 k_j 的孤立子，振幅由高到低排列．由于振幅越高速度越快，后来的波赶上前面的孤立子相互作用．但当 $t\to+\infty$ 时，这 n 个孤立子又分开，振幅最高的走的最快，在最前面．然后，又按低到高排列 n 个孤立子，形态、速度完全不变，只是产生相位差

$$\delta_l=\delta_l^+-\delta_l^-=\sum_{j=l+1}^{n}\log\frac{k_l-k_j}{k_l+k_j}-\sum_{j=1}^{l-1}\log\frac{k_j-k_l}{k_j+k_l}.\tag{2-3-27}$$

如果 $k_2=1,\ k_1=2,\ c_2^2(0)=6,\ c_1^2(0)=12$，容易算得

$$q(x,\ t)=\frac{-12[3+\operatorname{ch}(4x-64t)+4\operatorname{ch}(2x-8t)]}{[3\operatorname{ch}(x-28t)+\operatorname{ch}(3x-36t)]^2},$$

$$q(x,\ 0)=-6\operatorname{sech}^2x.$$

当 $k_1=2$ 时，

$$\lim_{x\to-\infty}q=-8\operatorname{sech}^2(2x-32t+\delta_1^-),$$
$$\lim_{x\to+\infty}q=-8\operatorname{sech}^2(2x-32t+\delta_1^+),$$
$$\delta_1^-=-\frac{1}{2}\log3,\qquad\delta_1^+=\frac{1}{2}\log3;$$

当 $k_2=1$ 时，

$$\lim_{x\to-\infty}q=-2\operatorname{sech}^2(x-4t-\delta_2^-),$$
$$\lim_{x\to+\infty}q=-2\operatorname{sech}^2(x-4t+\delta_2^+),$$
$$\delta_2^-=\log3,\ \delta_2^+=\log3.$$

§4 AKNS方程

4.1 反散射方法的发展

GGKM 等人提出的求解 KdV 方程初值问题的方法，经过归纳推广可用于求解其他非线性演化方程，并使之逐渐形成一种系统的求解方法.

P. D. Lex 发现这个方法的关键取决于以下三个方面:

(1) 首先给定一个特征值问题

$$L\varphi=\lambda\varphi, \tag{2-4-1}$$

其中 L 是与 $q(x, t)$ 有关的线性算子.

(2) 设特征值 λ 与 t 无关，称之为谱不变(isospectral)，即

$$\lambda_t=0. \tag{2-4-2}$$

(3) 再找一个合适的线性算子 A，使得

$$\varphi_t=A\varphi. \tag{2-4-3}$$

由此可推出

$$L_t\varphi+L\varphi_t=L_t\varphi+LA\varphi=\lambda_t\varphi+\lambda\varphi_t=\lambda A\varphi=AL\varphi,$$

因此得到

$$L_t=AL-LA=[A, L], \tag{2-4-4}$$

记号 $[A, L]=AL-LA$ 称为交换子. 上述算子方程叫做 Lax 方程. 算子 A, L 称为 Lax 对.

例如取

$$L=-D^2+q(x, t), \quad D=\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2-4-5}$$

$$A=-4D^3+6q(x, t)+3q_x(x, t), \tag{2-4-6}$$

代入(2-4-4)就得到 KdV 方程(2-1-1).

若 L 为(2-4-5)，取 A 为 $2n+1$ 阶反对称微分算子，代入

(2-4-4)可得到高阶 KdV 方程. 例如取

$$A=D^5+b_2D^3+D^3b_2+b_1D+Db_1,\quad b_2=-\frac{5}{4}q(x,t),$$

$$b_1=\frac{5}{16}(q_{xx}+3q^2),\tag{2-4-7}$$

可得5阶 KdV 方程如下,

$$q_t=\frac{1}{16}(q_{xxxxx}-10qq_{xxx}-20q_xq_{xx}+30q^2q_x).\tag{2-4-8}$$

这个方程也可以用反散射方法求解(读者可思考一下, 若 $q(x,t)$满足(2-4-8), 以 $q(x,t)$为位势的 Schrödinger 方程的散射数据随时间变化应满足什么样的微分方程), 因此只要特征值问题(2-4-1)的反散射问题得以解决, 那末对应于这个特征值问题的非线性演化方程的初值问题原则上都可以用上述方法来求解.

在50年代, 对 2×2 的一阶常微分方程组(相当于 Dirac 方程)的反散射问题已有许多结果, 苏联学者 Захаров 与 Шабат 就用这个特征值问题

$$L=i\begin{pmatrix}1+p & 0\\ 0 & 1-p\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix}0 & q^*\\ q & 0\end{pmatrix}\tag{2-4-9}$$

配上

$$A=-ip\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{d^2}{dx^2}+\begin{pmatrix}\frac{|q|^2}{1+p} & iq_x^*\\ -iq_x & \frac{-|q|^2}{1-p}\end{pmatrix},\ p=\sqrt{1-\frac{2}{Q}}=\text{常数},\tag{2-4-10}$$

代入(2-4-4), 得到物理、力学等许多领域中经常出现的一个重要方程——非线性 Schrödinger 方程(简记为 NS)

$$iq_t+q_{xx}+Q|u|^2u=0,\tag{2-4-11}$$

并用反散射方法给出了它的解.

4.2 AKNS 方程

在前人工作基础上，AKNS 等人考察以下更一般特征值问题

$$\begin{cases}\varphi_{1x}=-i\zeta\varphi_1+q\varphi_2,\\ \varphi_{2x}=r\varphi_1+i\zeta\varphi_2,\end{cases}\tag{2-4-12}$$

其中 $q=q(x,t)$，$r=r(x,t)$，并设 φ_1，φ_2 随 t 的演化规律为

$$\begin{cases}\varphi_{1t}=A\varphi_1+B\varphi_2,\\ x_{2t}=c\varphi_1-A\varphi_2,\end{cases}\tag{2-4-13}$$

其中 A，B，C 是 x，t，ζ 的函数，并设 $\zeta_t=0$，由 $\varphi_{1xt}=\varphi_{1tx}$，及 $\varphi_{2xt}=\varphi_{2tx}$（即相容性条件）推出 A，B，C 要满足以下三个方程

$$\begin{cases}A_x=qc-rB,\\ q_t=B_x+2i\zeta B+2Aq,\\ r_t=C_x-2i\zeta C-2Ar.\end{cases}\tag{2-4-14}$$

将 A，B，C 取为 ζ 的多项式

$$A=\sum_{j=0}^{n}a_j\zeta^j,\ B=\sum_{j=0}^{u}b_j\zeta^j,\ C=\sum_{j=0}^{n}C_j\zeta^j,\tag{2-4-15}$$

代入(2-4-14)比较 ζ^{n+1} 前的系数，得 $b_n=c_n=0$；比较 ζ^n 前的系数，得 $a_{nx}=0$，$b_{nx}+2ib_{n-1}=-2qa_n$，$c_{nx}-2ic_{n-1}=2ra_n$. 由此定出 $a_n=$常数及 b_{n-1}，c_{n-1}. 如此反复，即可定出 a_j，b_j，c_j，比较 ζ^0 前的系数，给出非线性演化方程. 最常用的是 $n=3$，经过直接计算可得

$$\begin{cases}A=a_3\zeta^3+a_2\zeta^2+\left(\frac{1}{2}a_3qr+2a_1\right)\zeta+\frac{1}{2}a_2qr-\frac{i}{4}a_3(qr_x-q_xr)+a_0\\ B=ia_3q\zeta^2+(ia_2q-\frac{1}{2}a_3q_x)\zeta+ia_1q+\frac{i}{2}a_3q^2r+\frac{1}{2}a_2q_x-\frac{i}{4}a_3q_{xx}\\ C=ia_3r\zeta^2+(ia_2r+\frac{1}{2}a_3r_x)\zeta+ia_1r+\frac{i}{2}a_3qr^2+\frac{1}{2}a_2r_x-\frac{i}{4}a_3r_{xx}\end{cases}\tag{2-4-16}$$

$$\begin{cases}q_t=\frac{-i}{4}a_3(q_{xxx}-6qrq_x)-\frac{1}{2}a_2(q_{xx}-2q^2r)+ia_1q_x+2a_0q,\\ r_t=-\frac{i}{4}a_3(r_{xxx}-6qrr_x)+\frac{1}{2}a_2(r_{xx}-2qr^2)+ia_1r_x-2a_0r.\end{cases}\tag{2-4-17}$$

公式(2-4-16)、(2-4-17)中的系数a_0, a_1, a_2, a_3均为常数，适当选取这些常数，并取q, r为特殊函数或q, r建立一些关系，上述两个未知函数的方程可化为一个未知数的方程，这称为方程的约化．以下讨论如何将方程(2-4-17)约化为一些物理上十分感兴趣的方程.

i) KdV 方程:

取$a_0=a_1=a_2=0$, $a_3=-4i$, $r=1$，得

$$q+6qq_x+q_{xxx}=0. \tag{2-4-18}$$

ii) MKdV 方程:

取$a_0=a_1=a_2=0$, $a_3=-4i$, $r=q$，得

$$q_t-6q^2q_x+q_{xxx}=0. \tag{2-4-19}$$

iii) N·S 方程:

取$a_0=a_1=a_3=0$, $a_2=-2i$, $r=\pm q^*$，得

$$q_t-iq_x\pm 2iq^2q^*=0. \tag{2-4-20}$$

iv) Burgers 方程:

取$a_0=a_1=a_3=0$, $a_2=-2$, $v_x=qr=\left(\frac{q_x}{q}\right)_x$，得

$$u_t=2u_xu-u_{xx}. \tag{2-4-21}$$

同样，我们可以将A, B, C按ζ^{-j}展开，例如取

$$A=\frac{a}{\zeta},\quad B=\frac{b}{\zeta},\quad C=\frac{c}{\zeta}, \tag{2-4-22}$$

代入(2-4-14)得

$$a_x=\frac{i}{2}(qr)_t,\ q_{xt}=-4iaq,\ r_{xt}=-4iar. \tag{2-4-23}$$

特别取

$a=\frac{i}{4}\cos u,\quad b=c=\frac{i}{4}\sin u,\ r=-q=\frac{1}{2}u_x$，得

v) sine-Gordon 方程:

$$u_{xt}=\sin u. \tag{2-4-24}$$

取 $a=\frac{i}{4}\cosh u$, $b=-c=\frac{i}{4}\sinh u$, $q=r=\frac{u_x}{2}$，得

vi) sinh-Gordon 方程:

$$u_{xt}=\sinh u. \tag{2-4-25}$$

从这一节的讨论可以看出，用反散射方法求解的这些非线性演化方程本身就是一类线性方程的可积性条件，因为方程(2-4-14)即由可积条件$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}_{xt}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}_{tx}$直接推出，因此这一类方程在结构上应具有某些特点. 这是数学家陈省身教授访华报告中所指出，他也谈到 AKNS 方程(2-4-14)可作为李群 $SL(2, R)$的结构方程引出，从而将这类方程与李群理论建立了联系. 从这个理论出发，可以很方便地将 Lax 原先假定的谱不变情况推扩到谱可变的情况(nonisospectral)，从而得到许多变系数的非线性演化方程，也可用反散射方法求解(见章末[8]、[18]～[22]).

§5 AKNS 方程特征值问题的正散射与反散射问题

5.1 Jost 矩阵

首先将§4中的方程(2-4-12)写成向量形式

$$\varphi_x=M\varphi,\quad \varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}-i\zeta & q(x)\\ r(x) & i\zeta\end{pmatrix}. \tag{2-5-1}$$

以下总假定

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x^jq(x)|dx<\infty,\ \int_{-\infty}^{\infty}|x^jr(x)|dx<\infty,\ j=0,\ 1. \tag{2-5-2}$$

求方程(2-5-1)满足以下渐近条件的解

$$\begin{cases}\varphi_-(x,\ \zeta)\sim\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x},\\ \bar{\varphi}_-(x,\ \zeta)\sim\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}e^{i\zeta x},\end{cases} x\to-\infty,\quad \begin{cases}\varphi_+(x,\ \zeta)\sim\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{i\zeta x},\\ \bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)\sim\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}\end{cases} x\to+\infty \tag{2-5-3}$$

定义以下矩阵为

$$(\varphi_-,\ \varphi_+)=\begin{pmatrix}\varphi_{1-} & \varphi_{1+}\\ \varphi_{2-} & \varphi_{2+}\end{pmatrix},\ (\bar{\varphi}_+,\ \bar{\varphi}_-)=\begin{pmatrix}\bar{\varphi}_{1+} & \bar{\varphi}_{1-}\\ \bar{\varphi}_{2+} & \bar{\varphi}_{2-}\end{pmatrix}. \tag{2-5-4}$$

满足(2-5-3)的(2-5-1)的解 $\varphi_+(x,\ \zeta)$ 等价于积分方程

$$\begin{cases}\varphi_{1+}=-\displaystyle\int_x^\infty e^{-i\zeta(x-s)}q(s)\varphi_{2+}(s,\ \zeta)ds,\\ \varphi_{2+}=e^{i\zeta x}-\displaystyle\int_x^\infty e^{i\zeta(x-s)}r(s)\varphi_{1+}(s,\ \zeta)ds.\end{cases} \tag{2-5-5}$$

$$令\ m=\varphi_{1+}e^{-i\zeta x},\ n=\varphi_{2+}e^{-i\zeta x}, \tag{2-5-6}$$

则(2-5-5)改写成

$$\begin{cases}m(x,\ \zeta)=-\displaystyle\int_x^\infty e^{-2i\zeta(x-s)}q(s)n(s,\ \zeta)ds,\\ n(x,\ \zeta)=1-\displaystyle\int_x^\infty r(s)m(s,\ \zeta)ds\end{cases} \tag{2-5-7}$$

或者

$$n(x,\ \zeta)=1+\int_x^\infty r(y)\left[\int_y^\infty e^{-2i\zeta(y-s)}q(s)n(s,\zeta)ds\right]dy. \tag{2-5-8}$$

用逐次逼近法，类似§1中的做法，可证明当 $\mathrm{Im}\zeta\geqslant 0$ 时(2-5-8)的解的存在唯一性，且有估计式

$$|n(x,\ \zeta)|\leqslant I_0(2\sqrt{Q_0(x)R_0(x)}), \tag{2-5-9}$$

I_0 是 Bessel 函数，$Q_0(x)=\int_{-\infty}^x |q(x)|dx,\quad R_0(x)=\int_{-\infty}^x |r(x)|dx.$

对 φ_- 及 $\bar{\varphi}_+,\bar{\varphi}_-$ 可用类似方法证明下面命题.

命题 1 (i) 当 $\mathrm{Im}\zeta\geqslant 0$，方程(2-5-1)的解矩阵 $(\varphi_-,\ \varphi_+)$ 存在且唯一，而且 $e^{-i\zeta x}\varphi_+,\ e^{i\zeta x}\varphi_-$ 有界.

(ii) 当 $\mathrm{Im}\zeta\leqslant 0$，方程(2-5-1)的解矩阵 $(\bar{\varphi}_+,\ \bar{\varphi}_-)$ 存在且唯一，而且 $e^{i\zeta x}\bar{\varphi}_+,\ e^{-i\zeta x}\bar{\varphi}_-$ 有界.

注意：(1)若 $q(x)=o(e^{-2\varepsilon|x|}),\ r(x)=o(e^{-2\varepsilon|x|}),\ \varepsilon>0,\ |x|\to\infty$，则解 $\varphi_+,\ \varphi_-$ 可开拓到 $\mathrm{Im}\zeta>-\varepsilon$，$\bar{\varphi}_+,\ \bar{\varphi}_-$ 可开拓到 $\mathrm{Im}\zeta<\varepsilon$. 特别，当 $q(x),\ r(x)$ 为紧函数时，$\bar{\varphi}_+,\ \bar{\varphi}_-$ 是 ζ 全平面的解析函数.

(2) 若 $q(x)$, $r(x)$ 足够光滑, 且各阶对 x 导数很快趋于零, 则对 $\varphi_\pm$, $\bar{\varphi}_\pm$ 的各阶导数$\left(\frac{d\varphi_\pm}{d\zeta}=\dot{\varphi}_\pm,\ \frac{d\varphi_\pm}{dx}=\varphi'_\pm\right)$的渐近式等于其渐近式的相应的各阶导数.

5.2 平移变换

设

$$
\begin{cases}
\varphi_{1+}(x,\ \zeta)=\int_x^\infty K_1(x,\ s)e^{i\zeta s}ds,\\
\varphi_{2+}(x,\ \zeta)=e^{i\zeta x}+\int_x^\infty K_2(x,\ s)e^{i\zeta s}ds,
\end{cases}
\tag{2-5-10}
$$

或改写成

$$
\begin{cases}
m(x,\zeta)=\int_x^\infty K_1(x,\ s)\,e^{i\zeta(s-x)}ds,\\
n(x,\ \zeta)=1+\int_x^\infty K(x,\ s)e^{i\zeta(s-x)}ds.
\end{cases}
\tag{2-5-11}
$$

将(2-5-11)代入(2-5-7), 仿 § 2 中的做法, 可得

$$
\begin{cases}
K_1(x,\ s)=\frac{-1}{2}q\left(\frac{x+s}{2}\right)+\int_x^{\frac{x+s}{2}}q(y)dy\int_y^\infty r(z)K_1(z,\ s+z+x\\
\qquad -2y)dz,\\
K_2(x,\ s)=\frac{1}{2}\int_x^\infty r(z)q\left(z+\frac{s-x}{2}\right)dz+\int_x^\infty r(z)dz\int_z^{z+\frac{s-x}{2}}q(y)\\
\qquad K_2(y,\ s-x+2z-y)dy.
\end{cases}
\tag{2-5-12}
$$

用逐次逼近法可证明以上积分方程解的存在唯一性. 可类似证明 $\bar{\varphi}_+$, φ_-, $\bar{\varphi}_-$ 平移变换的存在性.

命题 2 存在以下平移变换

$$
\begin{cases}
\varphi_+(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\int_x^\infty K(x,\ s)e^{i\zeta s}ds,\ K(x,\ s)=\begin{pmatrix}K_1(x,\ s)\\K_2(x,\ s)\end{pmatrix}\\
\bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+\int_x^\infty \bar{K}(x,\ s)e^{-i\zeta s}ds,\ \bar{K}(x,s)=\begin{pmatrix}\bar{K}_1(x,s)\\\bar{K}_2(x,s)\end{pmatrix}\\
\varphi_-(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+\int_{-\infty}^x H(x,\ s)e^{-i\zeta s}ds,\ H(x,\ s)=\begin{pmatrix}H_1(x,s)\\H_2(x,s)\end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$\bar{\varphi}_-(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\int_{-\infty}^{x}\bar{H}(x,s)e^{i\zeta s}ds,\quad \bar{H}(x,s)=\begin{pmatrix}\bar{H}_1(x,s)\\\bar{H}_2(x,s)\end{pmatrix}$$

而且 (2-5-13)

$$\begin{cases}K_1(x,x)=-\dfrac{1}{2}q(x),\ K_2(x,x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{\infty}q(s)r(s)ds,\\ \bar{K}_1(x,x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{\infty}q(s)r(s)ds,\ \bar{K}_2(x,x)=-\dfrac{1}{2}r(x),\\ H_1(x,x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}q(s)r(s)ds,\ H_2(x,x)=\dfrac{1}{2}r(x),\\ \bar{H}_1(x,x)=-\dfrac{1}{2}q(x),\ \bar{H}_2(x,x)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}q(s)r(s)ds.\end{cases}\quad(2\text{-}5\text{-}14)$$

(2-5-15)

当$|\zeta|\to\infty$,有以下渐近式

$$\begin{cases}\varphi^+(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\dfrac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}q(x)\\-\displaystyle\int_x^{\infty}q(s)r(s)ds\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\cdots,\\ \bar{\varphi}_+(x,\zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+\dfrac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}\displaystyle\int_x^{\infty}q(s)r(s)ds\\-r(x)\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+\cdots,\\ \varphi_-(x,s)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}-\dfrac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}q(s)r(s)ds\\r(x)\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+\cdots,\\ \bar{\varphi}_-(x,\zeta)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}-\dfrac{1}{2i\zeta}\begin{pmatrix}q(x)\\\displaystyle\int_{-\infty}^{x}q(s)r(s)ds\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\cdots.\end{cases}\quad(2\text{-}5\text{-}16)$$

5.3 散射数据

若令矩阵

$$\Phi_-=(\bar{\varphi}_-(x,\zeta),\ \varphi_-(x,\zeta)),\quad \Phi_+=(\bar{\varphi}_+(x,\zeta),\ \varphi_+(x,\zeta)),\quad(2\text{-}5\text{-}17)$$

则矩阵Φ_-, Φ_+的行列式$|\Phi_-|=1$, $|\Phi_+|=1$,因此Φ_-, Φ_+是基本解矩阵. 当$\mathrm{Im}\zeta=0$时,有

$$\begin{cases}\varphi_-(x,\ \zeta)=a(\zeta)\bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)+b(\zeta)\varphi_+(x,\ \zeta),\\ \bar{\varphi}_-(x,\ \zeta)=\bar{b}(\zeta)\bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)-\bar{a}(\zeta)\varphi_+(x,\ \zeta),\end{cases}\quad \text{或 } \Phi_-=\Phi_+S, \tag{2-5-18}$$

其中 S 也称为 S 矩阵，定义为

$$S=\begin{pmatrix}\bar{b}(\zeta) & a(\zeta)\\ -\bar{a}(\zeta) & b(\zeta)\end{pmatrix} \tag{2-5-19}$$

定义 $[\varphi,\ \psi]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \psi_1\\ \varphi_2 & \psi_2\end{vmatrix}$，则从(2-5-18)及 $|\Phi_-|=1,\ |\Phi_+|=1$ 可得

$$\begin{cases}a(\zeta)=[\varphi_-(x,\ \zeta),\ \varphi_+(x,\ \zeta)],\ b(\zeta)=[\bar{\varphi}_+(x,\ \zeta),\ \varphi_-(x,\ \zeta)],\\ \bar{a}(\zeta)=[\bar{\varphi}_-(x,\ \zeta),\ \bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)],\ \bar{b}(\zeta)=[\bar{\varphi}_-(x,\ \zeta),\ \varphi_+(x,\ \zeta)].\end{cases} \tag{2-5-20}$$

从 $a(\zeta)$ 及 $\bar{a}(\zeta)$ 的表达式 (2-5-20) 及本节命题 2，立即推出 $a(\zeta)$ 在 ζ 的上半平面解析，且 $a(\zeta)\sim 1$，当 $|\zeta|\to\infty$，而 $\bar{a}(\zeta)$ 在 ζ 下半平面解析且 $\bar{a}(\zeta)\sim 1$，当 $|\zeta|\to\infty$，由(2-5-18)得

$$b(\zeta)\bar{b}(\zeta)+a(\zeta)\bar{a}(\zeta)=1. \tag{2-5-21}$$

若 $\mathrm{Im}\zeta>0$ 使 $a(\zeta)=0$，则

$$\varphi_-(x,\ \zeta)=b\varphi_+(x,\ \zeta),\ b\ \text{是常数}. \tag{2-5-22}$$

这时，当 $|x|\to\infty$ 时，$\varphi_+(x,\ \zeta)$，$\varphi_-(x,\ \zeta)$ 都以指数趋于零。

若 $\mathrm{Im}\zeta<0$，使 $\bar{a}(\bar{\zeta})=0$，则

$$\bar{\varphi}_-(x,\ \zeta)=\bar{b}\bar{\varphi}_+(x,\ \bar{\zeta}),\ \bar{b}\ \text{是常数}. \tag{2-5-23}$$

这时，当 $|x|\to\infty$ 时，$\bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)$，$\bar{\varphi}_-(x,\ \zeta)$ 都以指数趋于零，我们称这样的 ζ 和 $\bar{\zeta}$ 为方程(2-5-1)的特征值.

以下总是假定 $a(\zeta)$，$\bar{a}(\bar{\zeta})$ 的零点只有有限多个，而且都是复的单重零点. 下面进一步讨论对应于此特征值的特征函数的归一化因子.

设 ζ_j 是 $a(\zeta)$ 的一个零点，由

$$\begin{cases}\varphi_{-1x}=-i\zeta\varphi_{-1}+q\varphi_{-2},\\ \varphi_{-2x}=r\varphi_{-1}+i\zeta\varphi_{-2},\end{cases}\qquad \begin{cases}\varphi_{+1x}=-i\zeta\varphi_{+1}+q\varphi_{+2},\\ \varphi_{+2x}=r\varphi_{+1}+i\zeta\varphi_{+2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{+1x}=-i\varphi_{+1}-i\zeta\dot{\varphi}_{+1}+q\dot{\varphi}_{+2},\\ \dot{\varphi}_{+2x}=r\dot{\varphi}_{+1}+i\varphi_{+2}+i\zeta\dot{\varphi}_{+2},\end{cases}$$

推出

$$\frac{d}{dx}(\dot{\varphi}_{+1}\varphi_{-2}-\dot{\varphi}_{+2}\varphi_{-1})=\frac{d}{dx}[\dot{\varphi}_{+},\ \varphi_{-}]=-i(\varphi_{+1}\varphi_{-2}+\varphi_{+2}\varphi_{-1}).$$

同样方法可得

$$\frac{d}{dx}(\varphi_{+1}\dot{\varphi}_{-2}-\varphi_{+2}\dot{\varphi}_{-1})=\frac{d}{dx}[\varphi_{+},\ \dot{\varphi}_{-}]=i(\varphi_{+1}\varphi_{-2}+\varphi_{+2}\varphi_{-1}).$$

以上两式分别从 $-l$ 到 x 及 x 到 l 积分，两式再相减后令 ζ 等于 ζ_j 代入，并令 $l\to\infty$，得

$$\begin{aligned}-\dot{a}(\zeta)|_{\zeta=\zeta_j}&=\{[\dot{\varphi}_{+},\ \varphi_{-}]+[\varphi_{+},\ \dot{\varphi}_{-}]\}_{\zeta=\zeta_j}\\&=-i\int_{-\infty}^{\infty}2b_j\varphi_{+1}(x,\ \zeta_j)\varphi_{+2}(x,\ \zeta_j)dx.\end{aligned}$$

令

$$c_j=\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{+1}(x,\ \zeta_j)\varphi_{+2}(x,\ \zeta_j)dx\right]^{-1}=\frac{ib_j}{\dot{a}(\zeta_j)}.\tag{2-5-24}$$

同理，若令 $\bar{\zeta}_j$ 是 $\bar{a}(\zeta)$ 的零点，则可令

$$\bar{c}_j=\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}_{+1}(x,\bar{\zeta}_j)\bar{\varphi}_{+2}(x,\ \bar{\zeta}_j)\,dx\right]^{-1}=\frac{i\bar{b}_j}{\dot{\bar{a}}(\bar{\zeta}_j)}.\tag{2-5-25}$$

我们定义

$$ST:\begin{cases}P(\zeta)=\dfrac{b(\zeta)}{a(\zeta)},\ \mathrm{Im}\zeta=0,\ \zeta_j,\ c_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l,\ \mathrm{Im}\zeta_j>0\\ \bar{P}(\zeta)=\dfrac{\bar{b}(\zeta)}{\bar{a}(\zeta)},\ \mathrm{Im}\zeta=0,\ \bar{\zeta}_j,\ \bar{c}_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l,\ \mathrm{Im}\bar{\zeta}_j<0\end{cases}\tag{2-5-26}$$

为 AKNS 特征问题的散射数据.

当 $r=\mp q^*$ 时，Jost 解、平移变换核函数及散射量之间也存在某种关系. 以下列出这些关系，读者可以自行证明.

$$\bar{\varphi}_{+}=\begin{pmatrix}\bar{\varphi}_{+1}(x,\ \zeta)\\ \bar{\varphi}_{+2}(x,\ \zeta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi^*_{+2}(x,\ \zeta^*)\\ \mp\varphi^*_{+1}(x,\ \zeta^*)\end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi}_- = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_{-1}(x, \zeta) \\ \bar{\varphi}_{-2}(x, \zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\varphi^*_{-2}(x, \zeta^*) \\ -\varphi^*_{-1}(x, \zeta^*) \end{pmatrix},$$

$$\bar{K}(x, y) = \begin{pmatrix} \bar{K}_1(x, y) \\ \bar{K}_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^*_2(x, y) \\ \mp K^*_1(x, y) \end{pmatrix},$$

$$\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta^*), \ \bar{b}(\zeta) = \pm b^*(\zeta^*).$$

当 $r=q^*$ 时，(2-5-1)是对称的、无复的特征值；当 $r=-q^*$ 时，则 $\bar{\zeta}_j=\zeta_j^*$, $\bar{c}_j=-c_j^*$, $\bar{l}=l$. 特别当 $r=\pm q$(实函数)时，

$$\bar{\varphi}_+ = \begin{pmatrix} \varphi_{+2}(x, -\zeta) \\ \pm\varphi_{+1}(x, -\zeta) \end{pmatrix}, \ \bar{\varphi}_- = \begin{pmatrix} \mp\varphi_{-2}(x, -\zeta) \\ -\varphi_{-1}(x, -\zeta) \end{pmatrix},$$

$\bar{a}(\zeta)=a(-\zeta)$, $\bar{b}(\zeta)=\mp b(-\zeta)$; 当 $r=-q$ 时，$\zeta_j=-\bar{\zeta}_j$, $c_j=\bar{c}_j$, $\bar{l}=l$.

5.4 Γ-L-M 积分方程组

这一段主要讨论给定散射数据(2-5-26)后，如何恢复 AKNS 特征值问题(2-5-1)中的位势 $q(x)$, $r(x)$.

命题 3 令

$$\begin{cases} F(x)=F_c(x)+F_d(x), \ \bar{F}(x)=\bar{F}_c(x)+\bar{F}_d(x), \\ F_c(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta, \ F_d(x)=-\sum_{j=1}^{l}c_je^{i\zeta_jx}, \\ \bar{F}_c(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\rho}(\zeta)e^{-i\zeta x}d\zeta, \ \bar{F}_d(x)=\sum_{j=1}^{\bar{l}}\bar{c}_je^{-i\bar{\zeta}_jx}, \end{cases} \tag{2-5-27}$$

则

$$\begin{cases} \bar{K}(x, y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y)+\displaystyle\int_x^{\infty}K(x, s)F(s+y)ds=0, \\ K(x, y)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\bar{F}(x+y)-\displaystyle\int_x^{\infty}\bar{K}(x, s)\bar{F}(s+y)ds=0. \end{cases} \tag{2-5-28}$$

证明 将(2-5-18)的第一式改写成

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\varphi_-(x, \zeta)$$

$$=\rho(\zeta)\left[\varphi_+(x,\zeta)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}\right]+\rho(\zeta)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\left[\varphi_+(x,\zeta)\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}\right]+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}-\varphi_-(x,s).$$

与 2.2 段推导 Г-L-M 方程的同样做法得当 $y\geqslant x$ 时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a}-1\right]\varphi_-(x,\zeta)e^{i\zeta y}d\zeta$$

$$=\int_x^{\infty}K(x,s)F_c(s+y)ds+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F_c(x+y)+K(x,y).$$

上式左边化为迴路积分得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a}-1\right]\varphi_-(x,\zeta)e^{i\zeta y}d\zeta$$

$$=i\mathrm{Res}\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)\varphi_-(x,\zeta)e^{i\zeta y}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{l}\frac{ib_j\varphi_+(x,\zeta_j)}{\dot{a}(\zeta_j)}e^{i\zeta_j y}$$

$$=\sum_{j=1}^{l}c_j\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\zeta_j(x+y)}+\int_x^{\infty}K(x,s)e^{i\zeta(s+y)}ds\right]$$

$$=-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F_d(x+y)-\int_x^{\infty}K(x,s)F_d(s+y)ds.$$

上式移到右边即得(2-5-28)的第一式.

将(2-5-18)第二式改写,用同样方法即得(2-5-28)的第二式.

积分方程(2-5-28)的解未必对所有的 x 都是存在唯一的. 例如,当 $\rho(\zeta)=\bar{\rho}(\zeta)=0$,上、下半平面各有一个特征值 $\lambda(\mathrm{Im}\lambda>0)$, $\bar{\lambda}(\mathrm{Im}\bar{\lambda}<0)$ 对应的归一化因子是 c 和 $\bar{c}$,积分方程简化为

$$\begin{cases}\overline{K}(x,y)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ce^{i\lambda(x+y)}-\int_x^{\infty}K(x,s)ce^{i\lambda(s+y)}ds=0,\\ K(x,y)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\bar{c}e^{-i\lambda(x+y)}-\int_x^{\infty}\overline{K}(x,s)\bar{c}e^{-i\bar{\lambda}(s+y)}ds=0.\end{cases}$$

令 $\bar{K}=\begin{pmatrix}\bar{K}_1(x)\\ \bar{K}_2(x)\end{pmatrix}e^{i\lambda y},\ K=\begin{pmatrix}K_1(x)\\ K_2(x)\end{pmatrix}e^{-i\bar{\lambda}y},$

则
$$\begin{pmatrix}\bar{K}_1(x)\\ \bar{K}_2(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}ce^{i\lambda x}+\begin{pmatrix}K_1(x)\\ K_2(x)\end{pmatrix}\frac{ce^{i(\lambda-\bar{\lambda})x}}{i(\lambda-\bar{\lambda})}=0,$$
$$\begin{pmatrix}K_1(x)\\ K_2(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\bar{c}e^{i\lambda x}+\begin{pmatrix}K_1(x)\\ K_2(x)\end{pmatrix}\frac{\bar{c}e^{i(\lambda-\bar{\lambda})x}}{i(\lambda-\bar{\lambda})}=0.$$

解代数方程得

$$\begin{cases}K_1(x,\ y)=\dfrac{1}{\Delta}(ce^{-i\bar{\lambda}x}e^{-i\bar{\lambda}y}),\\ K_2(x,\ y)=\dfrac{1}{\Delta}(-ic\bar{c}e^{i\lambda x}e^{i(\lambda-\bar{\lambda})x})e^{-i\bar{\lambda}y}(\bar{\lambda}-\lambda)^{-1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{K}_1(x,\ y)=\dfrac{1}{\Delta}(-ic\bar{c}e^{-i\bar{\lambda}x}e^{i(\lambda-\bar{\lambda})x})e^{i\lambda y}(\bar{\lambda}-\lambda)^{-1}\\ \bar{K}_2(x,\ y)=\dfrac{1}{\Delta}(ce^{i\lambda x})e^{i\lambda y},\end{cases}$$

其中

$$\Delta=1+\frac{c\bar{c}e^{2i(\lambda-\bar{\lambda})x}}{(\lambda-\bar{\lambda})^2},\tag{2-5-29}$$

当 $\Delta=0$ 时，这个解有奇性.

可以证明，当 $r=-q^*$ 时，积分方程(2-5-28)对任何 x，它的解都存在且唯一.

在上述例子中，若 $\Delta\neq0$，可得

$$\begin{aligned}q(x)&=-2K_1(x,\ x)=\frac{-2\bar{c}e^{-2i\bar{\lambda}x}}{\Delta},\\ r(x)&=-2\bar{K}_2(x,\ x)=\frac{-2ce^{2i\lambda x}}{\Delta},\end{aligned}\tag{2-5-30}$$

从(2-5-13)得

$$\varphi_+(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}+\int_x^\infty K(x,\ s)e^{i\zeta s}ds$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{-\bar{c}e^{-2i\bar{\lambda}x}}{i\Delta(\zeta-\bar{\lambda})} \\ 1-\dfrac{c\bar{c}e^{2i(\lambda-\bar{\lambda})x}}{\Delta(\zeta-\bar{\lambda})(\lambda-\bar{\lambda})} \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, \tag{2-5-31}$$

$$\bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+\int_x^{\infty}\overline{K}(x\cdot s)e^{-i\zeta s}ds$$

$$=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{c\bar{c}e^{2i(\lambda-\bar{\lambda})x}}{\Delta(\lambda-\zeta)(\lambda-\bar{\lambda})} \\ \dfrac{-ce^{2i\lambda x}}{i\Delta(\lambda-\zeta)} \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}. \tag{2-5-32}$$

令 $x\to-\infty$,

$$\varphi_+(x,\ \zeta)\sim\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\zeta-\lambda}{\zeta-\bar{\lambda}}\end{pmatrix}e^{i\zeta x},\ \bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)\sim\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{\lambda}-\zeta}{\lambda-\zeta}\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}. \tag{2-5-33}$$

从(2-5-18)解出

$$\begin{cases}\varphi_+(x,\ \zeta)=\bar{b}(\zeta)\varphi_-(x,\ \zeta)-a(\zeta)\bar{\varphi}_-(x,\ \zeta),\\ \bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)=\bar{a}(\zeta)\varphi_-(x,\ \zeta)-b(\zeta)\bar{\varphi}_-(x,\ \zeta).\end{cases} \tag{2-5-34}$$

令 $x\to-\infty$,

$$\begin{cases}\varphi_+(x,\ \zeta)\sim\bar{b}(\zeta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}-a(\zeta)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{i\zeta x},\\ \bar{\varphi}_+(x,\ \zeta)\sim\bar{a}(\zeta)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\zeta x}+b(\zeta)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{i\zeta x}.\end{cases} \tag{2-5-35}$$

比较(2-5-33)与(2-5-35)得

$$\bar{b}(\zeta)=b(\zeta)=0,\ a(\zeta)=\frac{\zeta-\lambda}{\zeta-\bar{\lambda}},\ \bar{a}(\zeta)=\frac{\zeta-\bar{\lambda}}{\zeta-\lambda}. \tag{2-5-36}$$

这说明特征值问题 (2-5-1) 的位势取为 (2-5-30) 时, $\rho(\zeta)=0$, $\bar{\rho}(\zeta)=0$. 这个系统有两个特征值, 分别为 $\zeta=\lambda(\mathrm{Im}\lambda>0)$, 及 $\zeta=\bar{\lambda}(\mathrm{Im}\bar{\lambda}<0)$.

§6 用反散射方法求AKNS方程的解

这一节，我们将讨论在给定初条件

$$q(x,\ t)\,|_{t=0}=q(x),\quad r(x,\ t)\,|_{t=0}=r(x)$$

时AKNS方程的解，我们将主要讨论方程(2-4-17)和(2-4-24)、(2-4-25)方程的解. 由于上述方程在应用上是十分重要的，而求解的方法又带有普遍性，与§5节类似. 首先要求出以初条件$q(x)$，$r(x)$为位势的方程(2-5-1)的散射数据，然后求出当$q(x,\ t)$ $r(x,\ t)$作为AKNS方程解的时候，其相应的散射数据随时间的变化规律. 最后由Г-L-M积分方程组，根据散射数据来恢复$q(x,\ t)$，$r(x,\ t)$. 下面将讨论散射数据随时间的变化规律.

6.1 散射数据随时间的变化规律

首先将方程(2-4-3)也写成向量形式

$$\varphi_x=N\varphi,\quad N=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix},\tag{2-6-1}$$

由(2-6-1)与(2-5-1)的相容条件$\varphi_{xt}=\varphi_{tx}$，可改写AKNS方程(2-4-14)为矩阵形式

$$M_t-N_x+MN-NM=0.\tag{2-6-2}$$

由(2-6-2)很容易证明以下事实:

若φ是(2-5-1)的一个解，φ又满足(2-6-1)，则令

$$\varphi=\varphi_t-N\varphi,\tag{2-6-3}$$

也是方程(2-5-1)的解. 也就是说，φ可表示成(2-5-1)的基本解的线性组合，以下要不断应用这个结果.

由于我们只考虑方程(2-4-17)、(2-4-24)、(2-4-25)，这时从方程所对应的A，B，C看出，当q，r及其导数很快趋于零时，有

$$\lim_{|x|\to\infty} N = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & -\widetilde{A} \end{pmatrix}, \tag{2-6-4}$$

对方程(2-4-17),

$$\widetilde{A} = a_3\zeta^3 + a_2\zeta^2 + 2a_1\zeta + a_0. \tag{2-6-5}$$

对方程(2-4-24)和(2-4-25), $\widetilde{A}$ 为

$$\widetilde{A} = \frac{i}{4\zeta}, \tag{2-6-6}$$

取 Jost 解 $\varphi_- = \varphi_-(x, \zeta)$, 因此

$$\varphi_{-t} - N\varphi_- = \alpha_1\varphi_-(x, \zeta) + \alpha_2\bar{\varphi}_-(x, \zeta), \ \mathrm{Im}\zeta = 0.$$

令 $x \to -\infty$, 得

$$-\begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & -\widetilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x},$$

比较两边系数, 得

$$\alpha_2 = 0, \ \alpha_1 = -\widetilde{A}. \tag{2-6-7}$$

再令 $x \to +\infty$, 得

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{dt} e^{-i\zeta x} \\ \frac{db}{dt} e^{i\zeta x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & -\widetilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} \end{pmatrix} = -\widetilde{A}\begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} \end{pmatrix},$$

比较两边系数得

$$\frac{da}{dt} = 0, \qquad \frac{db}{dt} = -2\widetilde{A}b. \tag{2-6-8}$$

用同样方法可以证明

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{b}}{dt} = 2\widetilde{A}\bar{b}. \tag{2-6-9}$$

当 ζ 是特征值时, 例如 $\zeta = \zeta_j$, $\mathrm{Im}\zeta_j > 0$, 取相应的归一化特征函数 $\varphi(x, \zeta_j)$, 它当 $|x| \to \infty$ 时指数地趋于零, 而另一线性无关的解必指数地趋于无穷大, 因此,

$$\varphi_t(x, \zeta_j) - N\varphi(x, \zeta_j) = \alpha\varphi(x, \zeta_j) \quad (\alpha \text{ 为常数}). \tag{2-6-10}$$

上式写成分量形式后分别乘 $\varphi_2(x, \zeta_j)$, $\varphi_1(x, \zeta_j)$后相加, 再

$$C_{j,t}^{-\frac{1}{2}}-\widetilde{A}(\bar{\zeta}_j)C_j^{-\frac{1}{2}}=0.$$

归纳上述结果得以下命题

命题 设 $q(x, t)$, $r(x, t)$ $\left(或 q=\frac{-u_x}{2},\ r=\frac{u_x}{2},\ 及 q=\frac{u_x}{2},\ r=\frac{u_x}{2}\right)$ 分别是方程(2-4-17)或方程 (2-4-24) 或 (2-4-25) 的解，q, r 及其导数当 $|x|\to\infty$ 时很快趋于零，当 $t=0$ 时，$q=q(x)$，$r=r(x)$，而且以 $q(x)$，$r(x)$ 为位势的特征值问题(2-5-1)的散射数据为

$$(ST):\begin{cases}\rho(\zeta, D),\ \mathrm{Im}\zeta=0,\ \zeta_j,\ \mathrm{Im}\zeta_j>0,\ c_j(0),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l\\ \bar{\rho}(\zeta, D),\ \mathrm{Im}\zeta=0,\ \bar{\zeta}_j,\ \mathrm{Im}\bar{\zeta}_j<0,\ \bar{c}_j(0),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{l}\end{cases},$$

那末，以 $q(x, t)$，$r(x, t)$ 为位势的(2-5-1)的散射数据为

$$(ST)_t:\begin{cases}\rho(\zeta, t)=\rho(\zeta, 0)e^{-2\widetilde{A}(\zeta)t},\ \zeta_j,\ \mathrm{Im}\zeta_j>0,\\ c_j(t)=c_j(0)e^{-2\widetilde{A}(\zeta_j)t},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l\\ \bar{\rho}(\zeta, t)=\bar{\rho}(\zeta, 0)e^{2\widetilde{A}(\zeta)t},\ \bar{\zeta}_j,\ \mathrm{Im}\bar{\zeta}_j<0,\\ \bar{c}_j(t)=c_j(0)e^{2\widetilde{A}(\zeta_j)t},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l.\end{cases}$$

6.2 几个方程的单孤立子解

1. N·S 方程

这时，$q=-r^*$，$\rho=\bar{\rho}=0$，一个特征值为 $\zeta=\lambda_1+i\lambda_2$，$\lambda_2>0$，另一个特征值为 $\bar{\zeta}=\lambda_1-i\lambda_2$，对应的归一化因子为 c 及 $\bar{c}=c^*$，若 $t=0$，则为 $c(0)$，于是有

$$c(t)=c(0)e^{-2\widetilde{A}(\zeta)t}=c(0)e^{4i(\lambda_1+i\lambda_2)^2t}=c(0)e^{4i(\lambda_1^2-\lambda_2^2)t}\cdot e^{-8\lambda_1\lambda_2t}.$$

代入(2-5-30)第一式，并令 $-ic(0)=|c(0)|e^{i\psi_0}$，

$$x_0=\lg\frac{|c(0)|}{2\lambda_2},$$

则

$$q(x, t)=2\lambda_2e^{-2i\lambda_1x+4i(\lambda_1^2-\lambda_2^2)t-i\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{sech}(2\lambda_1x-8\lambda_1\lambda_2t-x_0).\tag{2-6-11}$$

这个孤立子为振动载波的包络，其振幅和波长依赖于λ_2，其速度为$4\lambda_1$.

2．MKdV 方程

这时$q=-r$，而且是实函数，因而特征值只能分别在上下半平面的虚轴上，而且$\zeta=i\lambda_2$，$\bar{\zeta}=-i\lambda_2$，归一化因子$c=c(0)e^{8\lambda_2^3 t}$．令$\dfrac{c(0)}{2\lambda_2}=e^{x_0}$，由(2-5-30)得

$$q(x,\ t)=-2\lambda_2\operatorname{sech}(2\lambda_2 x-8\lambda_2^3 t-x_0). \tag{2-6-12}$$

这是钟形孤立子，振幅和波长依赖于λ_2，其速度为$4\lambda_2^2$

3．S-G 方程

这时，$r=q=\dfrac{u_x}{2}$，而且是实函数，特征值也为$\zeta=i\lambda_2$，$\bar{\zeta}=-i\lambda_2$，归一化因子$c(t)=c(0)e^{-\frac{1}{2\lambda_2}t}$，令$\dfrac{c(0)}{2\lambda_2}=e^{x_0}$，由(2-5-30)得

$$q(x,\ t)=-2\lambda_2\operatorname{sech}\left(2\lambda_2 x+\frac{t}{2\lambda_2}-x_0\right),$$

$$u(x,\ t)=4\operatorname{tg}^{-1}e^{\left(ax+\frac{t}{a}-\delta\right)},\ 2\lambda_2=a. \tag{2-6-13}$$

作变换 $$x=\frac{1}{2}(x'+t'),\quad t=\frac{1}{2}(x'-t'),$$

方程(2-4-24)变为

$$u_{t't'}-u_{x'x'}+\sin u=0 \tag{2-6-14}$$

$$u=4\operatorname{tg}^{-1}\pm e^{\pm\sqrt{1-v^2}(x'-vt')-\delta},\ |v|<1, \tag{2-6-15}$$

其中 $$a^2=\frac{1-v}{1+v}. \tag{2-6-16}$$

当$a>0$时取$+$，解$u(-\infty,\ t')=0$，$u(+\infty,\ t')=2\pi$，这组解称为扭结解．当$a<0$时取$-$，解$u(-\infty,\ t')=2\pi$，$u(+\infty,t')=0$这组解称为反扭结解。

6.3 $r=-q$ 为实函数时的 n 个孤立子解

这时，$\overline{K}_1(x,y)=K_2(x,y)$，$\overline{K}_2(x,y)=-K_1(x,y)$，$\zeta_j=i\lambda_j$，$\lambda_j>0$，$\overline{\zeta}_j=-i\lambda_j$，$\overline{c}_j=c_j$，而且 $\overline{F}(x)=F(x)=\sum_{j=1}^{l}c_je^{-\lambda_jx}$. 因此，只要取 Γ-L-M 积分方程(2-5-28)中的第一个方程

$$\begin{cases}K_2(x,y)+\int_x^{\infty}K_1(x,s)F(s+y)ds=0,\\ -K_1(x,y)+F(x+y)+\int_x^{\infty}K_2(x,s)F(s+y)ds=0.\end{cases}\tag{2-6-17}$$

令
$$\begin{cases}K_i(x,y)=P_i^T(x)\Phi(y),\ i=1,2,\\ F(x+y)=\Psi^T(x)\Phi(y),\end{cases}\tag{2-6-18}$$

其中上、下标 T 表示转置.

$$P_i^T(x)=\{P_{i1}(x),P_{i2}(x),\cdots,P_{il}(x)\},\tag{2-6-19}$$

$$\Phi^T(x)=\{e^{-\lambda_1x},e^{-\lambda_2x},\cdots,e^{-\lambda_lx}\},\tag{2-6-20}$$

$$\Psi^T(x)=\{c_1e^{-\lambda_1x},c_2e^{-\lambda_2x},\cdots,c_le^{-\lambda_lx}\},\tag{2-6-21}$$

则积分方程组(2-6-17)化为代数方程组

$$\begin{cases}P_2^T(x)+P_1^T(x)\cdot M(x)=0,\\ -P_1^T(x)+\Psi^T(x)+P_2^T(x)\cdot M(x)=0,\end{cases}\tag{2-6-22}$$

$$M(x)=\int_x^{\infty}\Phi(s)\Psi^T(s)ds=M_{jk}=\frac{c_je^{-(\lambda_j+\lambda_k)x}}{\lambda_j+\lambda_k}.\tag{2-6-23}$$

解方程(2-6-22)得

$$\begin{cases}P_1^T(x)=\Psi^T(x)D^{-1}(x),\\ P_2^T(x)=\Psi^T(x)\cdot M(x)D^{-1}(x),\end{cases}\tag{2-6-24}$$

$$q(x)=-2K_1(x,x)=-2\Psi^T(x)D^{-1}(x)\Phi(x)=2\,\mathrm{Tr}\left[\frac{dM}{dx}D^{-1}\right]\tag{2-6-25}$$

其中

$$D(x)=1+M(x)\cdot M(x).\tag{2-6-26}$$

由 $K_2(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^{\infty}qr\,dx$ 推出

$$q^2(x)=2\frac{d}{dx}K_2(x,x), \tag{2-6-27}$$

$$\begin{aligned}K_2(x,x)&=P_2^T(x)\Phi(x)=-\Psi^T(x)\cdot M(x)\cdot D^{-1}(x)\Phi(x)\\&=-\mathrm{Tr}(\Phi(x)\Psi^T(x)M(x)D^{-1}(x))\\&=\mathrm{Tr}\left[\frac{d}{dx}M(x)\cdot M(x)D^{-1}(x)\right]\\&=-\mathrm{Tr}\left[\frac{d}{dx}D(x)\cdot D^{-1}(x)\right]\\&=-\frac{d}{dx}[\lg\det D(x)],\end{aligned} \tag{2-6-28}$$

$$\begin{aligned}q^2-iq_x&=2\frac{d}{dx}[K_2(x,x)+iK_1(x,x)]\\&=2\frac{d}{dx}\left\{\mathrm{Tr}\left[\frac{d}{dx}M\cdot M\cdot D^{-1}+i\frac{dM}{dx}\cdot D^{-1}\right]\right\}\\&=2\frac{d}{dx}\left\{\mathrm{Tr}\left[\frac{dM}{dx}(M+i)D^{-1}\right]\right\}\\&=-2\frac{d}{dx}\left\{\mathrm{Tr}\frac{d(I-iM)}{dx}\cdot(I-iM)^{-1}\right\}\\&=-2i\frac{d^2}{dx^2}\left\{\ln\det(I-iM)\right\},\end{aligned}$$

$$q=-2\frac{d}{dx}[\mathrm{Im}\ln\det(I-iM)]=2\frac{d}{dx}\mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}\det(I-iM)}{\mathrm{Re}\det(I+iM)}. \tag{2-6-29}$$

这就是 n 个孤立子公式.

利用公式(2-6-29)进一步讨论 S-G 方程的孤立子解.

1. 单孤立子解

对于 $M=\dfrac{c(0)e^{-2\lambda_1x-\frac{t}{2\lambda_1}}}{2\lambda_1}$,

令 $2\lambda_1=a$, $\dfrac{c(0)}{2\lambda_1}=e^{-\delta}$, 则 $M=e^{-ax-\frac{t}{a}-\delta}$,

因此, $\mathrm{Im}\det(I-iM)=-e^{-ax-\frac{t}{a}-\delta}$, $\mathrm{Re}\det(I-iM)=1$,

$$u=4\,\mathrm{tg}^{-1}e^{-ax-\frac{t}{a}-\delta}. \tag{2-6-30}$$

2. 双扭结子解

当 $\lambda_1=\frac{a_1}{2}$, $\lambda_2=\frac{a_2}{2}$, 取 $\frac{c_1}{2\lambda_1}=1$, $\frac{c_2}{2\lambda_2}=-1$, 而且假设

$$a_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{1}{2}},\quad a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{1}{2}},$$

经过运算得

$$\mathrm{Re}\det(I-iM)=1+v^2e^{-(a_1+a_2)x-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)t},$$

$$\mathrm{Im}\det(I-iM)=-e^{-a_1x-\frac{1}{a_1}t}+e^{-a_2x-\frac{1}{a_2}t}.$$

再令 $x=\frac{1}{2}(x'+t')$, $t=\frac{1}{2}(x'-t')$, 则

$$u=4\,\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}t'\right)}{v\,\mathrm{ch}\left(\frac{x'}{\sqrt{1-v^2}}+\delta\right)}\right],\ \frac{1}{v}=e^{\delta}. \tag{2-6-31}$$

这是两个扭结子作相对运动.

3. 呼吸子解

令 $v=i\sqrt{\frac{\omega^2}{1-\omega^2}}$, 这时,

$$\lambda_1=\frac{i}{2}a_1=\frac{1}{2}\left(\omega+i\sqrt{1-\omega^2}\right),$$

$$\lambda_2=\frac{i}{2}a_2=\frac{1}{2}\left(-\omega+i\sqrt{1-\omega^2}\right).$$

这两个特征值互为其轭. 由(2-6-31)算得

$$u=4\,\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\frac{1-\omega^2}{\omega^2}}\sin\omega t\,\mathrm{sech}\left(\sqrt{1-\omega^2}\,x+\delta\right). \tag{2-6-32}$$

这称为呼吸子.

§7 离散的特征值问题与 Toda 晶格

前面几节主要考虑微分方程的特征值问题的正散射与反散射

问题，以及相应的非线性演化方程的解.如果将微分改为相应的差分，那末就将原来微分方程的特征值问题化为差分方程的特征值问题，通常也称为离散的特征值问题. 这一节将通过 Toda 晶格方程所对应的离散特征值问题简单介绍这一类问题的反散射方法.

7.1 Toda 晶格方程及其 lax 对

Toda 晶格方程是一个描述粒子最近邻之间具有指数相互作用的一维粒子链的动力学方程组

$$Q_{ntt} = -\left(e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} - e^{-(Q_n-Q_{n-1})}\right). \tag{2-7-1}$$

随后人们发现，可以用相应于一个离散的特征值问题的 Lax 对导出(2-7-1)，其中

$$\begin{aligned} Lf(n) &= a(n-1)f(n-1) + a(n)f(n+1) + b(n)f(n) \\ &= \lambda f(n), \end{aligned} \tag{2-7-2}$$

$$f_t(n) = Af(n) = a(n)f(n+1) - a(n-1)f(n-1). \tag{2-7-3}$$

这里，$a(n)$，$b(n)$，$f(n)$ 都是隐含 t 的光滑函数，$-\infty<n<\infty$，$a(n)>0$.

当 $|n|\to\infty$ 时，$a(n)\to\frac{1}{2}$，$b(n)\to 0$ 很快，而且

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(1+|n|)\,|2a(n)-1|<\infty,\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(1+|n|)\,|b(n)|<\infty, \tag{2-7-4}$$

那末，由 Lax 方程，导出方程组

$$\begin{cases} a_t(n) = a(n)\left(b(n+1)-b(n)\right), \\ b_t(n) = 2\left(a^2(n)-a^2(n-1)\right). \end{cases} \tag{2-7-5}$$

如果令

$$a(n) = \frac{1}{2}e^{-(Q_n-Q_{n-1})/2},\quad b(n) = -\frac{1}{2}P_{n-1}, \tag{2-7-6}$$

则(2-7-5)化为方程(2-7-1).

$$Q_{nt} = P_n,\ P_{nt} = -\left(e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} - e^{-(Q_n-Q_{n-1})}\right). \tag{2-7-7}$$

7.2 离散特征值(2-7-2)的散射问题

令

$$\lambda=\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \tag{2-7-8}$$

与微分方程的特征值问题类似．可以证明，在$|z|=1$的圆内存在满足以下渐近式的对z解析的Jost解

$$\begin{cases} f_+(n,z)\sim z^n, & n\to\infty, \\ f_-(n,z)\sim z^{-n}, & n\to-\infty. \end{cases} \tag{2-7-9}$$

在$|z|=1$的单位圆上，$f_+(n,z)$，$f_+(n,z^{-1})$与$f_-(n,z)$，$f_-(n,z^{-1})$，是方程(2-7-1)的基本解，因此，

$$\begin{cases} f_+(n,z)=a(z)f_-(n,z^{-1})+b(z)f_-(n,z), \\ f_-(n,z)=\bar{a}(z)f_+(n,z^{-1})+\bar{b}(z)f_+(n,z), \end{cases} \tag{2-7-10}$$

而且

$$|a(z)|^2-|b(z)|^2=1. \tag{2-7-11}$$

同样可以证明，在$|z|<1$的单位圆内，$a(z)$只有有限个单重零点，记为$z_i(i=1,2,\cdots,n)$，对应z_i的归一化的特征函数记为$\zeta(n,z_i)$，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta^2(n,z_i)=1, \tag{2-7-12}$$

而且当$n\to+\infty$时，$\zeta(n,z_i)\sim c_i z_i^n,\ c_i>0.$ (2-7-13)

定义其散射数据如下：

$$ST:\left\{R(z)=\frac{b(z)}{a(z)},\ |z|=1,\ z_j,\ c_j,\ j=0,1,2,\cdots,l\right\} \tag{2-7-14}$$

上面讨论了正散射问题，以下讨论给定ST(2-7-14)后如何恢复$a(n)$，$b(n)$．与连续情况类似，要给出离散的Г-L-M方程．令

$$F(m)=\frac{1}{2\pi i}\oint R(z)z^{m-1}dz+\sum_{j=0}^{l}c_j^2 z_j^m, \tag{2-7-15}$$

$$k(n,m)+F(n+m)+\sum_{n'=n+1}^{\infty}k(n,n')F(n'+m)=0,\ m>n. \tag{2-7-16}$$

定义

$$K(n,n)^{-2}=1+F(2n)+\sum_{n'=n+1}^{\infty}k(n,n')F(n'+n), \tag{2-7-17}$$

则

$$a(n)=\frac{1}{2}\frac{K(n+1,\ n+1)}{K(n,\ n)} \tag{2-7-18}$$

$$b(n)=-\frac{1}{2}\frac{K(n,\ n)K(n-1,\ n)-K(n,\ n+1)K(n-1,\ n-1)}{K(n-1,\ n-1)K(n,\ n)} \tag{2-7-19}$$

与连续情况类似，以下要讨论散射数据随时间的变化规律：

$$\begin{cases} z_j(t)=z_j(0), \\ c_j(t)=c_j(0)e^{t\frac{z_j-z_j^{-1}}{2}} \\ R(z,\ t)=R(z,\ 0)e^{t(z-z^{-1})}. \end{cases} \tag{2-7-20}$$

因此，对 Toda 晶格方程初值问题解的方法如下：

给定 $Q_n(0)$，$P_n(0)$，由(2-7-6)计算 $a_n(0)$，$b_n(0)$，作为(2-7-1)的系数计算散射数据 ST：$\{R(z,\ 0),\ z_i,\ c_i(0),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$，然后由 (2-7-20) 得 ST：$\{R(z,\ t),\ z_i,\ c_i(t),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$，代入(2-7-15)得 $F(m,\ t)$，再解 Г-L-M 方程(2-7-16)．从(2-7-17)得 $K(n,\ n,\ t)$，然后由(2-7-18)、(2-7-19)恢复 $a(n,\ t)$，$b(n,\ t)$．最后从 $a(n,\ t)$定 $Q_n(t)$时，由(2-7-6)第一式，有点不确定，但这问题很容易克服．例如，用 $b(1,\ t)$定 $P_0(t)$，然后由方程 $\dot{Q}_0=P_0$ 定出 $Q_0(t)$，这样以下 $Q_n(t)$就确定了．

7.3 n个孤立子解

设 $R(z,\ 0)$，$R(z,\ t)$恒为零，则

$$F(m)=\sum_{j=0}^{l}c_j^2z_j^m. \tag{2-7-21}$$

令

$$k(n,\ m)=\sum_{j=0}^{l}c_jA_j^mz_j^m, \tag{2-7-22}$$

将(2-7-21)、(2-7-22)代入 Г-L-M 方程(2-7-16)中得

$$\sum_{i=0}^{l}c_iz_i^m\left\{A_i^n+c_iz_i^n+\sum_{j=0}^{l}c_ic_jA_j^n\frac{z_i^{n+1}z_j^{n+1}}{1-z_iz_j}\right\}=0,\ m>n.$$

由此得到对 A_i^n 的代数方程组

$$A_i^n+c_iz_i^n+\sum_{j=0}^{l}c_ic_jA_j^n\frac{z_i^{n+1}z_j^{n+1}}{1-z_iz_j}=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ l, \tag{2-7-23}$$

解得

$$A_j^n=\frac{\det R_n^{(j)}}{\det(I+R_n)},\tag{2-7-24}$$

其中 I 是 $l+1$ 阶单位阵. $R_n^{(j)}$ 是矩阵 R_n 的第 j 列改为 $-(c_0z_0^n,\cdots,c_lz_l^n)^T$,矩阵 R_n 的元素为

$$R_{n,i,j}=c_ic_j\frac{z_i^{n+1}z_j^{n+1}}{1-z_iz_j}.\tag{2-7-25}$$

由(2-7-17)得

$$K(n,n)^{-2}=1+\sum_{j=0}^{l}c_j^2z_j^{2n}+\sum_{i,j=0}^{l}c_jc_i^2A_j^nz_i^n\frac{z_i^{n+1}z_j^{n+1}}{1-z_iz_j}.\tag{2-7-26}$$

为将(2-7-26)简化, 把方程(2-7-23)的第 i 个方程乘以 $c_iz_i^n$, 并对 i 求和得

$$\sum_{i=0}^{l}c_iA_i^nz_i^n+\sum_{i=0}^{l}c_i^2z_i^{2n}+\sum_{i,j=0}^{l}c_i^2c_jA_j^nz_i^n\frac{z_i^{n+1}z_j^{n+1}}{1-z_iz_j}=0.\tag{2-7-27}$$

利用(2-7-27),则(2-7-26)可写为

$$K(n,n)^{-2}=1-\sum_{j=0}^{l}c_jA_j^nz_j^n.\tag{2-7-28}$$

为了将上式表示成两个行列式相除,注意到

$$(R_{n-1}-R_n)_{ij}=c_ic_jz_i^nz_j^n.\tag{2-7-29}$$

又因 $\det(I+R_{n-1})=\det[(1+R_n)-(R_{n-1}-R_n)]$,

等式右边是 $\det(1+R_n)$ 再加上 $I+R_n$ 中的一个列或更多的列, 换为相应于 $R_{n-1}-R_n$ 的列元素的所有行列式之和. 因为行列式中有两列成比例时,此行列式即为零,由(2-7-29)式知上式右边只要留下 $I+R_n$ 中只换有一列的行列式. 又因

$$c_jz_j^n\det(R_n^{(j)})=-c_jz_j^nA_j^n\det(I+R_n),$$

故 $$\det(1+R_{n-1})=\det(1+R_n)\left(1-\sum_{j=0}^{l}c_jz_j^nA_j^n\right),$$

因此(2-7-28)可改写成

$$K(n,n)=\frac{\det(1+R_{n-1})}{\det(1+R_n)}.\tag{2-7-30}$$

令 $\vec{v}=(v_0, \cdots, v_l)$，则

$$\vec{v}R_n\vec{v}^T=\sum_{i,j=0}^{l} c_ic_jv_iv_jz_i^{n+1}z_j^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(z_iz_j)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{l}c_jv_jz_j^{n+k+1}\right]^2>0, \quad c\neq 0.$$

因此，R_n 是正定的，故 $\det(I+R_n)>0$. 令 $\psi_n=\det(I+R_n)$，由(2-7-18)和(2-7-6)，得 $l+1$ 个孤立子解

$$Q_n-Q_{n-1}=-(\log\psi_{n+1}+\log\psi_{n-1}-2\log\psi_n). \qquad (2\text{-}7\text{-}31)$$

如果散射数据中只有一个特征值 $z>0$, $z=e^{-\omega}$, $\omega>0$，归一化因子 $c=ce^{\frac{l}{2}(z-z^{-1})}$，再令 $c=e^{-\delta}$, $k'=\omega+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2\omega})$，则

$$e^{Q_n-Q_{n-1}}-1=\mathrm{sh}^2\omega\,\mathrm{sech}^2(n\omega+t\,\mathrm{sh}\,\omega-k'-s). \qquad (2\text{-}7\text{-}32)$$

对 AKNS 系统离散后的特征值及问题的讨论，可参看章末[7]、[23].

§8 K-P 方程及其反散射解法

Кадомцев-Петвиашвили 方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}+3\sigma^2D^{-1}u_{yy}=0, \quad \sigma^2=\pm 1, \qquad (2\text{-}8\text{-}1)$$

其中 $u=u(x, y, t) \quad D^{-1}=\int_{\infty}^{x}dx,$

是将 KdV 方程向空间二维的自然推广. 这个方程简称为 K-P 方程，当 $\sigma=i$ 时，称为 K-P(I)；当 $\sigma=-1$ 时，称为 K-P(II).

方程(8-1-1)是与特征值问题

$$\sigma\varphi_y+\varphi_{xx}+(u+\lambda)\varphi=0 \qquad (2\text{-}8\text{-}2)$$

相联系的，因此要考虑空间二维的反散射问题. 偏微分方程(2-8-2)的解要通过格林函数化为 Fredholm 型积分方程，因此在讨论其反散射问题时，要借助于 Fredholm 型积分方程的理论. 另外，以下将看到当 $\sigma=i$，和 $\sigma=-i$ 时，方程(2-8-2)基本解的性质

有很大的不同，因此我们对 K-P(I) 与 K-P(II) 将分别讨论. 以下我们总假定函数 $u(x, y)\to 0$ 很快，当 x, y 充分大时.

8.1 方程 K-P(I) 及其反散射解法

在方程(2-8-2)中，令 $\lambda=0$，并令

$$\varphi=\mu e^{i(kx-k^2y)}, \tag{2-8-3}$$

则方程(2-8-2)化为

$$i\mu_y+\mu_{xx}+2ik\mu_x=-\mu u. \tag{2-8-4}$$

先求以下齐次方程的格林函数.

$$iG_y+G_{xx}+2ikG_x=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \tag{2-8-5}$$

$$\begin{cases} G(x-\xi, y-\eta, k)=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(x-\xi)}g(y-\eta, k, \alpha) \\ g(y-\eta, k, \alpha)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dq\frac{e^{iq(y-\eta)}}{q+(\alpha^2+2k\alpha)}. \end{cases} \tag{2-8-6}$$

若 $k=k_R+ik_I$，函数 g 通过 $k_I=0$ 时有跳量，我们用 g^+，g^- 分别表示 $k_I\geqslant 0$ 和 $k_I\leqslant 0$，则

$$\begin{cases} g^+=e^{-i\alpha(\alpha+2k)(y-\eta)}\begin{cases} -H(\eta-y) & \alpha>0, \\ H(y-\eta) & \alpha<0, \end{cases} \\ g^-=e^{-i\alpha(\alpha+2k)(y-\eta)}\begin{cases} H(y-\eta) & \alpha>0, \\ -H(\eta-y) & \alpha<0. \end{cases} \end{cases} \tag{2-8-7}$$

这里 $H(x)$ 是 Heaviside 函数，即 $H(x)=0$，当 $x<0$；$H(x)=1$，当 $x>0$. 函数 g^+，g^- 分别在 $k_I>0$ 及 $k_I<0$ 是 k 的解析函数. 利用格林函数得到方程(2-8-4)在 $k_I\geqslant 0$ 及 $k_I\leqslant 0$ 时的两个解

$$\mu^+(x, y, k)=1+\frac{i}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{y}d\eta\int_{-\infty}^{0}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\right.$$

$$\left.-\int_{y}^{\infty}d\eta\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\right)Q\,[\text{illegible}]\,\alpha, k, x-\xi, y$$

$$-\eta)u(\xi, \eta)\mu^+(\xi, \eta, k), \tag{2-8-8$^+$}$$

$$\mu^-(x, y, k)=1+\frac{i}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{y}d\eta\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\right.$$

$$-\int_y^\infty d\eta\int_{-\infty}^0 d\alpha\int_{-\infty}^\infty d\xi\Big)Q(k+\alpha,\ k,\ x-\xi,\ y-\eta)u(\xi,\ \eta)\mu^-(\xi,\ \eta,\ k),\quad (2\text{-}8\text{-}8)^-$$

这里 $Q(\alpha,\ \beta,\ x,\ y)\equiv\exp\{(i(\alpha-\beta)x-i(\alpha^2-\beta^2)y\}$.

定义

$$T^+(k,\ l)=-\frac{i}{2\pi}H(l-k)\iint_{-\infty}^\infty d\xi d\eta Q(l,\ k,\ -\xi,\ -\eta)u(\xi,\ \eta)\cdot\mu^+(\xi,\ \eta,\ k),\qquad (2\text{-}8\text{-}9)^+$$

$$T^-(k,\ l)=-\frac{i}{2\pi}H(k-l)\iint_{-\infty}^\infty d\xi d\eta Q(l,\ k,\ -\xi,\ -\eta)u(\xi,\ \eta)\cdot\mu^-(\xi,\ \eta,\ k)\qquad (2\text{-}8\text{-}9)^-$$

可将(2-8-8)改写为

$$\mu^+(x,\ y,\ k)=1+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^y d\eta\int_{-\infty}^\infty dl\int_{-\infty}^\infty d\xi\, Q(l,\ k,\ x-\xi,\ y-\eta)u(\xi,\ \eta)\mu^+(\xi,\ \eta,\ k)+\int_{-\infty}^\infty T^+(k,\ l)Q(l,\ k,\ x,\ y)dl,\qquad (2\text{-}8\text{-}10)^+$$

$$\mu^-(x,\ y,\ k)=1+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^y d\eta\int_{-\infty} dl\int_{-\infty}^\infty d\xi Q(l,\ k,\ x-\xi,\ y-\eta)u(\xi,\ \eta)\mu^-(\xi,\ \eta,\ k)+\int_{-\infty}^\infty T^-(k,\ l)Q(l,\ k,\ x,\ y)dl,\qquad (2\text{-}8\text{-}10)^-$$

再令 $T(l,\ k)=T^+(l,\ k)-T^-(l,\ k)$，而且当 $k_I=0$ 时，令

$$\mu^+(x,\ y,\ k)-\mu^-(x,\ y,\ k)=\int_{-\infty}^\infty \mu^-(x,\ y,\ l)f(l,\ h)Q(l,\ h,\ x,\ y)dl,\qquad (2\text{-}8\text{-}11)$$

则从(2-8-11)及(2-8-10)得

$$\int_{-\infty}^\infty\mu^-(x,\ y,\ l)f(l,\ b)Q(l,\ k,\ x,\ y)dl=\mu^+(x,\ y,\ h)-\mu^-(x,y,h)$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^y d\eta\iint_{-\infty}^\infty dld\xi\int_{-\infty}^\infty Q(l,\ k,\ x-\xi,\ y$$

$$-\eta)u(\xi,\eta)\mu^{-}(\xi,\eta,\rho)f(\rho,k)Q(\rho,k,\xi,\eta)d\rho$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}T(k,l)Q(l,k,x,y)dl$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{y}d\eta\iiint_{-\infty}^{\infty}d\xi dl d\rho Q(l,\rho,x-\xi,y$$

$$-\eta)u(\xi,\eta)\mu^{-}(\xi,\eta,\rho)f(\rho,k)Q(\rho,k,x,y)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}T(k,l)Q(l,k,x,y)dl.$$

另一方面，从(2-8-10)乘以 $f(\rho,k)Q(\rho,k,x,y)$，对 ρ 积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu^{-}(x,y,\rho)f(\rho,k)Q(\rho,k,x,y)d\rho$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\rho,k)Q(\rho,k,x,y)d\rho$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{y}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}dl\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\rho Q(l,\rho,x-\xi,y$$

$$-\eta)u(\xi,\eta)\mu^{-}(\xi,\eta,\rho)f(\rho,k)Q(\rho,k,x,y)$$

$$+\iint_{-\infty}^{\infty}T^{-}(\rho,l)f(\rho,k)Q(l,\rho,x,y)Q(\rho,k,x,y)d\rho dl$$

比较以上两个式子，即得 $f(l,k)$ 要满足的积分方程为

$$f(l,k)+\int_{-\infty}^{\infty}T^{-}(\rho,l)f(\rho,k)d\rho=T(k,l). \qquad (2\text{-}8\text{-}12)$$

如果令

$$K^{+}(x,y,\xi,\eta,k)=\frac{i}{2\pi}\Big(H(y-\eta)\int_{-\infty}^{0}d\alpha$$

$$-H(\eta-y)\int_{0}^{\infty}d\alpha\Big)Q(k+\alpha,k,x$$

$$-\xi,y-\eta)u(\xi,\eta),\ k_I\geqslant 0,$$

$$K^{-}(x,y,\xi,\eta,k)=\frac{i}{2\pi}\Big(H(y-\eta)\int_{0}^{\infty}d\alpha$$

$$-H(\eta-y)\int_{-\infty}^{0}d\alpha\Big)Q(k+\alpha,k,x-\xi,y$$

$$-\eta)u(\xi,\eta),\ k_I\leqslant 0.$$

由关系式

$$\int_a^b \alpha\cdot y e^{i\alpha x - i\alpha(\alpha+2k)y} d\alpha = \frac{x-2ky}{2}\int_a^b e^{i\alpha x - i\alpha(\alpha+2k)y} d\alpha + \frac{i}{2} e^{i\alpha x - i\alpha(\alpha+2k)y}\Big|_a^b$$

可得

$$\frac{\partial K^+(k)}{\partial k} = \frac{\partial K^+(x,y,\xi,\eta,k)}{\partial k} = -i[(x-\xi)-2k(y-\eta)]K^+(x,y,\xi,\eta,k) + \frac{i}{2\pi}u(\xi,\eta),\ k_I\geqslant 0,$$

(2-8-13)$^+$

$$\frac{\partial K^-(k)}{\partial k} = \frac{\partial K^-(x,y,\xi,\eta,k)}{\partial k} = -i[(x-\xi)-2k(y-\eta)]K^-(x,y,\xi,\eta,k) - \frac{i}{2\pi}u(\xi,\eta),\ k_I\leqslant 0.$$

(2-8-13)$^-$

以下假定积分方程(2-8-8)$^\pm$的齐次方程分别在$k_I>0$, $k_I<0$都只有单重的特征值k_j^+, $\mathrm{Im}k_j^+>0$, 及k_j^-, $\mathrm{Im}k_j^-<0$, 因此在$k_j^\pm$的附近,

$$\mu^\pm(x,y,k) = \mu_j^\pm(x,y,k_j^\pm) + \frac{\Phi_j^\pm(x,y)}{k-k_j^\pm}.$$

将上式代入(2-8-8)得

$$\mu_j^\pm(x,y,k_j^\pm) + \frac{\Phi_j^\pm(x,y)}{k-k_j^\pm} = 1 + \iint_{-\infty}^{\infty}\left(K^\pm(k_j^\pm) + (k-k_j^\pm)\frac{\partial K^\pm(k_j^\pm)}{\partial k} + \cdots\right)\left(\mu^\pm(\xi,\eta,k_j^\pm) + \frac{\Phi_j^\pm(\xi,\eta)}{k-k_j^\pm}\right)d\xi d\eta,$$

比较展开式系数得

$$\Phi_j^\pm(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} K^\pm(x,y,\xi,\eta,k_j^\pm)\Phi_j^\pm(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\mu_j^\pm(x,y,k_j^\pm)=1+\iint_{-\infty}^{\infty}K^\pm(x,y,\xi,\eta,k_j^\pm)\mu_j^\pm(\xi,\eta,k_j^\pm)d\xi d\eta$$

$$+\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K^\pm(x,y,\xi,\eta,k_j^\pm)}{\partial k}\Phi_j^\pm(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

令 $\mu_j^\pm(x,y,k_j^\pm)=-i(x-2k_j^\pm y)\Phi_j^\pm(x,y)+\tilde{\mu}_j^\pm(x,y,k_j^\pm)$，再用(2-8-13)$^\pm$ 式得

$$\tilde{\mu}_j^\pm(x,y,k_j^\pm)=1+\iint_{-\infty}^{\infty}K^\pm(x,y,\xi,\eta,k_j^\pm)\tilde{\mu}_j^\pm(\xi,\eta,k_j^\pm)d\xi d\eta$$

$$\pm\frac{i}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}u(\xi,\eta)\Phi_j^\pm(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

由 Fredholm 定理知道，

$$1\pm\frac{i}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}u(\xi,\eta)\Phi_j^\pm(\xi,\eta)d\xi d\eta=0,$$

因此，$\tilde{\mu}_j^\pm(x,y,k_j^\pm)=\iint_{-\infty}^{\infty}K^\pm(x,y,\xi,\eta,k_j^\pm)\tilde{\mu}_j^\pm(\xi,\eta,k_j^\pm)d\xi d\eta.$

由此知 $\tilde{\mu}_j^\pm(x,y,k_j^\pm)$ 必与 $\Phi_j^\pm(x,y)$ 线性相关，故存在常数 $-i\gamma_j^\pm$ 使

$$\tilde{\mu}^\pm(x,y,k_j^\pm)=-i\gamma_j^\pm\Phi_j^\pm(x,y),$$

因此，

$$\lim_{k\to k_j^\pm}\left(\mu^\pm(x,y,k)-\frac{\Phi_j^\pm(x,y)}{k-k_j^\pm}\right)=-i(x+2k_j^\pm y+\gamma_j^\pm)\Phi_j^\pm(x,y). \tag{2-8-14}$$

对 $\mu^+(x,y,k)$ 及 $\mu^-(x,y,k)$ 分别在 k 的上、下半平面做迴路积分，并利用(2-8-11)计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu^+(x,y,z)-\mu^-(x,y,z)}{z-k}dz.$$

最后再分别取 $k=k_j^\pm$，及 $\operatorname{Im}k<0$，$k-io$，趋于实轴得到以下两个方程

$$-i(x-2k_j^2+\gamma_j^{\pm})\Phi_j^2(x, y)-\sum_{j,l=1}^{N^+}{}'\frac{\Phi_l^+(x, y)}{k_j^{\mp}-k_l^+}-\sum_{j,l=1}{}'\frac{\Phi_l^-(x, y)}{k_j^{\mp}-k_l^-}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(l, z, x, y)\mu^-(x, y, l)f(l, z)dzdl}{z-k_j^+}=1, \quad (2\text{-}8\text{-}15)$$

这里$\sum'$表示不对分母为零的项求和.

$$\mu^-(x, y, k)-\sum_{j=1}^{N}\frac{\Phi_j^+(x, y)}{k-k_j^+}-\sum_{j=1}^{N^-}\frac{\Phi_j^-(x, y)}{k-k_j}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{Q(l, z, x, y)\mu^-(x, y, l)f(l, z)dzdl}{z-k+io}=1$$

(2-8-16)

我们定义散射数据

ST: $\{f(l, k),\ \mathrm{Im}l=\mathrm{Im}k=0,\ k_j^{\pm},\ \gamma_j^+,\ j=1, 2, \cdots, N^+;\ k_j^-,\ \gamma_j^-;\ j=1, 2, \cdots, N^-\}$

由以上讨论知，当给定$u(x, y)$后可定出ST，反之，给定ST后，由(2-8-15)、(2-8-16)可求得$\Phi_j^{\pm}(x, y)$及$\mu^-(x, y, k)$. 由(2-8-16)对k的一次渐近式(即取$o\left(\frac{1}{k}\right)$的系数）及方程(2-8-2)可得

$$u(x, y)=-2i\frac{\partial}{\partial x}\left[\lim_{k\to\infty}(\mu^-(x, y, k)-1)k\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[-2i\sum_{j=1}^{N}\Phi_j^+(x, y)-2i\sum_{j=1}^{N^-}\Phi_j^-(x, y)\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}dldkQ(l, k, x, y)\mu^-(x, y, l)f(l, k).$$

(2-8-17)

以下要讨论散射数据随时间变化的规律，为此要给出对应方程(2-8-1)中$\sigma=i$时的Lax对.

$$\begin{cases} L\varphi=i\varphi_y+\varphi_{xx}+u\varphi=\lambda\varphi, \\ \varphi_t=A_k\varphi=-4\varphi_{xxx}-6u\varphi_x-3u_x\varphi+3iD^{-1}u_y\varphi-4ik^3\varphi. \end{cases} \quad (2\text{-}8\text{-}18)$$

直接可以验证，由 $L_t=[A_k, L]$ 可推出方程 K-P(I)。

令 $\varphi^+=\mu^+e^{i(kx-k^2y)}$，$\varphi^-=\mu^-e^{i(kx-k^2y)}$，则(2-8-11)可改写为

$$\varphi^+(x, y, k, t)=\varphi^-(x, y, k, t)+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^-(x, y, l, t)f(l, k, t)dl$$

对上式作用算子 A_k，并用 $A_k=A_l+4i(k^3-l^3)$，得

$$f_t(k, l, t)=4i(l^3-k^3)f(k, l, t). \tag{2-8-19}$$

当 x、y 充分大时，对(2-8-18)第二式取渐近式

$$\mu_t^{\pm}+4\mu_{xxx}^{\pm}+12ik\mu_{xx}^{\pm}-12k^2\mu_x^{\pm}\sim 0.$$

在 $k=k_j^{\pm}$ 附近，$\mu^{\pm}=\mu_j^{\pm}+\dfrac{\Phi_j^{\pm}}{k-k_j^{\pm}}$，代入上式，取 $(k-k_j^{\pm})^{-2}$ 的系数即推出

$$\frac{\partial k^{\pm}}{\partial t}=0. \tag{2-8-20}$$

为了求 $\nu_j^{\pm}$ 的变化规律，注意 $\Phi_j^{\pm}$ 当 x, y 充分大时的渐近式

$$\Phi_{jt}^{\pm}+4\Phi_{jxxx}^{\pm}+12ik_j^{\pm}\Phi_{jxx}^{\pm}-12(K_j^{\pm})^2\Phi_{jx}^{\pm}\sim 0.$$

用 $\mu^{\pm}$ 及 $\Phi_j^{\pm}$ 的渐近式及(2-8-14)得

$$\frac{\partial \nu_j^{\pm}}{\partial t}=12(k_j^{\pm})^2. \tag{2-8-21}$$

对 K-P(I) 初值问题求解方法如下：

当给定初值 $u=u(x, y, 0)$，定出其散射数据 $k_j^{\pm}(0)$，$\nu_j^{\pm}(0)$ 及 $f(k, l, 0)$。由方程(2-8-21)、(2-8-20)、(2-8-19)，求出

$$k_j^{\pm}(t)=k_j^{\pm}(0),\ \nu_j^{\pm}(t)=12(k_j^{\pm})^2t+\nu_j^{\pm}(0),$$

$$f(k, l, t)=f(k, l, 0)e^{4i(l^3-k^3)t}.$$

从方程(2-8-15)、(2-8-16)求出 $\Phi_j^{\pm}(x, y, t)$，$\mu^-(x, y, t, k)$，再由(2-8-17)式求出解 $u=u(x, y, t)$。

若 $f(k, l, 0)=0$，解

$$u(x, y, t)=2\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{n}(\Phi_j^+(x, y, t)+\Phi_j^-(x, y, t)),$$

这里 $\Phi_j^{\pm}(x, y, t)$ 是以下代数方程的解：

$$[x-2k_j^+y+12(k_j^+)^2t+\nu_j^+(0)]\Phi_j^+-i\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\Phi_l^+}{k_j^+-k_l^+}+\frac{\Phi_l^-}{k_j^+-k_l^-}\right)=1.$$

这个解 $u(x, y, t)$ 称为 lump solution (波浪解). 如只取

$$k^+=p_1+ip_2,\ k^-=p_1-ip_2,\ \nu^\pm(0)=0,$$

经过计算得

$$u(x, y, t)$$

$$=4\left\{\frac{-[x-2p_1y+12(p_1^2-p_2^2)t]^2+[2p_2y-4p_1p_2t]^2+\frac{1}{4p_2^2}}{\left[(x-2p_1y+12(p_1^2-p_2^2)t]^2+(2p_2y-24p_1p_2t)^2+\frac{1}{4p_2^2}\right]^2}\right\}$$

(2-8-22)

这个解是以 $o\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$ 趋于零, x 方向的速度 $v_x=12(p_1^2+p_2^2)$, y 方向速度 $v_y=12p_1^2$.

顺便指出, 当 $\phi_j^+=0$ 时, 利用

$$i\int_{-\infty}^{x}e^{i\xi(k-r-i\varepsilon)}d\xi=\frac{e^{ix(k-r)}}{k-r-i\varepsilon}$$

(2-8-16) 乘以 $f(k, k')Q(x, y, k, k')$, 并对 dk, dk' 积分, 可得到 G-L-M 型的积分方程.

8.2 方程 K-P(II) 及其反散射解法

在方程 (2-8-2) 中, 令 $\lambda=0$, 并令

$$\varphi=\mu e^{(ikx-k^2y)}, \tag{2-8-23}$$

则方程 (2-8-2) 化为

$$-\mu_y+\mu_{xx}+2ik\mu_x+u\mu=0. \tag{2-8-24}$$

方程 (2-8-24) 的格林函数

$$\begin{cases} G(x-\xi, y-\eta, k)=\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha e^{i\alpha(x-\xi)}g(y-\eta, k, \alpha), & (2\text{-}8\text{-}25)\\ g(y-\eta, k, \alpha)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-iq(y-\eta)}}{iq+\alpha(\alpha+2k)}dq. \end{cases}$$

若 $k=k_R+ik_I$, 则

$$G(x-\xi,\ y-\eta,\ k)=\Big\{H(k_R)\Big[-H(\eta-y)\int_{-2k_R}^{\infty}d\alpha$$
$$+H(y-\eta)\Big(\int_0^{\infty}d\alpha+\int_{-\infty}^{-2k_R}d\alpha\Big)\Big]$$
$$+H(-k_R)\Big[-H(\eta-y)\int_0^{-2k_R}d\alpha$$
$$+H(y-\eta)\Big(\int_{-\infty}^{0}d\alpha$$
$$+\int_{-2k_R}^{\infty}d\alpha\Big)\Big]\Big\}\frac{Q(k+\alpha,\ k,\ x-\xi,\ y-\eta)}{2\pi}.$$

(2-8-26)

这里 Q 应定义为 $Q(l,\ k,\ x,\ y)=\exp\{i(l-k)x-(l^2-k^2)\}y$.

方程(2-8-25)有满足以下积分方程的解,

$$\mu(x,\ y,\ k)=1+\iint_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,\ y-\eta;\ k)u(\xi,\ \eta)\,\mu(\xi,\ \eta,\ k)d\xi d\eta.$$

(2-8-27)

由于 $\mu(x,\ y,\ ik_I+0)=\mu(x,\ y,\ ik_I-0)$, 因此这个解通过 $k_R=0$ 没有跳量,而且明显地依赖于 k_R, 因此由(2-8-27)所规定的特征函数 $\mu(x,\ y,\ k)$不能说对 k 是解析的, 但对所有的复数 k 它是有界的. 通常也将 μ 记为 $\mu(x,\ y,\ k_R,\ k_I)$, 这时要用到推广的勾西公式(见章末[16])

$$\mu(x,y,\ k)=\frac{1}{2\pi i}\iint_R\frac{\frac{\partial\mu(x,y,z)}{\partial\bar z}dz\wedge d\bar z}{z-k}+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\mu(x,\ y,\ z)}{z-k}\,dz.$$

(2-8-28)

这里 R 是一个区域, C 是 R 的边界, $\frac{\partial}{\partial\bar z}$ 定义为

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial z_R}+i\frac{\partial}{\partial z_I}\Big).$$

如果$f(k)$是k的解析函数，则$\dfrac{\partial f(k)}{\partial \bar{k}}=0$，在目前讨论的问题中，由于$\mu(x, y, z)-1$当$z$充分大时趋于零，因此在(2-8-28)中，$R$可取为全复平面．令$C\to\infty$，由此得到

$$\mu(x,y,k)=1+\frac{1}{2\pi i}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}(x,y,z)}{z-k}dz\wedge d\bar{z}. \tag{2-8-29}$$

为了简单起见，以下假定(2-8-27)的齐次方程无解．下面引进$\bar{\partial}$问题．

对方程(2-8-27)求$\bar{\partial}$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{k}}\right)$，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu(x,y,k)}{\partial\bar{k}}=&\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G}{\partial\bar{k}}(x-\xi,y-\eta,k)u(\xi,\eta)\mu(\xi,\eta,k)d\xi d\eta\\&+\iint_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,y-\eta,k)u(\xi,\eta)\frac{\partial\mu}{\partial\bar{k}}(\xi,\eta,k)d\xi d\eta\end{aligned}$$

(2-8-30)

由于

$$\frac{\partial G}{\partial\bar{k}}(x-\xi,y-\eta,k)=\frac{\operatorname{sgn}(-k_R)}{2\pi}e^{-2k_Ri(x-\xi)+4k_Rk_Ii(y-\eta)}, \tag{2-8-31}$$

我们令

$$F(k_R,k_I)=\frac{\operatorname{sgn}(-k_R)}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}u(\xi,\eta)\mu(\xi,\eta,k)^{2k_Ri\xi-4k_Rk_Ii\eta}d\xi d\eta,$$

(2-8-32)

$$\begin{aligned}N(x,y;k_R,k_I)=&e^{-2k_Rix+4k_Rk_Iiy}\\&+\iint_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi,y-\eta;k)u(\xi,\eta)N(\xi,\eta;k_R,k_I)d\xi d\eta,\end{aligned}$$

(2-8-33)

则(2-8-30)可写为

$$\frac{\partial\mu(x,y,k)}{\partial\bar{k}}=F(k_R,k_I)N(x,y;k_R,k_I). \qquad (2\text{-}8\text{-}34)$$

为了与 $\bar{\partial}$ 联系起来，我们将(2-8-26)改写成

$$G(x-\xi,y-\eta,h)=\Big\{H(k_R)\Big[-H(\eta-y)\int_{-2k_R}^{0}d\alpha$$

$$+H(y-\eta)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha-H(y-\eta)\int_{-2k_R}^{0}d\alpha\Big]$$

$$+H\Big[(-k_R)\Big[-H(\eta-y)\int_{0}^{-2k_R}d\alpha-H(y-\eta)\int_{0}^{-2k_R}d\alpha$$

$$+H(y-\eta)\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\Big]\Big\}\frac{1}{2\pi}Q(\alpha+K,K,x-\xi,y-\eta)$$

由上式容易得到

$$G(x-\xi,y-\eta,-\bar{k})=G(x-\xi,y-\eta,k)e^{2k_Ri(x-\xi)-4k_Ik_Ri(y-\eta)}. \qquad (2\text{-}8\text{-}35)$$

由(2-8-35)及(2-8-33)得到

$$N(x,y;k_R,k_I)=\mu(x,y,-\bar{k})e^{-2k_Rix+4k_Ik_Riy}. \qquad (2\text{-}8\text{-}36)$$

由(2-8-36)、(2-8-34)、(2-8-29)得到

$$\mu(x,y,k)=1+\frac{1}{2\pi i}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{F(z_R,z_I)e^{-2z_Rix+4z_Rz_Iiy}\mu(x,y,-\bar{z})}{z-k}dz\wedge d\bar{z} \qquad (2\text{-}8\text{-}37)$$

与 K-P(I)一样讨论知，

$$u(x,y)=2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}F(z_R,z_I)\mu(x,y;-\bar{z})e^{-2z_Rix+4z_Rz_Iiy}dz\wedge d\bar{z}. \qquad (2\text{-}8\text{-}38)$$

由于我们假定(2-8-27)齐次方程无解，因此这时散射量就是 $F(k_R,k_I)$. 为了求当 $u(x,y,t)$ 是 K-P(II) 的解时对应的 $F(k_R,k_I,t)$ 对时间的变化规律，我们要用到对应于方程 K-P(II) 的 Lax 对，这时

$$\begin{cases} L\varphi=(-\varphi_y+\varphi_{xx}+u)\varphi=\lambda\varphi, \\ \varphi_t=A_k\varphi=-4\varphi_{xxx}-6u\varphi_x-3u_x\varphi-3D^{-1}u_y\varphi-4ik^3\varphi. \end{cases} \tag{2-8-39}$$

方程(2-8-34)可写成

$$\frac{d\varphi(x,y,k)}{d\bar{k}}=\varphi(x,y,-\bar{k})F(k_R,k_I)e^{8k_Rk_Iy}. \tag{2-8-40}$$

将算子 A_k 作用于(2-8-40),即得

$$F_t=-4i(k^3+\bar{k}^3),$$

故

$$F(k_R,k_I,t)=F(k_R,k_I,0)e^{-4i(k^3+\bar{k}^3)t}. \tag{2-8-41}$$

因此,对 K-P(II)的求解,当给定初始条件 $u(x,y,0)$ 时,先通过解(2-8-27)得 $\mu(x,y,k,0)$,再由(2-8-32)求得 $F(k_R,k_I,0)$. 从(2-8-41)得 $F(k_R,k_I,t)$,再由(2-8-37)求得 $\mu(x,y,k,t)$. 从(2-8-38)求出 $u(x,y,t)$.

§9 几点说明

以上是通过几个典型的方程介绍反散射方法,在本节中我们要指出这个方法与经典黎曼-希尔伯特问题(R-H. Problem)的关系,在 Schrödinger 方程反问题中,式子

$$\frac{m_-(x,k)}{a(k)}=m_+(x,-k)+R_+(k)m_+(x,k),\ \operatorname{Im}k=0. \tag{2-9-1}$$

如果令 $\mu^+(x,k)=\dfrac{m_-(x,k)}{a(k)}$, $\mu^-(x,k)=m_+(x,-k)$,

则(2-9-1)式可改写成

$$\mu^+(x,k)-\mu^-(x,k)=R_+(k)\mu^-(x,-k),\ \operatorname{Im}k=0. \tag{2-9-2}$$

$\mu^+(x,k)$ 是 $\operatorname{Im}k>0$ 的半纯函数,$\mu^-(x,k)$ 是 $\operatorname{Im}k<0$ 的解析函数. 这可以看作是 R-H 问题. 我们注意对 K-P(I) 反问题讨论中的(2-8-11),它可以看作是带积分的 R-H. Problem,由(2-9-1)式

可以得到

$$m_+(x, k) = e^{2ikx}\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j^2 N_j(x)}{k+k_j} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_+(z) m_+(x, z) dz}{z+k+i_0}\right), \tag{2-9-3}$$

$$N_l(x) = e^{2ik_l x}\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j^2 N_j(x)}{k_l+k_j} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_+(z) m_+(x, z) dz}{z+k_l}\right). \tag{2-9-4}$$

这两个式子与(2-8-15)、(2-8-16)相似,也有与(2-8-17)相似的式子,即

$$q(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{n} 2ic_j^2 N_j(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_+(z) m_+(x, z) dz\right). \tag{2-9-5}$$

我们还要指出,以上这些问题都可以将它看为是$\bar{\partial}$问题. 对 K-P(I),将 $\mu^+(x, y, k)$, $\mu^-(x, y, k)$统一写成 $\mu(x, y, k)$时有

$$\mu(x, y, k) = \begin{cases} 1 + \tilde{\mu}^+(x, y, k) + \sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{\phi_j^+(x, y)}{k - k_j^+}, & \text{Im}k \geqslant 0, \\ 1 + \tilde{\mu}^-(x, y, k) + \sum\limits_{j=1}^{N^-} \dfrac{\phi_j^-(x, y)}{k - k_j^-}, & \text{Im}k \leqslant 0. \end{cases} \tag{2-9-6}$$

这里 $\tilde{\mu}^+(x, y, k)$, $\tilde{\mu}^-(x, y, z)$是分别在 $\text{Im}k>0$, $\text{Im}k<0$ 的解析函数. 利用关系式

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \mu^\pm(x, y, k) = 0, \frac{\partial}{\partial \bar{k}}\left(\frac{1}{k-k_j}\right) = \pi\delta(k-k_j). \tag{2-9-7}$$

(2-9-6)式可写成$\bar{\partial}$形式

$$\frac{\partial \mu}{\partial \bar{k}} = \begin{cases} \pi \sum\limits_{j=1}^{N^+} \phi_j^+(x, y)\delta(k-k_j^+), & \text{Im}k>0, \\ \mu^+(x, y, k) - \mu^-(x, y, k), & \text{Im}k=0, \\ \pi \sum\limits_{j=1}^{N^-} \phi_j^-(x, y)\delta(k-k_j^-), & \text{Im}k<0. \end{cases} \tag{2-9-8}$$

由推广的勾西公式(2-8-28)得(2-8-16),再令 $k \to k_j$, 得(2-8-15).

以上说明,不管 KdV 或 K-P 方程所联系的特征值问题的反散射问题,都可以通过$\bar{\partial}$来处理. 对 AKNS 特征值问题的反散射,

也同样可以通过 $\bar{\partial}$ 来处理(见章末[26]). 对离散的特征值问题的反散射,也可用 $\bar{\partial}$ 来处理,只不过其跳量是在单位圆上发生. 目前可以用 $\bar{\partial}$ 来处理高阶方程(或高阶方程组)的特征值问题的反问题,并已用于讨论空间为 n 维的偏微分方程的反散射问题. 因此,这是当前十分值得注意的动向(见章[24]、[25]),读者可以在以上文章中找到有关的文献.

以上我们只讨论了求空间变量趋于无穷时函数很快趋于零的解,实际问题还要求满足周期边界条件的解,这可以借助周期位势的谱理论来讨论(见章末[7]、[11]). 在讨论 CKdV 方程的解时,甚至要讨论 Schrödinger 方程的位势趋于无穷大的反问题. 这些都应用到一般微分算子的谱理论(见章末[11]、[17]).这就很自然地提出比反散射方程更一般的反谱变换法的概念.

反散射方法与孤立子理论其他方面的数学问题有十分密切的联系,将孤立子方程看为完全可积系统时,散射数据 ST 是完全可积系统的角变量与作用变量(见章末[3]). 将反散射方法看作非线性的傅里叶分析,它与贝克隆变换法中的非线性迭加原则互相呼应,就象一对孪生姐妹(见章末[8]、[15]).

反散射方法不但是求解一类非线性演化方程的有力工具,而且也是在地球物理探矿等其他许多科学技术领域中重要的方法(见章末[28]). 近来在对超对称量子力学的研究中,也得到应用(见章末[27]).可以断言,非线性傅里叶分析也将象傅里叶分析一样,在科学发展中将起到应有的作用.

参 考 文 献

[1] 谷内俊弥等,徐福元等译,非线性波动,原子能出版社,1981.

[2] 艾克霍思等,黄迅成译,逆散射变换和孤立子理论, 上海科技出版社,1984.

[3] V. E. 扎哈罗夫等,彭启才译,孤立子理论,科学出版社, 1985.

[4] 郭柏灵、庞小峰,孤立子,科学出版社. 1987.

[5] K. Chadon,P. C. Sabatier; Inverse problem in quantum scattaring theory, Springer, 1977.

[6] G. L. Lamb, Elements of soliton theory, 1980.

[7] M. J. Ablowitz, H. Seger, Soliton and inverse scattering transform, SIAM, Philadelphia, 1981.

[8] F. Calegero, A. Degasperis, The spectral tronsform and soliton, North. Horand, 1982.

[9] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, Solitonsand nonlinear wave equation, 1982.

[10] A. C. Newell, Soliton in methematics and physics,SIAM,Philadelphia,1985.

[11] F. Calogere, ed Nonluiear equations solvable by the spectral transform, Reseach notes in mathematics, 26, 1978.

[12] R. Bullorgh, P. Cardrey, Soliton, Topics in current physics 17, 1980.

[13] A. C. Scott等著,段赓荣译,孤立子应用科学中的一个新概念, 重资(84)034号.

[14] 屠规彰, 非线性方程的逆散射解法, 应用数学与计算数学, 第1期 1979.

[15] 李翊神,特征值问题,散射与反散射理论,南京大学学报,1987.

[16] L. Hörmander, Complex Analysis in Several Variables, 1966.

[17] Li Yishen, Chin Ann moth. 2 (1981), 147～156.

[18] 李翊神,中国科学,A辑(5), 1982, 385～390.

[19] 李翊神、庄大蔚,数学学报,25 (4), 1982, 464～474.

[20] Li Yishen, Proceeding of the 1980 Beijing symposium on differential geomertry and differential equations vol. 3, 1297～1308.

[21] Zhuong Dawei, Li Yishen, Acta math sinica new series, 1985, 55～71.

[22] 庄大蔚,北大学报,1982, 1～8.

[23] 程艺,中国科学,A 辑, (3), 1986, 243～254.

[24] M. J. Ablowitz, A I. Nechman, Physica D, 18 (1985), 223～241.

[25] R. Beals, R. R. coifmen, Physica D, 18 (1985), 242～249.

[26] M. Janlent, M. manna,Phys, lett A, 117 (1986), 62～66.

[27] W. Kwong, T. L. Rosner, Prog, Theory phys suppl, 86 (1986), 366～376.

[28] W. M. Boernex, A. K. Jordax, I. W. Kay, IEEE Trans autennes propagat, AP-29 (1981), 185～189.

第三章

Bäcklund 变换

谷超豪

§1 由来和定义

1883 年，几何学家 Bäcklund 在研究负常曲率曲面时，得到了 sine-Gordon 方程的一个有趣的性质（见本章末[1]、[2]、[3]及本书第七章）.

设 u 是 sine-Gordon 方程

$$u_{\xi\eta}=\sin u \tag{3-1-1}$$

的一个解. 考察

$$\begin{aligned} u'_\xi &= u_\xi - 2\beta\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right), \\ u'_\eta &= -u_\eta+\frac{2}{\beta}\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right). \end{aligned} \tag{3-1-2}$$

把(3-1-2)的第一式关于 η 求导，并将出现的 u'_η 用(3-1-2)的第二式代入，得出 $u'_{\xi\eta}$ 的表达式. 同样，对(3-1-2)的第二式关于 ξ 求导，并把 u'_ξ 用第一式代入，得出了 $u'_{\eta\xi}$ 的表达式. 使这两个式子相等，就得到(3-1-1)式. 所以，当 u 是 sine-Gordon 方程的一解时，(3-1-2)是一个完全可积的方程组，因而对于任何初值 $\xi=\xi_0$，$\eta=\eta_0$，$u'=u_0$，在单连区域中唯一地存在(3-1-2)的一解 u'，它仍然是 sine-Gordon 方程的解. 这种由 sine-Gordon 方程的一

解 u 而得出另一解 u' 的变换，被称为 Bäcklund变换.

由 u 作 u'（或由 u' 作 u）需要解完全可积的方程组 (3-1-2)，这归结到解非线性常微分方程.

如果取一平凡解 $u'=0$，(3-1-2)就化成

$$u_\xi=2\beta\sin\frac{u}{2},\qquad u_\eta=\frac{2}{\beta}\sin\frac{u}{2},\tag{3-1-3}$$

从而可以直接地得出 sine-Gordon 方程的孤立子解

$$u=4\tan^{-1}\{\exp(\beta\xi+\beta^{-1}\eta+\alpha)\},\tag{3-1-4}$$

这里 α 是一个积分常数.

在一般情况，(3-1-2)是不容易解出的．但是 Bianchi 找到了一个很有用的事实：设从 sine-Gordon 方程的解 u_0 出发，通过以 β_1 为参数的 Bäcklund 变换，得到 sine-Gordon 方程的解 u_1．又从 u_1 出发，作以 β_2 为参数的 Bäcklund 变换 $(\beta_2\neq\beta_1)$，得到解 u_{12}．再从 u_0 出发，以 β_2 为参数，作 Bäcklund 变换，可得解 u_2，从 u_2 出发，以 β_1 为参数，作 Bäcklund 变换，得解 u_{21}．如果后两个 Bäcklund 变换的积分常数选择得当，就一定会有

$$u_{12}=u_{21},\tag{3-1-5}$$

这称为可换性定理，(见章末[3])．从此还可以得出一个非线性迭加公式

$$u_{12}=4\tan^{-1}\left[\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right)\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right)\right]+u_0.\tag{3-1-6}$$

(3-1-5)和(3-1-6)的证明大意如下：写出从 u 到 u_1，u_1 到 u_{12}，u 到 u_2 和 u_2 到 u_{21} 的 Bäcklund 变换的偏微分方程，令 $u_{12}=u_{21}$，消去这些方程中出现的 u, u_1, u_2, u_{12} 的偏导数项，就会得出(3-1-6)式，再把(3-1-6)代入 sine-Gordon 方程，它果然被满足．这个证明是比较长的．因为后文中有较好的处理办法，这里就不详细写出(见章末[3])．

Bäcklund 变换和可换性定理的几何意义是非常有趣的，但在

它们被发现后的相当长的一段时间中，没有在别的地方显示其作用，因而也被冷落了许多时候．到70年代初，当人们发现了sine-Gordon方程在物理上的许多应用后，它才重新引起了注意，并成为制作多个孤立子解的一种手段．例如，令 $u_0=0$，

$$u_1=4\tan^{-1}[\exp(\beta_1\xi+\beta_1^{-1}\eta)],\qquad u_2=4\tan^{-1}[\exp(\beta_2\xi+\beta_2^{-2}\eta)].\tag{3-1-7}$$

由(3-1-6)式就得出

$$u_{12}=4\tan^{-1}\left[\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\,\frac{\sinh\dfrac{v_1-v_2}{2}}{\cosh\dfrac{v_1+v_2}{2}}\right],\ (\beta_1\neq\beta_2).\tag{3-1-8}$$

式中

$$v_1=\beta_1\xi+\beta_1^{-1}\eta,\qquad v_2=\beta_2\xi+\beta_2^{-1}\eta.\tag{3-1-9}$$

尤其令人注目的是，Bäcklund 变换的存在，可换性定理和非线性迭加公式等事项不是sine-Gordon方程所专有的．1973年，Wahlquist 和 Estabrook 发现 KdV 方程(见章末[4])

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0\tag{3-1-10}$$

也具有 Bäcklund 变换．令 $w=\int_{-\infty}^{x}u\,dx$，它满足

$$w_t+3w_x^2+w_{xxx}=0.\tag{3-1-11}$$

作方程组

$$\begin{aligned}w'_x&=\beta-w_x-\frac{1}{2}(w-w')^2,\\ w'_t&=-w_t+(w-w')(w_{xx}-w'_{xx})-2(w_x^2+w_xw'_x+w_x'^2),\end{aligned}\tag{3-1-12}$$

容易验证，当 u 满足 KdV 方程时，(3-1-12)完全可积，其解 w' 的导数 $u'=w'_x$ 也是(3-1-10)的解．

不仅如此，对 KdV 方程，也有类似的可换性定理，而非线性迭加公式为

$$w_{12}=w_0+2\,\frac{\beta_1-\beta_2}{w_1-w_2}.\tag{3-1-13}$$

这些事项的证明均可见于后文.

从 $u=0$ 出发,利用(3-1-12)得出单孤立子解

$$w=(2\beta)^{\frac{1}{2}}\tanh\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta t)\right], \qquad (3\text{-}1\text{-}14)$$

$$u=\beta\,\mathrm{sech}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta t)\right], \qquad (3\text{-}1\text{-}15)$$

或

$$w=(2\beta)^{\frac{1}{2}}\coth\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta t)\right], \qquad (3\text{-}1\text{-}16)$$

$$u=-\beta\,\mathrm{csch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta t)\right]. \qquad (3\text{-}1\text{-}17)$$

利用这些解以及非线性迭加公式(3-1-13),就可得到新的解,包括双孤立子解(w_1, u_1 取(3-1-14)、(3-1-15)式,$\beta=\beta_1>0$; w_2, u_2 取(3-1-16)、(3-1-17)式,$\beta=\beta_2>\beta_1$)

$$u_{12}=(\beta_2-\beta_1)\frac{\beta_1\,\mathrm{sech}^2 v_1+\beta_2\,\mathrm{csch}\,v_2}{(\beta_1^{\frac{1}{2}}\tanh v_1-\beta_2^{\frac{1}{2}}\coth v_2)^2}. \qquad (3\text{-}1\text{-}18)$$

式中

$$v_1=\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta_1 t),$$

$$v_2=\left(\frac{\beta_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x-2\beta_2 t).$$

一般地说,设

$$F(u,\ u_t,\ u_x,\ u_{tt},\ u_{tx},\ u_{xx},\ \cdots)=0 \qquad (3\text{-}1\text{-}19)$$

是 u 的一个偏微分方程,如果

$$\Phi_a(u,\ u_t,\ u_x,\ u_{tt},\ u_{tx},\ u_{xx},\ \cdots,\ u',\ u'_t,\ u'_x,\ u'_{tt},\ u'_{tx},\ u'_{xx},\ \cdots)=0$$

$$(a=1,\ 2) \qquad (3\text{-}1\text{-}20)$$

是一个由两个方程所组成的偏微分方程组,当 u 满足(3-1-19)时,

(3-1-20)关于 u' 完全可积，且 u' 也满足(3-1-19)，那么(3-1-20)就定义了方程(3-1-19)的一个 Bäcklund 变换，或称(3-1-20)定义了(3-1-19)的自-Bäcklund 变换．在不致引起误会的情况下，这个“自”字有时被省去了．也可能有如下的情况：u 满足(3-1-19)时，(3-1-20)完全可积，其解 u' 满足另一偏微分方程

$$G(u',\ u'_t,\ u'_x,\ u'_{tt},\ u'_{tx},\ u'_{xx},\ \cdots)=0, \tag{3-1-21}$$

那么(3-1-20)定义了(3-1-19)到(3-1-21)的 Bäcklund 变换．例如对 Liouville 方程

$$u_{\xi\eta}=e^u \tag{3-1-22}$$

作方程组

$$\begin{aligned} u'_\xi&=u_\xi+\beta e^{(u+u')/2},\\ u'_\eta&=-u_\eta-\frac{2}{\beta}e^{(u-u')/2}, \end{aligned} \tag{3-1-23}$$

容易验证，它是 Liouville 方程到波动方程

$$u'_{\xi\eta}=0 \tag{3-1-24}$$

的 Bäcklund 变换．

又如

$$\begin{aligned} u'_x&=-\frac{1}{2\nu}uu'\\ u'_t&=\frac{1}{4\nu}u^2u'-\frac{1}{2}u'u_x \end{aligned} \tag{3-1-25}$$

(ν 是常数)提供了 Burgers 方程

$$u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0 \tag{3-1-26}$$

到热传导方程

$$u'_t-\nu u'_{xx}=0 \tag{3-1-27}$$

的 Bäcklund 变换．

再如

$$\begin{aligned} u'_x&=\pm(u+u'^2)\\ u'_t&=\mp u_{xx}-2(u'u_x+uu'_x) \end{aligned} \tag{3-1-28}$$

是由 KdV 方程(3-1-10)到 MKdV 方程

$$u'_t-6u'^2u'_x+u'_{xxx}=0 \tag{3-1-29}$$

的 Bäcklund 变换．这个变换称为 Miura 变换．其实，变换

$$u=-u'^2\mp u'_x \tag{3-1-30}$$

直接地从 MKdV 方程的解变为 KdV 方程的解．这是 Miura 变换的有限形式(不必解微分方程)．

当然，我们也可以把(3-1-19)或(3-1-21)改为方程组、微积分方程、微分差分方程等，也可以在(3-1-20)中添上有关自变数的某种变换而定义更广义的 Bäcklund 变换．

问题在于对一个已给的偏微分方程，如何设法找出它的 Bäcklund 变换，以及用怎样的形式把 Bäcklund 变换的方程组(3-1-20)的解明显地写出来．

§2 经典 Darboux 阵

我们要介绍 Bäcklund 变换的一种方便的形式，它的优点在于容易计算和带有很大的普适性(见章末[5]、[6]、[7]、[8])．

考虑如下的线性方程组

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=M\Phi,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}=N\Phi, \tag{3-2-1}$$

式中 Φ 是 2×2 阵，

$$M=\begin{bmatrix}\lambda & p\\ q & -\lambda\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A\end{bmatrix}. \tag{3-2-2}$$

这里 λ 是参数，p, q 是 t, x 的未知函数，A, B, C 是适当的函数，可取复值(或限于取实值)．我们假设 A, B, C 为 λ 的 m 次多项式(后文中我们往往记之为 $A[p,q,\lambda]$, $B[p,q,\lambda]$, $C[p,q,\lambda]$ 或 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$)

$$A=\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda^{m-k},$$

$$B=\sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^{m-k},\tag{3-2-3}$$

$$C=\sum_{k=0}^{m} c_k \lambda^{m-k},$$

式中，a_k, b_k, c_k 和 λ 无关．(3-2-1)的可积条件是

$$M_t-N_x+[M,\ N]=0,\tag{3-2-4}$$

这里$[M,\ N]=MN-NM$．把(3-2-4)写开来，就有

$$\begin{aligned}&A_x=pC-qB,\\&B_x=p_t+2\lambda B-2pA,\\&C_x=q_t-2\lambda C+2qA,\end{aligned}\tag{3-2-5}$$

把(3-2-3)代入(3-2-5)，考察 λ^m, λ^{m-1}, …, λ 的系数，就得出

$$\begin{aligned}&a_{0,x}=0,\qquad b_0=c_0=0;\\&b_{j+1}=pa_j+\frac{1}{2}b_{j,x},\\&c_{j+1}=qa_j-\frac{1}{2}c_{j,x};\\&a_{j+1,x}=pc_{j+1}-qb_{j+1}.\\&\qquad(j=0,1,\cdots,m-1).\end{aligned}\tag{3-2-6}$$

逐次积分递推式(3-2-6)，得

$$\begin{aligned}&b_0=c_0=0,\qquad a_0=\alpha_0(t),\\&b_1=\alpha_0(t)p,\qquad c_1=\alpha_0(t)q,\qquad a_1=\alpha_1(t),\\&b_2=\alpha_1(t)p+\frac{1}{2}\alpha_0(t)p_x,\\&c_2=\alpha_1(t)q-\frac{1}{2}\alpha_0(t)q_x,\\&a_2=-\frac{1}{2}\alpha_0(t)pq+\alpha_2(t),\\&b_3=-\frac{1}{2}\alpha_0(t)\left(p^2q-\frac{1}{2}p_{xx}\right)+\frac{1}{2}\alpha_1(t)p_x+\alpha_2(t)p,\\&c_3=-\frac{1}{2}\alpha_0(t)\left(pq^2-\frac{1}{2}q_{xx}\right)-\frac{1}{2}\alpha_1(t)q_x+\alpha_2(t)q,\end{aligned}\tag{3-2-7}$$

$$a_3=\frac{1}{4}\alpha_0(t)(pq_x-qp_x)-\frac{1}{2}\alpha_1(t)pq+\alpha_3(t),$$

$$\cdots.$$

式中 $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, … 是积分所产生的任意函数，可以证明(见章末[6]、[7])，a_k, b_k, c_k 都是 p, q 及其 x 的导数的多项式，其系数是一些 t 的任意函数(特别，也可以是常数)．令

$$
\begin{aligned}
&a_0^{(0)}[p,q]=1, \qquad b_0^{(0)}[p,q]=c_0^{(0)}[p,q]=0,\\
&a_1^{(0)}[p,q]=0, \qquad b_1^{(0)}[p,q]=p, \quad c_1^{(0)}[p,q]=q,\\
&a_2^{(0)}[p,q]=-\frac{1}{2}pq, \quad b_2^{(0)}[p,q]=\frac{1}{2}p_x,\\
&c_2^{(0)}[p,q]=-\frac{1}{2}q_x, \qquad\qquad (3\text{-}2\text{-}8)\\
&a_3^{(0)}[p,q]=\frac{1}{4}(pq_x-qp_x),\\
&b_3^{(0)}[p,q]=-\frac{1}{2}\left(p^2q-\frac{1}{2}p_{xx}\right),\\
&c_3^{(0)}[p,q]=-\frac{1}{2}\left(pq^2-\frac{1}{2}q_{xx}\right),\\
&\cdots.
\end{aligned}
$$

可以把 $a_k[p,q]$, $b_k[p,q]$, $c_k[p,q]$ 写成

$$
\begin{aligned}
a_k[p,q]&=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}(t)a_j^{(0)}[p,q],\\
b_k[p,q]&=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}(t)b_j^{(0)}[p,q], \qquad (3\text{-}2\text{-}9)\\
a_k[p,q]&=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}(t)c_j^{(0)}[p,q],
\end{aligned}
$$

而式中的 $a_j^{(0)}[p,q]$, $b_j^{(0)}[p,q]$, $c_j^{(0)}[p,q]$ 都是 p, q 及其 x 导数的一定的多项式，其系数和 t 无关，又满足

$$b_k^{(0)}[0,q]=c_k^{(0)}[p,0]=a_k^{(0)}[p,0]=a_k^{(0)}[0,q]=0,$$

$$1\leqslant k\leqslant m \qquad (3\text{-}2\text{-}10)$$

以及

$$b_0^{(0)}[p, q]=c_0^{(0)}[p, q]=0, \quad a_0^{(0)}[p, q]=1.$$

再考察(3-2-5)中的λ零次项的系数,得到一个偏微分方程组

$$\begin{aligned} p_t &= 2pa_m - b_{m,x}, \\ q_t &= -2qa_m + c_{m,x}. \end{aligned} \tag{3-2-11}$$

特别,当 $m=1$ 时,有

$$\begin{aligned} p_t &= 2\alpha_1(t)p + \alpha_0(t)p_x, \\ q_t &= -2\alpha_1(t)q + \alpha_0(t)q_x, \end{aligned}$$

这是一个线性偏微分方程组.

当 $m=2$ 时,有

$$\begin{aligned} p_t &= \alpha_0(t)\left(\frac{1}{2}p_{xx}-p^2q\right)+\alpha_1(t)p_x+2\alpha_2(t)p, \\ q_t &= -\alpha_0(t)\left(\frac{1}{2}q_{xx}-pq^2\right)+\alpha_1(t)q_x-2\alpha_2(t)q. \end{aligned} \tag{3-2-12}$$

这已是非线性的偏微分方程组了. 特别当 $q=-\bar{p}$, $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=0$, $\alpha_0(t)=2i$ 时,它化为非线性 Schrödinger 方程

$$ip_t+p_{xx}+2|p|^2p=0. \tag{3-2-13}$$

当 $m=3$ 时,有

$$\begin{aligned} p_t &= \alpha_0(t)\left(\frac{1}{4}p_{xxx}-\frac{3}{2}pqp_x\right)+\alpha_1(t)\left(\frac{1}{2}p_{xx}-p^2q\right) \\ &\quad +\alpha_2(t)p_x+2\alpha_3(t)p, \\ q_t &= \alpha_0(t)\left(\frac{1}{4}q_{xxx}-\frac{3}{2}pqq_x\right)-\alpha_1(t)\left(\frac{1}{2}q_{xx}-pq^2\right) \\ &\quad +\alpha_2(t)q_x-2\alpha_3(t)q. \end{aligned} \tag{3-2-14}$$

特别当 $p=-1$, $\alpha_0(t)=-4$, $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=\alpha_3(t)=0$ 时, 有 KdV 方程

$$q_t+6qq_x+q_{xxx}=0. \tag{3-2-15}$$

又当 $q=-p$, $\alpha_0(t)=-4$, $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=\alpha_3(t)=0$ 时, 有 MKdV 方程

$$q_t+6q^2q_x+q_{xxx}=0. \tag{3-2-16}$$

所以这样得到的偏微分方程(或方程组)所包含的内容很丰富. 当m值增大时, 它可以是很复杂的. 这样的方程组被称为AKNS梯队, 它们的最简单的形式是由 V. E. Zakharov, A. B. Shabat 以及 M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur 等人所首先引进的.

对整个AKNS梯队, 存在着一个统一的 Bäcklund 变换, 它的算法对整个梯队中的每一个方程(组)都是一样的. 现在来说明它.

设(p, q)是方程组(3-2-11)的一解, 从而(3-2-1)是关于Φ的线性方程组. 由于它的积分可能条件已满足, 所以对于任给的初值条件(例如$t=0$, $x=0$, $\Phi=\Phi_0(\det\Phi_0\neq 0)$)可以求解, 记$\Phi(x, t, \lambda)$是相应的解(其它的解具$\Phi(t, x, \lambda)\psi(\lambda)$的形式, 这里$\psi(\lambda)$是$2\times 2$阵, $\det\psi(\lambda)\neq 0$), $\det\Phi(t, x, \lambda)$和(t, x)无关, 且恒不等于0(这可由$\mathrm{tr}M=\mathrm{tr}N=0$推出), 称$\Phi(t, x, \lambda)$是解$(p, q)$的一个表示. 记$\Phi=(a_{\alpha\beta}(\lambda))$,

l次的 Darboux 阵是指具形式

$$s(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda^l+\sum_{j=0}^{l-1}\begin{pmatrix}\alpha_j & \beta_j\\ \gamma_j & \delta_j\end{pmatrix}\lambda^j \qquad (3\text{-}2\text{-}17)$$

的2×2阵, 其中α_j, β_j, γ_j, δ_j是(t, x)的函数, 且满足如下的一些条件:

(1) $$\det s(\lambda)=\prod_{j=1}^{2l}(\lambda-\lambda_j), \qquad (3\text{-}2\text{-}18)$$

式中λ_j是$2l$个已给的不同的复数, 并要求$\det\Phi(\lambda_j)\neq 0(j=1, 2, \cdots, 2l)$.

(2) 令

$$\Phi_1(\lambda)=s(\lambda)\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}(\lambda) & \tilde{a}_{12}(\lambda)\\ \tilde{a}_{21}(\lambda) & \tilde{a}_{22}(\lambda)\end{pmatrix}, \qquad (3\text{-}2\text{-}19)$$

对于每一个$\lambda=\lambda_i$时, 矩阵的两列有常系数的线性关系

$$\mu_i\tilde{a}_{\alpha1}(\lambda_i)+\nu_i\tilde{a}_{\alpha2}(\lambda_i)=0\quad(\alpha=1,\ 2),\tag{3-2-20}$$

式中 μ_i, ν_i 为不全为 0 的常数.

现在指出 Darboux 阵的制作. 不妨设 $\mu_i\neq0$(否则可令 $\Phi(\lambda)$ 右乘一个 $\psi(\lambda)$ 而得到 $\mu_i\neq0$), 令

$$b_i=\frac{\nu_i}{\mu_i},$$

(3-2-20)变成

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{l-1}(\rho_i\alpha_j+\tau_i\beta_j)\lambda_i^j=-\lambda_i^l\rho_i,\\&\sum_{j=0}^{l-1}(\rho_i\gamma_j+\tau_i\delta_j)\lambda_i^j=-\lambda_i^l\tau_i,\end{aligned}\tag{3-2-21}$$

式中

$$\begin{aligned}\rho_i&=a_{11}(\lambda_i)+b_ia_{12}(\lambda_i),\\\tau_i&=a_{21}(\lambda_i)+b_ia_{22}(\lambda_i).\end{aligned}\tag{3-2-22}$$

令

$$\sigma_i=\frac{\tau_i}{\rho_i}=\frac{a_{21}(\lambda_i)+b_ia_{22}(\lambda_i)}{a_{11}(\lambda_i)+b_ia_{12}(\lambda_i)}\tag{3-2-23}$$

(3-2-21)化成

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{l-1}(\alpha_j+\sigma_i\beta_j)\lambda_i^j=-\lambda_i^l,\\&\sum_{j=0}^{l-1}(\gamma_j+\sigma_i\delta_j)\lambda_i^j=-\lambda_i^l\sigma_i,\\&(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2l).\end{aligned}\tag{3-2-24}$$

这是含 $4l$ 个未知数、$4l$ 个方程的线性代数方程组，在其行列式不为零时有唯一的解, 我们把这称为正则的情况. 特别, 在 $l=1$ 时, 只要 $\sigma_2\neq\sigma_1$, 就可以解出(3-2-24), 求得 α_0, β_0, γ_0, δ_0, 从而得出一阶 Darboux 阵

$$s(\lambda)=\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\begin{pmatrix}(\sigma_2-\sigma_1)\lambda+\lambda_2\sigma_1-\lambda_1\sigma_2&\lambda_1-\lambda_2\\(\lambda_2-\lambda_1)\sigma_1\sigma_2&(\sigma_2-\sigma_1)\lambda+\lambda_1\sigma_1-\lambda_2\sigma_2\end{pmatrix}.\tag{3-2-25}$$

我们先对一阶的 Darboux 阵证明如下的定理.

定理1 设 p, q 是偏微分方程组(3-2-11)的一解, Φ 是它的一个表示, $\lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2$ 是给定的常数, $s(\lambda)$ 是由(3-2-25)所定义的 Darboux 阵. 令

$$\Phi_1(\lambda)=s(\lambda)\Phi(\lambda), \tag{3-2-26}$$

$$\begin{aligned} p_1&=p-2\beta_0=p+2\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\sigma_2-\sigma_1}, \\ q_1&=q+2\gamma_0=q+2\frac{\sigma_1\sigma_2(\lambda_2-\lambda_1)}{\sigma_2-\sigma_1}, \end{aligned} \tag{3-2-27}$$

那末(p_1, q_1)也是(3-2-11)的一解, 且 $\Phi_1(\lambda)$ 就是它的一个表示.

我们需要一个

引理 由(3-2-23)式所定义的 σ_i 满足

$$\begin{aligned} \sigma_{i,x}&=q-2\lambda_i\sigma_i-p\sigma_i^2, \\ \sigma_{i,t}&=c(\lambda_i)-2A(\lambda_i)\sigma_i-B(\lambda_i)\sigma_i^2. \end{aligned} \tag{3-2-28}$$

事实上, 如列向量函数$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$满足常微分方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & F\\ G & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$

那末可直接验证 $\sigma=(\psi_2/\psi_1)$ 一定满足 Ricatti 方程

$$\frac{d\sigma}{dt}=G-2E\sigma-F\sigma^2.$$

把这一般事项用于

$$\psi_1=\tilde{a}_{11}(\lambda_i)+b_i\tilde{a}_{12}(\lambda_i), \qquad \psi_2=\tilde{a}_{21}(\lambda_i)+b_i\tilde{a}_{22}(\lambda_i),$$

并考虑到方程组(3-2-1), 就得到(3-2-28)式.

为证明上述定理, 我们注意到

$$\begin{aligned} \Phi_{1x}&=s_x\Phi+sM\Phi=(s_xs^{-1}+sMs^{-1})\Phi, \\ \Phi_{1t}&=s_t\Phi+sN\Phi=(s_ts^{-1}+sNs^{-1})\Phi. \end{aligned} \tag{3-2-29}$$

记

$$M_1=s_xs^{-1}+sMs^{-1}, \qquad N_1=s_ts^{-1}+sNs^{-1}, \tag{3-2-30}$$

又记

$$N=\begin{bmatrix} A[p,\ q,\ \lambda] & B[p,\ q,\ \lambda] \\ C[p,\ q,\ \lambda] & -A[p,\ q,\ \lambda] \end{bmatrix}, \tag{3-2-31}$$

这里 $A[p,\ q,\ \lambda]$ 等为 p, q 及其 x 的导数的多项式. 如前所述, 当 m 和 $\alpha_0(t)$, $\cdots$, $\alpha_m(t)$ 给定后, 它们是完全确定的. 因此问题就化为求证: 由(3-2-30)所定义的 M_1, N_1 必能写作

$$M_1=\begin{bmatrix} \lambda & p_1 \\ q_1 & -\lambda \end{bmatrix},$$

$$N_1=\begin{bmatrix} A[p_1,\ q_1,\ \lambda] & B[p_1,\ q_1,\ \lambda] \\ C[p_1,\ q_1,\ \lambda] & -A[p_1,\ q_1,\ \lambda] \end{bmatrix}. \tag{3-2-32}$$

对(3-2-25)式所定义的 $s(\lambda)$ 关于 x 求导, 利用(3-2-28)的第一式消去 σ_{1x}, σ_{2x}, 通过直接的计算, 就可以得出(3-2-32)的第一式.

对于(3-2-32)的第二式, 当 $m=1$, 2, 3, $\cdots$ 时, 原则上也可以进行同样的验算, 这种验算可以分别对 $\alpha_m=1$, $\alpha_{m-1}=\cdots=\alpha_0=0$; $\alpha_{m-1}=1$, $\alpha_m=\alpha_{m-2}=\cdots=\alpha_0=0$; $\cdots$; $\alpha_0=1$, $\alpha_m=\cdots=\alpha_1=0$ 进行. 当 m 不大时, 例如 $m=1$, 2, 3, 这种验算是可以直接进行的. 它只包括微分, 用(3-2-28)第二式代入, 以及进行一些相当繁复的代数运算, 就可以得出. 只是演算比较复杂, 我们没有必要在这里写出. 对于一般的 m, 不能用直接计算来验证(3-2-32)的第二式, 在章末[6]和[7]中给出了证明. 限于篇幅, 这里就不写出了.

这样从 $\{p,\ q,\ \Phi\}$ 出发, 可以得到 $\{p_1, q_1, \Phi_1\}$, 这种变换就称为是由 Darboux 阵所定义的 Bäcklund 变换. 求得这种 Bäcklund 变换, 只须作一次完全可积的线性方程组的求解(得到 Φ), 然后就可只用代数运算. 这种 Bäcklund 变换是自 Bäcklund 变换(如上文所已指出的, 我们往往把这个"自"省去).

不仅如此, 这样的 Bäcklund 变换还可以继续进行下去. 由 $\{p_1,\ q_1,\ \Phi_1\}$ 出发, 选取常数 $\{\lambda_3,\ \lambda_4,\ b_3,\ b_4\}$ (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 互不相等), 利用它作 Darboux 阵 $s^{(2)}(\lambda,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ b_3,\ b_4)$. (为示区别, 第

一次所作的 Darboux 阵记为 $s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2)$). 我们可以作出

$$\Phi_2(\lambda)=s^{(2)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, b_3, b_4)s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2)\Phi(\lambda),$$

从而有 Bäcklund 变换

$$\{p_1, q_1, \Phi_1\}\to\{p_2, q_2, \Phi_2\},$$

这时所用的只是代数的算法. 同样的手续还可继续进行下去, 从而得到 Bäcklund 变换的无限系列

$$\{p, q, \Phi\}\to\{p_1, q_1, \Phi_1\}\to\{p_2, q_2, \Phi_2\}\to\{p_3, q_3, \Phi_3\}\to\cdots$$

每一步骤都只是代数运算(除了作第一步的准备工作——求 Φ 时, 要解线性的完全可积方程组, 这归结为求解线性常微分方程), 所以这是非常方便和有效的.

这种方法的优点还在于, 从 $\{p, q, \Phi\}$ 到 $\{p_1, q_1, \Phi_1\}$ (以及后来可以作为一系列 Bäcklund 变换)是普适的, 即无论对什么 m 以及 $\alpha_0(t), \cdots, \alpha_m(t)$, 这种作 Bäcklund 变换的算法是完全相同的.

此外, 从这里还可以很快地得到可换性定理(而且更广泛、更明确).

定理 2 (i) $s^{(2)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, b_3, b_4)s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2)$ 是相应于 $\Phi(\lambda)$ 的二次 Darboux 阵.

(ii) 成立以下的可换性公式

$$\begin{aligned}
&s^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2)s^{(1)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, b_3, b_4)\\
&=s^{(2)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, b_3, b_4)s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2)\\
&=s^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_3, b_1, b_3)s^{(1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_4, b_2, b_4)\\
&=s^{(2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_4, b_2, b_4)s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_3, b_1, b_3)\\
&=s^{(2)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3, b_2, b_3)s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_4, b_1, b_4)\\
&=s^{(2)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_4, b_1, b_4)s^{(1)}(\lambda, \lambda_2, \lambda_3, b_2, b_3).
\end{aligned}$$

证明 $s^{(2)}(\lambda, \lambda_3, \lambda_4, b_3, b_4)s^{(1)}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2)$ 显然具 (3-2-17) 的形式. 这时 $l=2$, $\det(s^{(2)}(\cdot)s^{(1)}(\cdot))=\det(s^{(1)}(\cdot)$

$\det s^{(2)}(\cdot))=\prod_{i=1}^{4}(\lambda-\lambda_i)$，所以 Darboux 阵的条件(i)成立．又记

$$\Phi_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}(\lambda) & \tilde{a}_{12}(\lambda)\\ \tilde{a}_{21}(\lambda) & \tilde{a}_{22}(\lambda)\end{pmatrix},$$

$$\Phi_2(\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{a}}_{11}(\lambda) & \tilde{\tilde{a}}_{12}(\lambda)\\ \tilde{\tilde{a}}_{21}(\lambda) & \tilde{\tilde{a}}_{22}(\lambda)\end{pmatrix},$$

依 Darboux 阵 $s^{(2)}(\cdot)$的定义，

$$\tilde{\tilde{a}}_{\alpha1}(\lambda_i)+b_i\tilde{\tilde{a}}_{\alpha2}(\lambda_i)=0\quad(i=3,\ 4;\ \alpha=1,\ 2).$$

另一方面，由

$$\tilde{a}_{\alpha1}(\lambda_i)+b_i\tilde{a}_{\alpha2}(\lambda_i)=0\quad(i=1,\ 2;\ \alpha=1,\ 2)$$

能推出

$$\tilde{\tilde{a}}_{\alpha1}(\lambda_i)+b_i\tilde{\tilde{a}}_{\alpha2}(\lambda_i)=0\quad(i=1,\ 2;\ \alpha=1,\ 2)$$

Darboux 阵的条件(ii)也满足．从此可见，$s^{(2)}(\lambda,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ b_3,\ b_4)$ $s^{(1)}(\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ b_1,\ b_2)$就是相应于参数$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$的二次 Darboux 阵，所以(i)证毕．当这些参数属于正则的情形，即相应的 Darboux 阵是唯一的情况下，(ii)显然成立．对于非正则的情形，只须取极限，也就能确认(ii)的成立．

这样，可换性定理就以非常简便而自然的方式得到了证明．

§3　几个特殊情形

3.1　广义 MKdV 梯队：$q=-p$

取m为奇数，$\alpha_1(t)=\alpha_3(t)=\cdots=\alpha_m(t)=0$，$\alpha_0(t)$，$\alpha_2(t)$，…，$\alpha_{m-1}(t)$是 t 的实值函数，又设 $q=-p$ 为实函数，此时

$$b_1=-c_1,\ a_1=0,\ b_2=c_2,\ b_3=-c_3,\ a_3=0,\ \cdots$$

一般地有

$$b_{2h-1}=-c_{2h-1},\qquad b_{2h}=c_{2h},\qquad a_{2h-1}=0.\tag{3-3-1}$$

在此特殊情形下，成立

$$\begin{aligned} A[p,\ -p,\ -\lambda]&=-A[p,\ -p,\ \lambda],\\ B[p,\ -p,\ -\lambda]&=-C[p,\ -p,\ \lambda],\\ C[p,\ -p,\ -\lambda]&=-B[p,\ -p,\ \lambda]. \end{aligned} \tag{3-3-2}$$

设 $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ 为下述方程组的非平凡解

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}_x&=\begin{bmatrix}\lambda & p\\ -p & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}_t&=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3-3-3}$$

那末,

$$\Phi(\lambda)=\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda) & \phi_2(-\lambda)\\ \phi_2(\lambda) & -\phi_1(-\lambda)\end{bmatrix} \tag{3-3-4}$$

就是(3-2-1)的解.

现取 λ_1, λ_2, b_1, b_2, 使 $\lambda_2=-\lambda_1$, $b_2=-\dfrac{1}{b_1}$,

$$\begin{aligned} \sigma_1&=\frac{\phi_2(\lambda_1)-b_1\phi_1(-\lambda_1)}{\phi_1(\lambda_1)+b_1\phi_2(-\lambda_1)},\\ \sigma_2&=\frac{\phi_2(-\lambda_1)+\dfrac{1}{b_1}\phi_1(\lambda_1)}{\phi_1(-\lambda_1)-\dfrac{1}{b_1}\phi_2(\lambda_1)}=-\frac{1}{\sigma_1}. \end{aligned} \tag{3-3-5}$$

这时(3-2-27)就化为一个式子

$$p_1=p+\frac{4\sigma_1}{1+\sigma_1^2}\lambda_1. \tag{3-3-6}$$

Darboux 阵(3-2-25)化为

$$s(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1\dfrac{1-\sigma_1^2}{1+\sigma_1^2} & -\lambda_1\dfrac{2\sigma_1}{1+\sigma_1^2}\\ -\lambda_1\dfrac{2\sigma_1}{1+\sigma_1^2} & \lambda+\lambda_1\dfrac{1-\sigma_1^2}{1+\sigma_1^2}\end{bmatrix} \tag{3-3-7}$$

章末[9]、[10]中给出的 Darboux 阵与这里的相比,第二行差一符号,这是由于那里 s 中 λ 的系数取为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,而这里取为

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$所致. 这两个 Darboux 阵所产生的效果完全相同.

3.2 广义非线性 Schrödinger 梯队: $q=-\overline{p}$

当m为偶数$2h$时, 取$\alpha_0, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2h}$为$t$的取纯虚值的函数, $\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2h-1}$为$t$的纯实值函数; 当$m$为奇数$2h+1$时, 取$\alpha_0, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2h}$为$t$的纯实值函数, $\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2h+1}$为$t$的纯虚值函数. 利用数学归纳法可以证明:

m为偶数时,

$$b_{2j-1}=\overline{c}_{2j-1}, \quad b_{2j}=-\overline{c}_{2j}, \quad a_{2j-1}=\overline{a}_{2j-1}, \quad a_{2j}=-\overline{a}_{2j}. \tag{3-3-8}$$

m为奇数时,

$$b_{2j}=\overline{c}_{2j}, \quad b_{2j-1}=-\overline{b}_{2j-1}, \quad a_{2j}=\overline{a}_{2j}, \quad a_{2j-1}=-\overline{a}_{2j-1}. \tag{3-3-9}$$

总之, 在任一情形下, 必成立

$$\begin{aligned}\overline{A}[p, -\overline{p}, -\overline{\lambda}]&=-A[p, -\overline{p}, \lambda],\\ \overline{B}[p, -\overline{p}, -\overline{\lambda}]&=-C[p, -\overline{p}, \lambda],\\ \overline{C}[p, -\overline{p}, -\overline{\lambda}]&=-B[p, -\overline{p}, \lambda].\end{aligned} \tag{3-3-10}$$

现设$\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$为下述方程组的非平凡解

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}_x&=\begin{bmatrix}\lambda & p\\ -\overline{p} & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}_t&=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{3-3-11}$$

那末

$$\Phi=\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda) & \overline{\phi}_2(-\overline{\lambda})\\ \phi_2(\lambda) & -\overline{\phi}_1(-\overline{\lambda})\end{bmatrix} \tag{3-3-12}$$

满足(3-2-1)式.

现取$\lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2$, 使$\lambda_2=-\overline{\lambda}_1$, $b_2=-\dfrac{1}{\overline{b}_1}$,

$$\sigma_1=\frac{\phi_2(\lambda_1)-b_1\overline{\phi}_1(-\overline{\lambda}_1)}{\phi_1(\lambda_1)+b_1\overline{\phi}_2(-\overline{\lambda}_1)}, \tag{3-3-13}$$

$$\sigma_2=\frac{\phi_2(-\bar{\lambda}_1)+\frac{1}{\bar{b}_1}\bar{\phi}_1(\lambda_1)}{\phi_1(-\bar{\lambda}_1)-\frac{1}{\bar{b}_1}\bar{\phi}_2(\lambda_1)},$$

从而成立

$$\bar{\sigma}_2=-\frac{1}{\sigma_1},\qquad \bar{\sigma}_1=-\frac{1}{\sigma_2},\tag{3-3-14}$$

(3-2-27) 成为一个式子

$$p_1=p+\frac{2(\lambda_1+\bar{\lambda}_1)\bar{\sigma}_1}{1+\sigma_1\bar{\sigma}_1},\tag{3-3-15}$$

而 Darboux 阵 (3-2-25) 化为

$$s(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\frac{\lambda_1-\bar{\lambda}_1\sigma_1\bar{\sigma}_1}{1+\sigma_1\bar{\sigma}_1} & -\frac{(\lambda_1+\bar{\lambda}_1)\bar{\sigma}_1}{1+\sigma_1\bar{\sigma}_1}\\ -\frac{(\lambda_1+\bar{\lambda}_1)\sigma_1}{1+\sigma_1\bar{\sigma}_1} & \lambda-\frac{\lambda_1\sigma_1\bar{\sigma}_1-\bar{\lambda}_1}{1+\sigma_1\bar{\sigma}_1}\end{bmatrix}.\tag{3-3-16}$$

3.3 KdV 梯队: $p=-1$(见章末[9], [11])

设 $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$ 为方程组

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}_x=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ q & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}_t=\begin{bmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & -A(\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{bmatrix}\end{gathered}\tag{3-3-17}$$

的非平凡解,那末可以验证

$$\Phi=\begin{bmatrix}\phi_1(\lambda) & \phi_1(-\lambda)\\ \phi_2(\lambda) & \phi_2(-\lambda)+2\lambda\phi_1(-\lambda)\end{bmatrix}\tag{3-3-18}$$

满足 (3-2-1) 式.

取 λ_1, λ_2, b_1, b_2, 使 $\lambda_2=-\lambda_1$, $b_2=\frac{1}{b_1}$,

$$\begin{gathered}\sigma_1=\frac{\phi_2(\lambda_1)+b_1(\phi_2(-\lambda_1)+2\lambda_1\phi_1(-\lambda_1))}{\phi_1(\lambda_1)+b_1\phi_1(-\lambda_1)},\\ \sigma_2=\frac{\phi_2(-\lambda_1)+b_2(\phi_2(\lambda_1)-2\lambda_1\phi_1(\lambda_1))}{\phi_1(-\lambda_1)+b_2\phi_1(\lambda_1)},\end{gathered}\tag{3-3-19}$$

因而

$$\sigma_2-\sigma_1=-2\lambda_1, \tag{3-3-20}$$

从而(3-2-27)化为

$$\begin{aligned} p_1&=-1+2=1,\\ q_1&=q+2\sigma_1(\sigma_1-2\lambda_1), \end{aligned} \tag{3-2-21}$$

所以$(-1, q)$和$(1, q_1)$满足相同的方程. 注意到$p\to-p$, $q\to-q$导致了$b_j\to-b_j$, $c_j\to-c_j$, $a_j\to a_j$(这容易由(3-2-6)看出), 所以$(-1, -q_1)$和$(-1, q)$满足同样的方程. 因此

$$q_1'=-q+4\lambda_1\sigma_1-2\sigma_1^2 \tag{3-3-22}$$

就是广义 KdV 梯队的 Darboux 变换. 其实这是经典 Darboux变换的原始形式.

如果不作这种变换, 例如, 对于原来的 KdV 情形, 如 q 满足

$$q_t+6qq_x+q_{xxx}=0,$$

则 q_1 就满足

$$q_{1t}-6q_1q_{1x}+q_{1xxx}=0,$$

而 q_1' 才是 KdV 方程的一解.

Darboux 阵(3-2-25) 现化为

$$s(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1+\sigma_1 & -1\\ \sigma_1^2-2\lambda_1\sigma_1 & \lambda+\lambda_1-\sigma_1\end{bmatrix}. \tag{3-3-23}$$

3.4 sine-Gordon 方程

sine-Gordon 方程 $u_{xt}=\sin u$ 是下述线性可积系统的可积条件:

$$\begin{aligned} \Phi_x&=\begin{bmatrix}\lambda & -\dfrac{u_x}{2}\\ \dfrac{u_x}{2} & -\lambda\end{bmatrix}\Phi,\\ \Phi_t&=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4\lambda}\cos u & \dfrac{1}{4\lambda}\sin u\\ \dfrac{1}{4\lambda}\sin u & -\dfrac{1}{4\lambda}\cos u\end{bmatrix}\Phi, \end{aligned} \tag{3-3-24}$$

所以也可纳入 AKNS 系统，但这里出现了 λ 的负次幂．对于出现负次幂的 AKNS 系统，仍然可以制作 Darboux 阵等，但相应于 (3-2-11) 往往是积分微分方程．可是，sine-Gordon 方程却不含积分算子．

对线性系统 (3-3-24)，阵 M 所取的形式和 MKdV 梯队相同，$p=-q=-\frac{u_x}{2}$，其 Darboux 阵仍为 (3-3-7)，也可将其写作

$$s(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1\cos\theta & -\lambda_1\sin\theta\\ -\lambda_1\sin\theta & \lambda+\lambda_1\cos\theta\end{bmatrix}, \tag{3-3-25}$$

这里

$$\theta=2\tan^{-1}\sigma_1. \tag{3-3-26}$$

Bäcklund 变换 (3-3-6) 可写为

$$-\frac{u_{1x}}{2}=-\frac{u_x}{2}+\frac{4\lambda_1\sigma_1}{1+\sigma_1^2}. \tag{3-3-27}$$

由 (3-2-28) 可以推出

$$\theta_x=-2p-2\lambda_1\sin\theta=u_x-\frac{2\lambda_1\sigma_1}{1+\sigma_1^2}, \tag{3-3-28}$$

所以 Bäcklund 变换可取形式

$$u_1=2\theta-u. \tag{3-3-29}$$

§4 Bäcklund 变换的更广泛的情形

Darboux 阵方法可以运用到更一般的情形，我们举出下列几个．

4.1 $n\times n$AKNS 系统（见章末[12]）

我们把 (3-2-1) 推广到 M, N 为 $n\times n$ 阵的情形，仍记为

$$\Phi_x=M\Phi,\quad \Phi_t=N\Phi, \tag{3-4-1}$$

其中

$$M=\lambda a+P, \tag{3-4-2}$$

而 $a=\mathrm{diag}(a_1,\ \cdots,\ a_n)\ (a_i\neq a_j)$，$P$ 为 $n\times n$ 阵 $[p_j^i]$，但对角元

$p_i^i=0$, Φ 为 $n\times n$ 阵, $\det\Phi\neq 0$. 又记

$$N=[v_j^i],\tag{3-4-3}$$

其中 v_j^i 是关于 λ 的多项式, 最高次数为 m, 故可记为

$$v_j^i=\sum_{\alpha=0}^{m}\underset{\alpha}{v_j^i}\lambda^{m-\alpha}.\tag{3-4-4}$$

作可积条件

$$M_t-N_x+[M,\ N]=0,\tag{3-4-5}$$

就能得出 v_j^i 的递推式

$$\begin{gathered}\underset{0}{v_j^i}=0\,(i\neq j),\qquad \underset{0}{v_{i,x}^i}=0,\\ \underset{\alpha+1}{v_j^i}=\frac{1}{a_i-a_j}\Big(\underset{\alpha}{v_{j,x}^i}-\sum_k p_k^i\underset{\alpha}{v_j^k}+\sum_k\underset{\alpha}{v_k^i}p_j^k\Big)\quad(i\neq j),\\ \underset{\alpha+1}{v}{}_{i,x}^i=\sum_{k\neq i}\Big(p_k^i\underset{\alpha+1}{v_i^k}-\underset{\alpha+1}{v_k^i}\,p_i^k\Big),\end{gathered}\tag{3-4-6}$$

以及方程组

$$p_{j,t}^i-\underset{m}{v_{j,x}^i}+\sum_k\Big(p_k^i\underset{m}{v_j^k}-\underset{m}{v_k^i}p_j^k\Big)=0\quad(i\neq j).\tag{3-4-7}$$

对于一般的 m, 可以证明 $\underset{\alpha}{v_j^i}$ 是 p_j^i 及其关于 x 的若干阶导数的多项式(系数可依赖于 t, 见章末[13]), 记为 $v_j^i=v_j^i[p,\ p_x,\ \cdots]$. 对于 $m=1$, 所得到的方程已是非平凡的, 此时,

$$\begin{gathered}\underset{0}{v_i^i}=b_i\ (b_i\ \text{为常数或}\ t\ \text{的函数}),\\ \underset{1}{v_j^i}=\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}p_j^i\quad(i\neq j),\end{gathered}\tag{3-4-8}$$

而方程组为

$$p_{j,t}^i-\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}p_{j,x}^i+\sum_k\Big(\frac{b_k-b_j}{a_k-a_j}-\frac{b_i-b_k}{a_i-a_k}\Big)p_k^ip_j^k=0.\tag{3-4-9}$$

它就是在物理上有重要作用的 N 波方程(见章末[14]).

对于 $n\times n$ AKNS 系统, 章末[15]中曾作出微分方程形式的 Bäcklund 变换. 这里, 我们要指出, Darboux 阵形式的变换仍然可以显式地作出. 设$\{P=[p_j^i],\ \Phi=[\Phi_j^i(\lambda)]\}$为(3-4-1)的一组

解，一次 Darboux 阵取形式

$$s(\lambda)=\lambda I+\alpha, \tag{3-4-10}$$

给定 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n (\lambda_i\neq\lambda_j)$ 和一组常数 μ_l^j，使

$$\sum_j \tilde{\Phi}_j^i(\lambda_l)\mu_l^j=0 \tag{3-4-11}$$

成立，式中 $\tilde{\Phi}_j^i(\lambda_l)$ 由

$$s(\lambda_l)\Phi(\lambda_l)=[\tilde{\Phi}_j^i(\lambda_l)]. \tag{3-4-12}$$

确定．但对 μ_l^i，我们尚有条件

$$h=[h_l^i]=[\sum_k \Phi_k^i(\lambda_l)\mu_l^k] \tag{3-4-13}$$

为非退化的．

在这一条件下，能将 Darboux 阵 $s(\lambda)$ 唯一地决定下来．事实上，由(3-4-10)和(3-4-12)可见，(3-4-11)可写为

$$hA+\alpha h=0, \tag{3-4-11$^+$}$$

从而得

$$\alpha=-hAh^{-1}, \tag{3-4-14}$$

式中

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}. \tag{3-4-15}$$

h 的每一组列向量 $\sum_k \Phi_k^i(\lambda_l)\mu_l^k$ 都满足(3-4-1)式，但 $\lambda=\lambda_l$，由此可得

$$h_x=ahA+Ph. \tag{3-4-16}$$

由此可以直接计算 α_x，

$$\alpha_x=-a\alpha^2+P\alpha+\alpha a\alpha-\alpha P. \tag{3-4-17}$$

记

$$\Phi_1(\lambda)=s(\lambda)\Phi(\lambda), \tag{3-4-18}$$

就得出

$$\begin{aligned}\Phi_{1x}(\lambda)&=s\alpha_x\Phi(\lambda)+(\lambda I+\alpha)(\lambda a+P)\Phi(\lambda)\\&=\{\lambda^2a+\lambda(P+\alpha a)+(-a\alpha^2+P\alpha+\alpha a\alpha)\}\Phi(\lambda).\end{aligned} \tag{3-4-19}$$

另一方面，

$$(\lambda a+P_1)\Phi_1(\lambda)=\{\lambda^2 a+\lambda(P_1+a\alpha)+P_1\alpha\}\Phi(\lambda). \tag{3-4-20}$$

令

$$P_1=P+\alpha a-a\alpha, \tag{3-4-21}$$

比较(3-4-19)和(3-4-20)，我们就能得出

$$\Phi_{1x}(\lambda)=(\lambda a+P_1)\Phi_1(\lambda). \tag{3-4-22}$$

注意，这里 P_1 的对角元仍为 0.

当 $m=1$ (或 2, 3 等)，我们可以直接验证

$$\Phi_{1t}(\lambda)=(v_j^i[P_1,\ P_{1x},\ \cdots])\Phi_1(\lambda), \tag{3-4-23}$$

式中 $v_j^i[P_1,\ P_{1x},\ \cdots]$ 是 $v_j^i[P,\ P_x,\ \cdots]$ 中的 $P,\ P_x,\cdots$ 用 $P_1,\ P_{1x},\ \cdots$ 代入的结果. 对于一般的 m，我们用章末[6]中的手续可以同样地证明这一事项，从而可得:

定理　由(3-4-18)和(3-4-21)所定义的变换

$$\{P,\ \Phi(\lambda)\}\to\{P_1,\ \Phi_1(\lambda)\}$$

是一个自 Bäcklund 变换，也就是说，P_1 满足方程组(3-4-7)，而 $\Phi_1(\lambda)$ 满足(3-4-1)，但其中的 P(及其关于 x 的导数)已由 P_1(及其 x的导数)所代替.

用直接计算，或利用关于 λ 为二次的 Darboux 阵在一般情形下的唯一性(其论述见章末[12])，我们可以得出可换性定理.

4.2 Boussinesq 方程(见章末[16])

它可以写成

$$3u_{tt}+u_{xxxx}-6(u^2)_{xx}=0, \tag{3-4-24}$$

也是在浅水理论中出现的. 引入 $w=\int u dx$，再选取适当的 t 的函数作为积分常数，就得到方程

$$3w_{tt}+w_{xxxx}-12w_x w_{xx}=0. \tag{3-4-25}$$

相应的可积系统(3-4-1)中的 M 和 N 取作

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \lambda+\varphi & 3u & 0\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}-2u & 0 & 1\\ \lambda+\varphi-2u_x & u & 0\\ \varphi_x-2u_{xx} & \lambda+\varphi-u_x & u\end{bmatrix}, \tag{3-4-26}$$

式中 φ 满足

$$\varphi_x=\frac{3}{2}(u_{xx}+u_t), \tag{3-4-27}$$

其可积条件恰好是(3-4-24)，

现在假设 Darboux 阵的形式是

$$s(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 0\end{bmatrix}+s_0, \tag{3-4-28}$$

这里 s_0 是 3×3 阵．设 w 是(3-4-25)的一已知解，求解(3-4-1)后得 $\Phi(\lambda)=(\Phi_{ij}(\lambda))$．给定常数 λ_0，我们仍要求 $\det s(\lambda_0)=0$，及阵 $s(\lambda_0)\Phi(\lambda_0)$ 的三列 $(\psi_1(\lambda_1),\ \psi_2(\lambda_2),\ \psi_3(\lambda_0))$ 有一常系数线性关系

$$\sum_{i=1}^{3}c_i\psi_i(\lambda_0)=0. \tag{3-4-29}$$

若令

$$\begin{aligned}\tau_i&=\sum_{j=1}^{3}c_j\phi_{ij}(\lambda_0),\\ \alpha&=-\frac{\tau_2}{\tau_1},\\ \sigma&=-\frac{\tau_3}{\tau_1},\end{aligned} \tag{3-4-30}$$

那末成立

$$\begin{aligned}\alpha_x&=\lambda^2+\sigma,\\ \alpha_t&=-\lambda_0-\varphi+2u_x+3u\alpha+\alpha\sigma,\\ \sigma_x&=-\lambda_0-\varphi+3u\alpha+\alpha\sigma,\\ \sigma_t&=-\varphi_x+2u_{xx}+(\lambda_0-\varphi-u_x)\alpha+3u\sigma+\sigma^2,\end{aligned} \tag{3-4-31}$$

而

$$s=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & 0\\ \alpha_x & \alpha & 1\\ \lambda+\varphi+\alpha_{xx} & 3u+2\alpha_x & \alpha\end{bmatrix} \tag{3-4-32}$$

满足

$$sMs^{-1}+s_x s^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda+\tilde{\varphi} & 3\tilde{u} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3-4-33}$$

式中

$$\begin{aligned} &\tilde{u}=u+\alpha_x, \\ &\tilde{\varphi}=\varphi+3(u_x+\alpha_{xx}-\alpha\alpha_x). \end{aligned} \tag{3-4-34}$$

此外，也易验证

$$\tilde{\varphi}_x=\frac{3}{2}(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_t). \tag{3-4-35}$$

由直接计算或其它方法可以得知

$$\{u,\ \Phi(\lambda)\}\to\{\tilde{u},\ s(\lambda)\Phi(\lambda)\} \tag{3-4-36}$$

的确是方程(3-4-27)的一个 Bäcklund 变换.

4.3 Kadomtsev-Petviashvili 方程(K-P 方程，参见章末[17])

这是三个自变数的方程

$$(u_t+u_{xxx}+6uu_x)_x+u_{yy}=0, \tag{3-4-37}$$

自变数为 t, x, y，当 u 不依赖于 y 时，它实质上(除了关于 x 求导外)为 KdV 方程；若 u 不依赖于 t，把 y 改写为 t，它实质上是 Boussinesq 方程.

考虑非线性方程组

$$\begin{aligned} &\Phi_x=M\Phi+A\Phi_y, \\ &\Phi_t=N\Phi+B\Phi_y+C\Phi_{yy}, \end{aligned} \tag{3-4-38}$$

式中

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k-u & 0 \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$N=\begin{bmatrix} \sqrt{3}\,w_y+u_x & -(2u+4\lambda) \\ -(2u+4\lambda)(\lambda-u)+u_{xx}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}u_y & \sqrt{3}\,w_y-u_x-2f \end{bmatrix}, \tag{3-4-39}$$

$$w=\int u dx.$$

它的可积条件 $\Phi_{xt}=\Phi_{tx}$ 就是 K-P 方程.

设 $\Phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$是(3-4-38)的一个列向量解, $\sigma=\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$, 那末 σ 就满足

$$\begin{aligned} \sigma_x&=\lambda-u-\sigma^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sigma_y\cdot dx, \\ \sigma_t&=-(2u+4\lambda)(\lambda-u-\sigma^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sigma_y dx \\ &\quad+\frac{4}{\sqrt{3}}(\lambda-u)\int\sigma_y d_x+u_{xx}-\frac{1}{\sqrt{3}}u_y-2u_x\varphi \\ &\quad-\frac{4}{3}\left(\left(\int\sigma_y dx\right)^2+\int\sigma_{yy}dx\right)-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sigma_y+\sigma\int\sigma_y dx\right)\sigma. \end{aligned} \tag{3-4-40}$$

由此通过计算可以证明

$$\tilde{u}=u+2\sigma_x \tag{3-4-41}$$

是 K-P 方程的一个 Bäcklund 变换, 即 $\tilde{u}$ 仍然满足 K-P 方程.

这种形式的 Bäcklund 变换见章末[17], 在其中证明了(3-4-41), 并作了比较广泛的一类方程, 即

$$(u_t+u_{xxx}+6uu_x+6fu)_x+f^2u_{yy}=(f'+12f^2)$$

的 Bäcklund 变换, 它是利用线性可积系统的一个解作出的, 故仍属于 Darboux 方法的范围, 但 Darboux 阵未见得出.

4.4 主手征场

这是理论物理中的一个场论模型(见章末[18]). 设 A, B 是取值于实 $n\times n$ 阵的函数(x, t 是自变数), 且满足如下的方程组

$$A_t + B_t = 0, \tag{3-4-42}$$

$$A_t - B_x - [A, B] = 0, \tag{3-4-43}$$

那末 A, B 就称为 $GL(n)$(完全线性群)的主手征场*，一般常用的是 $SU(n)$ 群，但这里我们只叙述 $GL(n, R)$ 的情形.

(3-4-43)是方程

$$g_x = gA, \quad g_t = gB \tag{3-4-44}$$

的可积条件，这里 g 是取值于 $GL(u, R)$ 的函数. 但是，由它不能得出(3-4-42)来，为此，我们引入带参数 λ 的方程组

$$\Phi_x = \lambda A\Phi, \quad \Phi_t = -\frac{\lambda}{1+2\lambda} B\Phi, \tag{3-4-45}$$

其可积条件为

$$\lambda A + \frac{\lambda}{1+2\lambda} B_x - \frac{\lambda^2}{1+2\lambda}[A, B] = 0, \tag{3-4-46}$$

这等价于(3-4-42)、(3-4-43).

下面讨论 Bäcklund 变换的 Darboux 方法(见章末[19]).

设 Φ 为(3-4-45)的一个非平凡解，$\det\Phi \neq 0$. 令

$$s(\lambda) = I + \alpha\lambda, \tag{3-4-47}$$

式中 α 为待定的矩阵值函数，$\det\alpha \neq 0$. 又记

$$\Phi_1(\lambda) = s(\lambda)\Phi(\lambda), \tag{3-4-48}$$

代入 $\Phi_1(\lambda)_x = \lambda A_1\Phi$，就得出

$$A_1 = \alpha A\alpha^{-1}, \tag{3-4-49}$$

$$\alpha_x\alpha = \alpha A - A\alpha, \tag{3-4-50}$$

代入 $\Phi_1(\lambda)_t = -\frac{\lambda}{1+2\lambda} B_1\Phi_1(\lambda)$，我们得

$$B_1 = \alpha B\alpha^{-1} - 2\alpha_t\alpha^{-1}, \tag{3-4-51}$$

$$\alpha_t\alpha - 2\alpha_t = B\alpha - \alpha B. \tag{3-4-52}$$

选 A 为对角阵，其对角元为 ± 1，但不能全为 1，也不能全为 -1. 为书写方便计，取

* 物理上，x, t 应以 $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ 所代替，ξ, η 是“光锥坐标”。

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1\end{bmatrix}, \tag{3-4-53}$$

其中有 s 个 $+1$, $(n-s)$ 个 $-1(0<s<n)$. 记 $\phi_1(\lambda)$, …, $\phi_k(\lambda)$ 为(3-4-45)的 n 个列向量解, 使得 $n\times n$ 阵

$$h=[\phi_1(1),\ \cdots,\ \phi_s(1),\ \phi_{s+1}(-1),\ \cdots,\ \phi_n(-1)] \tag{3-4-54}$$

非退化, 即 $\det h\neq 0$. 我们要求

$$s(1)\phi_1(1)=0,\ \cdots,\ s(1)\phi_s(1)=0,$$
$$s(-1)\phi_{s+1}(-1)=0,\ \cdots,\ s(-1)\phi_n(-1)=0.$$

这就是前述的对于 Darboux 阵的主要要求. 注意到

$$s(\lambda)=I+\lambda\alpha,$$

把这些式子综合成 $n\times n$ 阵的形式, 就是

$$h+\alpha h\Lambda=0. \tag{3-4-55}$$

从此得

$$\alpha=-h\Lambda h^{-1}, \tag{3-4-56}$$

且成立 $\alpha^2=I$, $\det\alpha\neq 0$, 注意到(3-4-45)的第一式, 就有

$$\begin{aligned}h_x&=[A\phi_1(1),\ \cdots,\ A\phi_s(1),\ -A\phi_{s+1}(-1),\ \cdots,\ A\phi_n(-1)]\\&=Ah\Lambda,\end{aligned} \tag{3-4-57}$$

从而就得

$$\alpha_x=-Ah\Lambda^2h^{-1}+h\Lambda h^{-1}Ah\Lambda h^{-1}=-A+\alpha A\alpha. \tag{3-4-58}$$

因为 $\alpha^2=I$, 这就是(3-4-50)式.

再注意到(3-4-45)的第二式, 我们有

$$\phi_a(1)_t=-\frac{1}{3}B\phi_a(1)\quad(a=1,\ 2,\ \cdots,\ s),$$

$$\phi_b(-1)_t=-B\phi_b(-1)\quad(b=s+1,\ \cdots,\ n).$$

从而有

$$h_t=Bh\Lambda', \tag{3-4-59}$$

式中

$$\Lambda'=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}. \tag{3-4-60}$$

从此可算得

$$\begin{aligned}\alpha_t&=-Bh\Lambda'\Lambda h^{-1}+h\Lambda h^{-1}Bh\Lambda'h^{-1}\\&=-Bh\Lambda'\Lambda h^{-1}-\alpha Bh\Lambda'h^{-1},\end{aligned}$$

通过简易的计算，我们得(3-4-52).

这样，我们就知道

$$\{A,\ B,\ \Phi(\lambda)\}\to\{A_1,\ B_1,\ \Phi_1(\lambda)\} \tag{3-4-61}$$

是 $GL(n)$ 的主手征场的 Bäcklund 变换，这里

$$\begin{aligned}&A_1=\alpha A\alpha,\quad B_1=\alpha B\alpha-2\alpha_t\alpha,\\&\Phi_1(\lambda)=(I+\alpha\lambda)\Phi(\lambda),\end{aligned} \tag{3-4-62}$$

而 α 由(3-4-56)所确定. 进一步的研究已经得出，令 $\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1^{-1},\ \cdots,\ \lambda_n^{-1}]$，$\lambda_i\neq 0,\ -\frac{1}{2}$，又将(3-4-54)中的 h 改为

$$h=[\phi_1(\lambda_1),\ \cdots,\ \phi_n(\lambda_n)]$$

上述结论仍成立，即我们已有一般的 Darbouwx 阵.

如果我们限于 $SL(n,\ R)$ (或 $SL(n,\ C)$)解，A，B 应添加 $\mathrm{tr}A=0$，$\mathrm{tr}B=0$，而

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\,A_1=\mathrm{tr}(\alpha A\alpha)=\mathrm{tr}\,A=0,\\&\mathrm{tr}\,B_1=\mathrm{tr}(\alpha B\alpha)-2\mathrm{tr}(\alpha_t\alpha)=-2\mathrm{tr}(\alpha_t\alpha),\end{aligned}$$

因 $\mathrm{tr}\,\alpha=-\mathrm{tr}\,\Lambda$，$\mathrm{tr}\,\alpha_t=(\mathrm{tr}\alpha)_t=0$，根据(3-4-52)式可见 $\mathrm{tr}B_1=0$，因而这里的方法完全适用

主手征场的 Bäcklund 变换的微分方程形式可见章末[18]，但方程看来比较复杂，未得出显式解法. 这里的叙述给出了微分

方程的显式解.

§5 补充说明

5.1 和反散射方法的关系

上述的 Darboux 阵方法适用于孤立子方程的任何解，并不要求所考虑的只是孤立子解(例如，可换性定理的证明就没有用到任何无限远条件). 因而它和反散射方法是独立的. 但另一方面，对孤立子解作用适当的 Darboux 阵，却能够增加或消去孤立子. 我们将就非线性 Schrödinger 方程来论述这件事.

我们考虑线性系统

$$\Phi_x = M\Phi, \quad \Phi_t = N\Phi. \tag{3-5-1}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix} -i\zeta & p \\ -\bar{p} & i\zeta \end{bmatrix}, \quad N=\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}, \tag{3-5-2}$$

A, B 是 $i\zeta$, p, $\bar{p}$ 及其 x 导数的多项式，且对实的 ζ，成立 $N^{+}+N=0$. 这里"+"表示转置共轭. 若 $p=\bar{p}=0$ 时，$A=i\omega(\zeta, t)$，则 A, B 就完全确定，这里 $\omega(\zeta, t)$ 是 ζ 的多项式，而且当 $p=\bar{p}=0$ 时，$B=0$. 现设 p 是孤立子解，因而当 $x\to\pm\infty$ 时，$p\to 0$. 这个方程的散射数据有如下的演化规则:

$$\begin{aligned} & a(\zeta, t)=a(\zeta, 0), \\ & b(\zeta, t)=b(\zeta, 0)\exp\left\{2i\int_0^t \omega(\zeta, \tau)\,d\tau\right\}, \\ & \zeta_k(t)=\zeta_k(0), \\ & \mu_k(t)=\mu_k(0)\exp\left\{2i\int_0^t \omega(\zeta_k, \tau)\,d\tau\right\}, \end{aligned} \tag{3-5-3}$$

式中 $\dfrac{1}{a}$ 是反射系数，$\dfrac{b}{a}$ 是透射系数，ζ_k 是特征值，μ_k 是相应的归一化因子. 记 ϕ_r 和 $\tilde{\phi}_l$ 为满足

$$\phi_r(x, t, \zeta) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \quad (x \to -\infty),$$
$$\tilde{\phi}_l(x, t, \zeta) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \quad (x \to +\infty) \tag{3-5-4}$$

的解，那末，记

$$\Phi = (\phi_r, \tilde{\phi}_l) \tag{3-5-5}$$

为基础解. 取 ζ_0，使 $\det \Phi(\zeta_0) \neq 0$. 任取 μ_0，由

$$\sigma_0 = \frac{\Phi_{21}(\zeta_0) - \mu_0 \Phi_{22}(\zeta_0)}{\Phi_{11}(\zeta_0) - \mu_0 \Phi_{12}(\zeta_0)} \tag{3-5-6}$$

作相应的 Darboux 阵 $s(\lambda)$，照样作 Darboux 变换

$$\{p, \Phi\} \to \{p_1, \Phi_1\}.$$

通过直接的运算可以见到，p_1 解所相应的散射数据为

$$\begin{aligned} a_1(\zeta, t) &= \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} a(\zeta, t), \\ b_1(\zeta, t) &= b(\zeta, t), \\ \zeta_{1k} &= \zeta_k, \\ \mu_{1k} &= \mu_k, \end{aligned} \tag{3-5-7}$$

以及新添加的

$$\begin{aligned} \zeta_{10} &= \zeta_0, \\ \mu_{10}(t) &= \mu_0 \exp\left\{2i \int_0^t \omega(\zeta_0, \tau) d\tau\right\}, \end{aligned} \tag{3-5-8}$$

这就是 Darboux 变换增生"一个孤立子"的过程. 从此也可明显地看出，用反散射方法得出的 N 孤立子解确实能利用逐次作用 Darboux 阵而得到.

利用相反的 Darboux 变换，能消去一个特征值. 对于 KdV 方程也是如此. 详细的计算可见章末[20].

5.2 关于一般的 Darboux 阵

$$F(u, u_t, u_x, \cdots) = 0 \tag{3-5-9}$$

是关于 u（一个未知函数或一组未知函数）的一个方程组，它是一

个线性方程组

$$\Phi_x = M\Phi, \quad \Phi_t = N\Phi \tag{3-5-10}$$

的完全可积条件，即(3-5-9)和

$$M_t - N_x + [M, N] = 0 \tag{3-5-11}$$

等价．(3-5-10)中 M, N 包含 u 以及某些偏导数，记为 $M[u]$, $N[u]$，如果(3-5-9)有另一解 u_1,

$$\Phi_{1x} = M[u_1]\Phi_1, \quad \Phi_{1t} = N[u_1]\Phi_1, \tag{3-5-12}$$

必为完全可积．记

$$s = \Phi_1\Phi^{-1}, \tag{3-5-13}$$

那末成立

$$\begin{aligned} M[u_1] &= sM[u]s^{-1} + s_x s^{-1}, \\ N[u_1] &= sN[u]s^{-1} + s_t s^{-1}. \end{aligned} \tag{3-5-14}$$

这个式子称为规范变换，s 称为广义 Darboux 阵，(3-5-14)也可改写为

$$\begin{aligned} s_x &= M[u_1]s - sM[u], \\ s_t &= N[u_1]s - sN[u]. \end{aligned} \tag{3-5-15}$$

对(3-5-9)的一个已知解，我们求解(3-5-15)(关于 s 和 u_1)，就可以得出新解和 Darboux 阵．由上所述，(3-5-9)的任何两个解都可以由广义 Darboux 阵联系．或者说，从任一个平凡解出发，通过广义 Darboux 阵，原则上可以作出任何其它一个解来．但(3-5-15)(将 s 和 u_1 同时作为未知函数)是不容易解的，一般要添上其他结构(例如参数 λ)，才能使(3-5-15)化为可以解出的形式．我们所说的 Darboux 方法，就是给出(3-5-15)的解的一种方法．

除了 Darboux 阵方法外，还有不少求 Bäcklund 变换的方法，例如，Hirota 的双线性导数法、延拓法、局部高阶切丛法(Jet bundle)等等．因限于篇幅，这里不多加叙述了，可以参考有关的专著．

参考文献

[1] A. V. Bäcklund, Lund Universitets Arsskrift 10, 1885.

[2] L. P. Eisenhart, A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Dover, New York, 1960.

[3] C. Rogers, and W. R. Shadwick, Bäcklund transformations and their application, academic Press, New York, 1982.

[4] H. D. Wahlquist, and F. B. Estabrook,, Bäcklund transformations for solitons of the Korteweg-de Vriu eqution, Phy. Rev. Lett. 31 (1973), 1386~1390.

[5] G. Neugebauer and R. Meinel, General N-soliton solestion of the AKNS class on arbitrary background, Phys. Lett, 100A (1984), 467~470.

[6] C. H. Gu (谷超豪)and Z. X. Zhou, On the Darboux matrices of Bäcklund transformations for the AKNS system, Lett. Math, Phys, 1987, 179.

[7] Y. S. Li, X. S. Gu and M. R. Zhou, Three kinds of Darboux transformations for the evolution equations which connect with AKNS eigenvalue problem (to appear on Acta, Math, Sinica).

[8] 邹茂荣, AKNS 特征问题以及 Kaup-Newell 特征值问题的 Darboux 变换, 预印本, 1985.

[9] C. Tian, Bäcklund transformation of nonlinear evolution equations, Acta Math, Appl, Sinica, 1986.

[10] C. H. Gu, On the Bäcklund transformations for the generalized hierarchies of compound MKdV-SG cquation, Lett. Math, Phys, 11(1986),31.

[11] C. H. Gu and H. S. Hu, A unified explicit form of Bäcklund transformations for generalizedhierarchies of KdV equations, Lett. Math, Phys, 11(1986),325~335.

[12] C. H. Gu, On the Darboux form of Bäcklund transformations, Proc. Nankai Symposium on integrable system, 1987.

[13] G. Wilson, Commuting flows and conservation laws for Lax equations, Math. Proc, Camb. Phil. Soc., 86 (1979), 131~143.

[14] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, 彭启才译, 孤立子理论, 科学出版社, 1985.

[15] M. Boiti and G. Z. Tu, Bäcklund transformations via gauge transformations, il nuovo cimento, 71B(1982), 253~264.

[16] Y. S. Li and X. S. Gu, Generating solution of Boussinesg equation by

Darboux transformation of three order eigenvalue differential equations, Ann. Diff. Eqs., 2 (1986), 419~422.

[17] C. Tian, Generalized KP equation and Miura transformation, Preprint, 1986.

[18] A. T. Ogielski, K. Prasad, A. Sinha and L. L. Chau, Bäcklund transformations and local conservation laws for principal chiral fields, Phys. Lett. 91B (1980), 387~391.

[19] C. H. Gu and Z. X. Zhou, Explicit form of Bäcklund transformations for GL(n), U(n) and O(2n) principal chiral fields, Proc. of international conference on nonlinear evolution equations, Como, 1988.

[20] J. M. Lin, Evolution of the scattering data under classical Darboux transform for SU(2) solitonsystems (to appear).

第四章

经典可积系统

曹策问

Liouville 意义下的完全可积系统是一个挑战性的题目. 人们对它的认识经历了一个大的反复. 早期经典力学的理想目标是求出运动方程的显式解. 这种努力的顶点, 是发现一些以技巧著称的完全可积力学系统的范例, 如 Jacobi 关于椭球面上测地线方程的积分, Kovalevskaya 关于一些类型的陀螺的研究等. 到 19 世纪后期, Poincaré 等人意识到多数 Hamilton 系统并不完全可积,特别是指出了著名的三体问题不可积. 后来又发现,在小扰动下完全可积性受到破坏. 这样,可积性的重要性自然受到了怀疑. 可积系统被认为是个别的例外情形,不具备通有性. 从 Poincaré 等人开始,动力系统的研究重点,转向定性理论. 可积理论自此进入低潮.

20 世纪 60 年代中期,对孤立子的研究兴起, 发现为数众多的方程, 尽管背景极不相同, 却都被判明为 Liouville 完全可积的. 此外又知道,在小扰动下,虽然完全可积性被破坏,但原问题的不变环面的一个大子集却保留了下来, 组成一个复杂的具有正测度的 Cantor 集, 这就是著名的 KAM 理论(见本章末[1]). 有人进一步证明(见[2]), 在 Whitney 可微意义下, 扰动系统在上述 Cantor 集上仍是完全可积的. 这样, 造成 19 世纪末叶以来对完

全可积性的研究停滞的原因不复存在．在一个新的层次上，近年又开始了热烈的，忙碌的资料积累过程．不过如 J. Moser 所指出，对可积系统本质的认识，还差得远．

下面我们将论述有限维辛流形，Liouville 完全可积性及一些初步的例子．主要是介绍 V. I. Arnold(见本章末 [3])与 J. Moser (见本章末[1])等人的工作，增补一点说明及证明．无穷维的工作已有不少进展，但框架性的基本工作尚未完成，本文不拟涉及．

§1 辛 流 形

1.1 辛流形

Hamilton 系统的理论框架是辛流形．最简单的例子是装配了微分 2- 形式 $\omega^2=dp\wedge dq$ 的坐标空间 $\boldsymbol{R}^{2n}=\{(p,\ q)\}$．为了以后的应用，需要计算 ω^2 的矩阵 $J=(\omega_{ij})$．令

$$\boldsymbol{R}^{2n}=\{(x^1,\ \cdots,\ x^{2n})\}=\{(p^1,\ \cdots,\ p^n,\ q^1,\ \cdots,\ q^n)\},$$

即 $p^i=x^i,\ q^i=x^{n+i}$，则

$$\omega^2=dp\wedge dq=\sum_{i=1}^{n}dp^i\wedge dq^i=\sum_{i=1}^{n}dx^i\wedge dx^{n+i},\qquad(4\text{-}1\text{-}1)$$

切向量 ξ 的分量 $\xi^i=dx^i(\xi)$，故按外积取值的定义

$$\omega^2(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\xi^i & \xi^{n+i}\\ \eta^i & \eta^{n+i}\end{vmatrix}=\sum_{i,j=1}^{2n}\omega_{ij}\xi^i\eta^j,\qquad(4\text{-}1\text{-}2)$$

$$J=(\omega_{ij})=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}.\qquad(4\text{-}1\text{-}3)$$

易知 $\det J=1$，故 ω^2 非退化．记住 J 的逆矩阵 I 为

$$I=J^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}=-J=J^T,$$

若记 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中的标准内积为$(\cdot,\ \cdot)$，则

$$\omega^2(\xi,\ \eta)=(\xi,\ J\eta)=(I\xi,\ \eta).\qquad(4\text{-}1\text{-}4)$$

定义 1 偶维流形 M^{2n} 上的辛结构，是一个闭的、非退化的微分 2- 形式 ω^2. (M^{2n}, ω^2) 称为辛流形. 闭条件即 $d\omega^2=0$, 非退化条件为

$$\omega^2(\xi, \eta)=0, \quad \forall \quad \eta \Rightarrow \xi=0. \tag{4-1-5}$$

这里 ξ, η 为同一点处的切空间 TM_x 中的向量.

闭条件对于以后建立 Hamilton 函数的 Lie 代数是重要的，它等价于那里的 Jacobi 恒等式(见本节的 1.5.).

我们观察一下辛结构 ω^2 的局部表示所满足的条件. 先设 ω^2 是任意的微分 2- 形式

$$\omega^2=\sum_{i<j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j=\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

其中令 $\omega_{ji}=-\omega_{ij}$. 则对 $\xi, \eta \in TM_x$,

$$\omega^2(\xi, \eta)=\frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}(\xi^i \eta^j-\xi^j \eta^i)=\sum_{i,j} \omega_{ij} \xi^i \eta^j. \tag{4-1-6}$$

利用 Einstein 求和约定，简写为

$$\omega^2(\xi, \eta)=\omega_{ij} \xi^i \eta^j. \tag{4-1-7}$$

命题 1 ω^2 非退化，当且仅当 $\det(\omega_{ij}) \neq 0$.

证明 ω^2 退化：存在 $\xi \neq 0$, 使 $\omega^2(\xi, \eta)=0$, 对任意 η 成立，即 $\omega_{ij}\xi^i\eta^j=0$ 对任意实数 η^j 成立. 这等价于 $\omega_{ij}\xi^i=0$ 有非零解 ξ, 其充要条件是系数行列式 $\det(\omega_{ij})=0$.

闭条件的局部表示. 由

$$0=2d\omega^2=\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j,$$

故为 C_n^3 个等式

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}+(i,\ j,\ k \text{ 轮换})=0.$$

总之，辛结构 ω^2 在局部坐标中的矩阵满足三个条件，即反称条件 $\omega_{ji}=-\omega_{ij}$, 非退化条件 $\det(\omega_{ij}) \neq 0$ 与上面用偏导数表出的闭条件.

1.2 余切丛的自然辛结构

辛流形的一个重要特例，由余切丛产生．设 V 为 n 维微分流形．V 在 x 点处的切空间 TM_x 是一个 n 维向量空间，其上的一个 1- 形式 ω^1 称为 V 在 x 处的一个余切向量．在 x 处的全体余切向量组成 V 在 x 处的余切空间 T^*V_x．它是切空间的线性对偶．V 上各点处的所有余切向量构成 V 的余切丛 T^*V，显然，

$$T^*V=\bigcup_{x\in V}T^*V_x.$$

余切向量到切点的自然投影

$$\pi:\ \omega^1\mapsto x;\quad TM\to M$$

是重要的．

局部表示 设 V 在 x 邻域有局部坐标 $(q^1,\ \cdots,\ q^n)$，则 TM_x 有基底 $e_i=\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ 与坐标函数 dq^i．其上的 1- 形式有唯一的展式

$$\omega^1=\sum_{i=1}^{n}p_idq^i,\qquad p^i=\omega^1(e_i)\triangleq\langle e_i,\ \omega^1\rangle. \tag{4-1-8}$$

故 T^*V_x 有基底 dq^i 与坐标函数 $\langle e_i,\ \cdot\rangle$．$T^*V_x$ 上元素 ω^1 的坐标为 (p^i)．T^*V 上的元素 ω^1 的坐标为 $(p^i,\ q^i)$．这赋予 T^*V 以 $2n$ 维流形构造．

定理 1 余切丛 T^*V 有自然的辛构造，其局部表示为

$$\omega^2=dp\wedge dq. \tag{4-1-9}$$

证明 任取 $p\in T^*V_x$，则它具有二重性：一方面 p 是 T^*V 的一点，自然投影 π 将 p 映为 V 的一点 x；另一方面 p 是 V 在 x 处的 1- 形式，拉回映射

$$\pi^*,\ p\mapsto\pi^*p\triangleq\omega^1$$

将其拉回为 T^*V 在 p 处的 1- 形式．因而用外微分立即得到 T^*V（在 p 处）的 2- 形式

$$\omega^2=d\omega^1=d(\pi^*p). \tag{4-1-10}$$

显然它是闭的：$d\omega^2=dd\omega^1=0$．为证明它是 T^*V 的辛结构，剩下

还需证明其非退化性.

因为 $\pi: p\mapsto x$ 的局部坐标表示为$(p^i, q^i)\mapsto(q^i)$，故对任一切向量 $\xi\in T(T^*V)_p$, $\pi_*: \xi\mapsto\pi_*\xi$ 的局部坐标表示为

$$(dp^i(\xi),\ dq^i(\xi))\mapsto(dq^i(\xi)),$$

因此

$$\omega^1(\xi)=\pi^*p(\xi)=p(\pi_*\xi)=\sum_{i=1}^n p^i dq^i(\xi).$$

由 ξ 的任意性,

$$\omega^1=\sum_{i=1}^n p^i dq^i, \tag{4-1-11}$$

$$\omega^2=d\omega^1=\sum_{i=1}^n dp^i\wedge dq^i. \tag{4-1-12}$$

由本章§1节开始的简单例子，知 $\det(\omega^2)=1\neq 0$. 非退化性得证，同时也给出定理中的局部表示.

1.3 Hamilton 向量场

Noether 算子 I. 设有辛流形(M^{2n}, ω^2)，对给定的切向量 $\xi\in TM_x$ 用等式

$$\omega^1(\eta)=\omega^2(\eta,\ \xi),\quad \forall\quad \eta\in TM_x,$$

可确定一个余切向量 $\omega^1\in T^*M_x$. 我们想知道映射 $\xi\mapsto\omega^1$ 是不是可逆的，为此将上等式写成局部表示的形式

$$a_i\eta^i=\omega_{ij}\eta^i\xi^j,\quad \forall\quad \eta^i,$$

故 $a_i=\omega_{ij}\xi^j$. 由辛结构的非退化性 $\det(\omega_{ij})\neq 0$ 立刻知道有唯一解 $\xi^i=\omega^{ij}a_j$, (ω^{ij})是(ω_{ij})的逆矩阵. 于是便有

定理 2　存在唯一的线性同构 $I: \omega^1\mapsto\xi=I\omega^1, (T^*M_x\to TM_x)$，使得

$$\omega^1(\eta)\equiv\omega^2(\eta,\ I\omega^1),\ \forall\quad \omega^1\in T^*M_x,\ \forall\quad \eta\in TM_x.$$

在局部坐标中，I 的矩阵恰为辛结构 ω^2 的矩阵之逆.　(4-1-13)

I 称为 Noether 算子或逆辛 (implectic, 为 inverse symplectic 之缩写词)算子. 变动切点 x，它显然将 M 的微分 1-形式 ω^1

映为 M 上的向量场. 或者说将余切丛的截面所成之空间映为切丛的截面所成之空间 $I: \Gamma(T^*M)\to\Gamma(TM)$.

定义 2 辛流形上的光滑函数 $H: M^{2n}\to\boldsymbol{R}$ 称为 Hamilton 函数, IdH 称为 Hamilton 向量场, Hamilton 正则方程写为

$$\dot{x}=IdH(x).$$

这里 $\dot{x}=x_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, t为流变量. 若 M 为欧氏空间中的嵌入流形, 则 $\dot{x}$ 即为解对 t 的导数. 在局部坐标$(x^1,\cdots,x^{2n})$中, Hamilton 向量场与正则方程的分量式分别为

$$(IdH)^i=\omega^{ik}\frac{\partial H}{\partial x^k},\qquad \dot{x}^i=\omega^{ik}\frac{\partial H}{\partial x^k}. \tag{4-1-14}$$

特别, 在$(\boldsymbol{R}^{2n},\ \omega^2=dp\wedge dq)$中,

$$(IdH)=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_p\\ H_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-H_q\\ H_p\end{pmatrix}, \tag{4-1-15}$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\qquad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{4-1-16}$$

这里 $H_p=\frac{\partial H}{\partial p}=\left(\frac{\partial H}{\partial p^1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial p^n}\right)$等是浓缩写法.

考虑初值问题:

$$\dot{x}=IdH(x),\qquad x|_{t=0}=x_0.$$

在局部坐标中, 成为常微分方程组的初值问题. 用解算子 g^t, 记其解为 $x(t)=g^tx_0$, 则由解的存在唯一及对初值的可微性可知, g^t: $M^{2n}\to M^{2n}$ 是微分同胚, 且易确定群性质 $g^t\circ g^s=g^{t+s}$(当 t, s, $t+s$ 都属于解的存在区间), 故 g^t 组成微分同胚的(局部)单参群, 称为 Hamilton 相流. 由定义知

$$\frac{d}{dt}g^tx=IdH(g^tx). \tag{4-1-17}$$

定理 3 每一个 Hamilton 相流都保持辛结构: $(g^t)^*\omega^2=\omega^2$. 这是 Hamilton 相流最重要的性质之一. 证明见本章末[3].

由拉回映射与外积的相容关系

$$f^*(\omega^k \wedge \omega^l) = (f^*\omega^k) \wedge (f^*\omega^l)$$

立刻知道$(g^t)^*$保持$\omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^2$. 当$\omega^2$个数为$n$时，这恰为体积元(不计常因子)．因此便有

推论　Hamilton 相流是保测的.

1.4　流的可换性

考察一般微分流形M(不限于辛流形)上的光滑向量场$\xi \in \mathscr{X}(M)$．按定义，对$x \in M$，有$\xi(x) \in TM_x$.

由向量场ξ决定的流g_ξ^t：$M \to M$是一个微分同胚的单参(局部)群，满足

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_\xi^t x = \xi(x). \tag{4-1-18}$$

换言之，g_ξ^t是初值问题

$$\dot{x} = \xi(x), \quad x|_{t=0} = x_0$$

的解算子，其解可表示为$x(t) = g_\xi^t x_0$.

流形M在x处的切向量ξ，通常定义为M上过x的曲线的切等价类．利用流可定义流形上的方向微分算子L_ξ，它将光滑函数φ: $M \to \boldsymbol{R}$映为光滑函数，其值为

$$(L_\xi \varphi)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(g_\xi^t x) = d\varphi(\xi(x)). \tag{4-1-19}$$

易知$\xi \mapsto L_\xi$为线性同构，且由局部表示$\xi = \xi^i e_i$推出局部表示$L_\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$．故在线性问题中，可将$\xi$与$L_\xi$等同看待.

如所周知，换位子$[L_\xi, L_\eta] = L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi$仍为一阶微分算子，记为$L_\zeta$．事实上，由直接计算知，若$L_\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$, $L_\eta = \eta^i \partial/\partial x^i$，则

$$L_\zeta = (L_\xi \eta^i - L_\eta \xi^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{4-1-20}$$

ζ定义为向量场ξ与η的 Poisson 括号，仍记为$[\xi, \eta]$，因此

$$[L_\xi, L_\eta] = L_{[\xi, \eta]}. \tag{4-1-21}$$

这样，便有方向微分算子的 Lie 代数与向量场的 Lie 代数的

同构．进一步，在 Lie 代数问题上，可将 ξ 与 L_ξ 等同看待．

流 g_ξ^t, g_η^s 不一定可交换．为考虑其不可交换程度，任取光滑函数 $\varphi: \boldsymbol{M}\to\boldsymbol{R}$，研究

$$\Delta(t,\ s)=\varphi(g_\xi^t g_\eta^s x)-\varphi(g_\eta^s g_\xi^t x).$$

$x\in M$ 是任一固定点．因 $s=0$ 时 $\Delta\equiv 0$，故在 $(0,\ 0)$ 处 Δ_t', Δ_{tt}'' 都为零．同理，Δ_s', Δ_{ss}'' 为零．由定义不难算出

$$\Delta_{st}''(0,\ 0)=-[L_\xi,\ L_\eta]\varphi(x).$$

按 Taylor 展式：

$$\varphi(g_\xi^t g_\eta^s x)-\varphi(g_\eta^s g_\xi^t x)=-st[L_\xi,\ L_\eta]\varphi(x)+O(r^3) \quad (4\text{-}1\text{-}22)$$

其中 $r=\sqrt{t^2+s^2}$.

定理 4　流 g_ξ^t, g_η^s 可换，当且仅当 $[\xi,\ \eta]=0$,

证明　若流可换，则 $\Delta(s,\ t)\equiv 0$，由上面等式立刻得 $[L_\xi,\ L_\eta]=0$，故 $[\xi,\ \eta]=0$．反之，设 $[\xi,\ \eta]=0$，则

$$\varphi(g_\xi^t g_\eta^s x)-\varphi(g_\eta^s g_\xi^t x)=O(r^3).$$

因 φ 为任意光滑函数，给流形 M 以确定的 Riemann 度量时，$g_\xi^t g_\eta^s x$ 与 $g_\eta^s g_\xi^t x$ 的 Riemann 距离为 r^3 阶．

任取定 $x\in M$．ts–平面上每一条由水平与竖直线段构成的折线，都相应于流形 M 上的一条路径

$$g_\xi^{t_1} g_\eta^{s_1}\cdots g_\xi^{t_n} g_\eta^{s_n} x.$$

将矩形 $0\leqslant t\leqslant a$, $0\leqslant s\leqslant b$ 等分为 N^2 个小矩形．ts–平面上连结 $(0,0)$, $(a,\ 0)$, $(a,\ b)$ 三点的折线，经过 N^2 步，可变为连结 $(0,0)$, $(0,\ b)$, $(a,\ b)$ 三点的折线．每一步将某一小矩形的下、右两边，变为上、左两边．由图 4–1 可知

$$\rho(\alpha',\ \alpha'')=O(N^{-3}).$$

由解对初值的可微性

$$\rho(\beta',\ \beta'')=O(N^{-3}).$$

故经 N^2 步后，

$$\rho(g_\xi^a g_\eta^b x,\ g_\eta^b g_\xi^a x)=O(N^{-1}). \qquad (4\text{-}1\text{-}23)$$

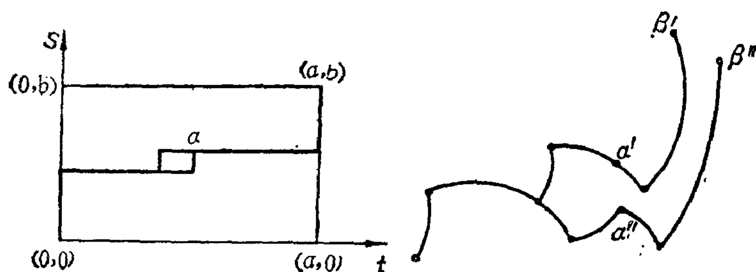


图 4-1

因左式与 N 无关，令 $N\to\infty$ 可确立 $g_\xi^a g_\eta^b x = g_\eta^b g_\xi^a x$. 流的可换性得证.

1.5 Hamilton 函数的 Lie 代数

设 (M^{2n}, ω^2) 是辛流形，$H: M^{2n}\to \boldsymbol{R}$ 是 Hamilton 函数. 以下将 Hamilton 向量场 $\xi = IdH$ 的 Hamilton 相流 $g_\xi^t = g_{IdH}^t$ 简记为 g_H^t.

定义 3 两个 Hamilton 函数 F, H 的 Poisson 括号是一个 Hamilton 函数，其值为 F 沿 H 流的导数

$$(F, H)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(g_H^t x) = L_{IdH}F(x)$$

公式 $(F, H)(x) = dF(IdH)_x = \omega^2(IdH, IdF)_x$ (4-1-24)

定理 5 Hamilton 函数的 Poisson 括号是双线性的和反称的，且满足 Jacobi 恒等式

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0. \quad (4\text{-}1\text{-}25)$$

证明 双线性与反称性由前述公式即得. 为证 Jacobi 恒等式，简记 $a = IdA$, $b = IbB$, $c = IdC$, 则

$$((A, B), C) + ((C, A), B) = (L_cL_b - L_bL_c)A$$

只含 A 的一阶导数项. B, C 情形类似. 故以下计算中 A, B, C 的二阶导数项一律略去. 上式经计算为:

$$(L_c b^l - L_b c^l)\frac{\partial A}{\partial X^l} = \left(c^k \frac{\partial b^l}{\partial x^k} - b^k \frac{\partial c^l}{\partial x^k}\right)\frac{\partial A}{\partial x^l}$$

$$= \frac{\partial \omega^{lj}}{\partial x^k}\omega_{ij}(c^k b - b^k c)\omega_{ls}a^s$$

$$= \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}(c^k b - b^k c^j)a^i.$$

将 A, B, C 作轮换后相加,

$$((A, B), C) + \text{cycle}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}\begin{vmatrix} a^k & b^k & c^k \\ a^i & b^i & c^i \\ a^j & b^j & c^j \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j(a, b, c)$$

$$= d\omega^2(a, b, c).$$

这样,便导出一个非常有趣的等式,

$$((A, B), C)) + ((B, C), A) + ((C, A), B)$$
$$= d\omega^2(IdA, IdB, IdC). \tag{4-1-26}$$

由此得出一个深刻的关系: 辛结构 ω^2 满足的闭条件 $d\omega^2=0$, 与 Poisson 括号满足的 Jacobi 恒等式,是互相等价的. 定理证明完.

注意: Hamilton函数的全体,在加法、数乘与上述 Poisson 括号积之下,构成一个 Lie 代数.

命题 2 Poisson 括号在局部坐标中表示为

$$(F, H) = \omega^{ik}\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^k} = \langle \nabla F, I\nabla H \rangle. \tag{4-1-27}$$

证明 左式 $= \omega^2(IdH, IdF)$

$$= \omega_{ij}(\omega^{ik}H_k)(\omega^{jl}F_l)$$

$$= (\omega^{ik}H_k)(\delta_i^l F_l)$$

$$= \omega^{ik}H_k F_i.$$

特例　在$(\boldsymbol{R}^{2n}, dp\wedge dq)$中，

$$(F,\ H)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p^i}-\frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(F,\ H)}{\partial(q^i,\ p^i)}. \tag{4-1-28}$$

证明　$(\omega^{ij})=(I)=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}.$

$$(F,\ H)=(F_pF_q)\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_p\\ H_q\end{pmatrix}=F_q\cdot H_p-F_p\cdot H_q.$$

命题 3　Hamilton 正则方程的括号表示:

$$\dot{x}^j=(x^j,\ H). \tag{4-1-29}$$

证明　由1.3.段已知正则方程可用局部坐标写为

$$\dot{x}^j=\omega^{jk}H_k.$$

另一方面，

$$(x^j,\ H)=\omega^{ik}\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^k}=\omega^{ik}\delta_i^jH_k=\omega^{jk}H_k.$$

特例　在$(\boldsymbol{R}^{2n}, dp\wedge dq)$中，正则方程为

$$\dot{p}^i=(p^i,\ H),\ \dot{q}^i=(q^i,\ H). \tag{4-1-30}$$

用 Poisson 括号研究 Hamilton 相流的守恒量非常方便.

定理 6　(i) F 是流 g_H^t 的守恒量，当且仅当$(F,\ H)=0$. (ii) 若 F 是流 g_H^t 的守恒量，则 H 是流 g_F^t 的守恒量(互反律). (iii) 若 $F_1,\ F_2$ 是 g_H^t 的守恒量，则$(F_1,\ F_2)$也是 g_H^t 的守恒量(Poisson 定理).

证明　(i) 由 $g_H^{\tau+s}=g_H^sg_H^\tau$，知

$$\frac{d}{d\tau}F(g_H^\tau x)=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}F(g_H^sg_H^\tau x)=(F,\ H)(g_H^\tau x),$$

故

$$F(g_H^tx)-F(x)=\int_0^t(F,\ H)(g_H^\tau x)d\tau, \tag{4-1-31}$$

因此 F 沿流 g_H^tx 守恒的充要条件是 $(F,\ H)=0$.

(ii) 是(i)的直接推论.

为证(iii), 由 Jacobi 恒等式

$$((F_1, F_2), H)+((F_2, H), F_1)+((H, F_1), F_2)=0,$$

根据 F_1, F_2 是 H-流的守恒量, 后两项为零, 推出第一项为零.

Jacobi 恒等式的另一重要推论是:

命题 4 $[IdB, IdC]=-Id(B, C)$. (4-1-32)

证明 简记 $(B, C)=D$; $IdB=\beta$, $IdC=\gamma$, $IdD=\delta$. 任取一个 Hamilton 函数 A, 则 Jacobi 恒等式

$$((A, B), C)+((B, C), A)+((C, A), B)=0,$$

可改写为

$$L_\gamma L_\beta A-L_\delta A-L_\beta L_\gamma A=0,$$

因此

$$-L_\delta=[L_\beta, L_\gamma]=L_{[\beta, \gamma]}. \tag{4-1-33}$$

由此即得所需等式 $[\beta, \gamma]=-\delta$.

由此命题可知, 两个 Hamilton 向量场的 Poisson 括号仍为 Hamilton 向量场. 因而辛流形上的全体 Hamilton 向量场, 是向量场 Lie 代数的子代数.

上述命题的另一个意义是, 映射 Id: $H\mapsto IdH$ 将 Hamilton 函数的 Poisson 括号映为相应的 Hamilton 向量场的 Poisson 括号, 因而是一个 Lie 代数同态. 容易验证, 此同态的核由流形 M 上的局部常值函数组成.

§2 Liouville 完全可积性

2.1 Liouville 定理

设 (M^{2n}, ω^2) 是辛流形. 两个 Hamilton 函数 F_1, F_2 称为是对合的, 若 $(F_1, F_2)=0$. 由同态公式知, 相应的 Hamilton 向量场 $\xi_1=IdF_1$, $\xi_2=IdF_2$ 可换. 因而 Hamilton 相流 $g_1^{t_1}$, $g_2^{t_2}$ 可换.

Liouville 条件. 称 Hamilton 系统 (M^{2n}, ω^2, H) 满足 Liou-

ville 条件，若

(1) 它有 n 个两两对合的守恒积分 $F_1=H,\ F_2,\ \cdots,\ F_n$ $(F_i,\ F_j)=0$。

(2) 存在一个水平集

$$M_f=\{x\in M^{2n}\mid F_1(x)=f_1,\ \cdots,\ F_n(x)=f_n\},$$

这里 $f=(f_1,\ \cdots,\ f_n)\in\boldsymbol{R}^n$；在 M_f 上每点处，$dF_1,\ \cdots,\ dF_n$ 线性无关。

记 $\xi_i=IdF_i$，相应的相流为 $g_i^{t_i}$，则在 Liouville 条件下，向量场 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n$ 两两可换，且在 M_f 的每一点处线性无关(因 I 为同构) 由此知 $g_1^{t_1},\ \cdots,\ g_n^{t_n}$ 两两可换。

设 $x\in M_f$，取辛流形 M^{2n} 在 x 处的局部坐标(x^i)，因 $dF_1,\ \cdots,$ dF_n 在 x 处线性无关，故 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x},\cdots,\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)=\frac{\partial(F_1,\ \cdots,\ F_n)}{\partial(x^1,\ \cdots,\ x^{2n})}\qquad(4\text{-}2\text{-}1)$$

为满秩：rank$=n$。由隐函数定理，从

$$F_1(x^1,\ \cdots,\ x^{2n})=0,\ \cdots,\ F_n(x^1,\ \cdots,\ x^{2n})=0,$$

可将某 n 个坐标，解作为另 n 个自由坐标的光滑函数，由此可建立 M_f 的 n 维光滑流形构造。

命题 1　M_f 是每一个流 g_j^t 的不变流形。

证明　因$(F_i,\ F_j)=0$，故 F_i 是 g_j^t 的守恒量，$(\forall i)$。设 $x\in M_f$，则

$$F_i(g_j^t x)=F_i(x)=f_i,\ \forall\ j,\qquad(4\text{-}2\text{-}2)$$

因此 $g_j^t x\in M_f$。

Liouville 定理　设 Hamilton 系统 $(M^{2n},\ \omega^2,\ H)$ 满足 Liouville 条件，则

(i) M_f 是 Hamilton 函数 $H=F_1$ 的相流的不变流形。

(ii) 若 M_f 紧致、连通，则它微分同胚于 n 维环面 $T^n=\{(\varphi_1,$ $\cdots,\ \varphi_n)\bmod 2\pi\}$。

(iii) H-流在 M_f 上的限制是一个条件周期运动，在角坐标 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 中的运动方程为

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\ \omega=\omega(f). \tag{4-2-3}$$

结论(i)的证明已含于上一个命题中．由于在 Liouville 条件下，水平集 M_f 是一个 n 维光滑流形，在其上有 n 个两两可换的向量场 $\xi_1, \cdots, \xi_n$，它们在 M_f 的每一点处线性无关．下面 2.2 段的 Arnold 引理即保证 M_f 与 T^n 微分同胚．根据其证明，在 2.3 段引出上面结论(iii)．

2.2 Arnold 引理

引理 1(Arnold 引理) 设 M^n 为 n 维紧致、连通的微分流形，在其上存在 n 个两两可换的、处处线性无关的向量场，则 M^n 与 n 维环面 T^n 微分同胚．

证明 (i) 设 $t=(t_1, \cdots, t_n)\in \boldsymbol{R}^n$，定义 $g^t: M^n\to M^n$，其取值为

$$g^t x=g_1^{t_1}\cdots g_n^{t_n}x,$$

由 $g_1^{t_1}, \cdots, g_n^{t_n}$ 的两两可换性，有 $g^t g^s=g^{t+s}$．

(ii) 对固定的 $x_0\in M^n$，进一步用

$$x=g(t)=g^t x_0$$

定义 $g: t\mapsto x(\boldsymbol{R}^n\to M^n)$．由于

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t_i}\right|_0=\left.\frac{\partial}{\partial t_i}\right|_0 g_1^{t_1}\cdots g_n^{t_n}x_0=\left.\frac{\partial}{\partial t_i}\right|_0 g_i^{t_i}x_0=\xi_i(x_0), \tag{4-2-4}$$

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0=\det(\xi_1, \cdots, \xi_n)_0\neq 0, \tag{4-2-5}$$

故由反函数定理得断语：存在 x_0 的邻域 $U\subset M^n$ 与 $t=0$ 的邻域 $V\subset \boldsymbol{R}^n$，使得 $g: V\to U$ 是微分同胚．因此，$(V, g|_V)$ 是流形 M^n 在 x_0 的邻域的参数化；$(U, g^{-1}|_U)$ 是流形 M^n 在 x_0 的邻域的坐标卡．

(iii) 断语： $g: \boldsymbol{R}^n\to M^n$ 是满射．事实上，因 M^n 连通，M^n 上

的任一点 x，都可用 M^n 上的某条道路 γ 与 x_0 连结．γ 可用本节 2.1 段的坐标邻域覆盖，故可选出有限覆盖（M^n 紧致）．将邻域适当加多，易知存在 M^n 上的一串点 $x_0, x_1, \cdots, x_m=x$，使得

$$x_i=g^{t_i}x_{i-1}$$

（此处 $t_i\in\boldsymbol{R}^n$）．因此，

$$x=x_m=g^{t_m}x_{m-1}=\cdots=g^{t_m}\cdots g^{t_1}x_0=g^{t_1+\cdots+t_m}x_0.$$

断语得证．g: $\boldsymbol{R}^n\to M^n$ 虽是满射的，却不可能是单的．否则，g 是同胚，而 $\boldsymbol{R}^n$ 非紧致，M^n 紧致，这是不可能的．

(iv) g 的单一化．对于 M^n 上任一点 x，可定义驻定群

$$\Gamma_x=\{t\in\boldsymbol{R}^n\,|\,g^tx=x\}.$$

（不难验证它是加群）．Γ_x 与 x 的选择无关：$\Gamma_x=\Gamma_y, \forall x, y\in M^n$．事实上，由上面断语的证明知 $y=g^sx$．若 $t\in\Gamma_x$，则

$$g^ty=g^tg^sx=g^{t+s}x=g^sg^tx=g^sx=y.$$

故 $t\in\Gamma_y$，则 $\Gamma_x\subset\Gamma_y$．同理可证反向的包含关系．由此可定义 $\Gamma=\Gamma_x$，与 x 选择无关．

为将多一映射 g: $t\mapsto x$ 单一化，定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中的等价关系 $t\sim s$: $g(t)=g(s)$．其充要条件依次为 $g^tx_0=g^sx_0\Leftrightarrow g^{t-s}x_0=x_0\Leftrightarrow t-s\in\Gamma$．因此，等价类 $[t]$ 的全体组成商群 $\boldsymbol{R}^n/\Gamma$．多一映射 g 单一化为一一的满射：

$$\tilde{g}: [t]\mapsto x;\quad \frac{\boldsymbol{R}^n}{\Gamma}\to M^n. \tag{4-2-6}$$

(v) 驻定群 Γ，显然 $0\in\Gamma$．由本段(ii)，0 的邻域 $V\subset\boldsymbol{R}^n$ 与 x_0 的邻域 $U\subset M^n$ 同胚，故 V 中不可能有 Γ 的其它元素（否则 V 中会有两个不同的点 0，$t\in\Gamma$ 映为 U 中同一点 x_0，V 与 U 不可能同胚）．对于任一点 $t\in\Gamma$，易证 t 的邻域 $t+V\subset\boldsymbol{R}^n$ 中无 Γ 的其它元素．因此驻定群是 $\boldsymbol{R}^n$ 的离散子群．

引理 2（代数引理） 加群 $\boldsymbol{R}^n$ 的任一离散子群 Γ，都可由某 k 个（$k\leqslant n$）线性无关的 $e_1, \cdots, e_k\in\Gamma$ 生成

$$\Gamma=\{m_1e_1+\cdots+m_ke_k \mid m_1, \cdots, m_k\in \boldsymbol{Z}\}. \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

(证明见[3],该书中 276～277 页).

(vi) 记 $\varphi=(\varphi^1, \cdots, \varphi^k)\in \boldsymbol{R}^k$, $y=(y^{k+1}, \cdots, y^n)\in \boldsymbol{R}^{n-k}$. 考虑映射

$$p: (\varphi, y)\mapsto(\varphi \bmod 2\pi, y);$$
$$\boldsymbol{R}^n\to T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k}.$$

p 既是加群同态, 又给出 $T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k}$ 的局部坐标卡. 取 $\boldsymbol{R}^n$ 的基底

$$\varepsilon_j=2\pi(\delta_{j1}, \cdots, \delta_{jn})^T \quad (j=1, \cdots, n),$$

计算同态 p 的核

$$\begin{aligned}\ker(p)=p^{-1}(0)&=\{(\varphi, y)\in \boldsymbol{R}^n \mid \varphi\equiv 0(\bmod 2\pi), y=0\}\\&=\{m_1\varepsilon_1+\cdots+m_k\varepsilon_k \mid m_1, \cdots, m_k\in \boldsymbol{Z}\}.\end{aligned}$$

因此核 $\ker(p)$ 是 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ 生成的离散子群 $\hat{\Gamma}$. 这样, 同态 p 便单一化为同构

$$\tilde{p}: \frac{\boldsymbol{R}^n}{\hat{\Gamma}}\to T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k}. \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

定义映射 A: $\varepsilon_1\mapsto e_1, \cdots, \varepsilon_k\mapsto e_k$. 将其线性扩张为坐标空间 $\boldsymbol{R}^n=\{(\varphi, y)\}$ 到 $\boldsymbol{R}^n=\{t\}$ 的同构, 其矩阵为 $(A)=\dfrac{1}{2\pi}(e_1, \cdots, e_k, \cdots)$. 由图表

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{R}^n=\{(\varphi, y)\} & \xrightarrow{A} & \boldsymbol{R}^n=\{t\}\\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k} & & M^n\end{array}$$

知 M^n 与 $T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k}$ 为局部微分同胚. 将此图表单一化为

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{R}^n/\hat{\Gamma} & \to & \boldsymbol{R}^n/\Gamma\\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{g}}\\ T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k} & & M^n\end{array}$$

知 $T^k\times \boldsymbol{R}^{n-k}$ 到 M^n 为单一的满射, 故为微分同胚. 因为 M^n 紧, 必有 $k=n$, 因此 T^n 与 M^n 微分同胚. Arnold 引理证明完.

2.3 H-流在不变环面 M_f 上的限制

考虑上段证明中，$\boldsymbol{R}^n$ 的自同构:

$$t=A\varphi, \qquad (A)=\frac{1}{2\pi}(e_1, \cdots, e_n),$$

其中 $e_1, \cdots, e_n$ 是离散群 Γ 的生成元. 其逆为

$$\varphi=A^{-1}t, \qquad (A^{-1})=(\omega_1, \cdots, \omega_n).$$

将 Hamilton 函数 $H=F_1$ 的相流 $g_1^{t_1}$ 的流变量 t_1 简记为 t, 用黑点"•"记对 t 的导数,则

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial}{\partial t_1}A^{-1}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\omega_1 \triangleq \omega. \tag{4-2-9}$$

命题 2 在 Hamilton 函数 $H=F_1$ 的相流的作用下，不变环面 M_f 的角坐标 φ 随时间(流变量)均匀变化:

$$\dot{\varphi}=\omega, \qquad \omega=\omega(f), \tag{4-2-10}$$

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\omega t. \tag{4-2-11}$$

由分量式 $\varphi^i(t)=\varphi^i(0)+\omega^i t$ 知，分量 φ^i 的周期为 $2\pi/\omega^i$，故诸 $\omega^1, \cdots, \omega^n$ 可公度时，$\varphi(t)$是周期运动，一般而言，只能是条件周期运动.

不难看出，在每一个 F_j 流的作用下，M_f 上的点都作条件周期运动，周期分量由矩阵(A^{-1})的第 j 列决定:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}=\frac{\partial}{\partial t_j}A^{-1}\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{j1} \\ \vdots \\ \delta_{jn} \end{pmatrix}=\omega_j. \tag{4-2-12}$$

2.4 作用-角变量

上面已经证明，当 Hamilton 系统(M^{2n}, ω^2, H)满足 Liouville 条件，且水平集 M_f 紧致、连通，则 M_f 与 T^n 微分同胚，简记为

$$M_f \simeq T^n.$$

将函数 F_i 与 φ_i 取为坐标. 可以证明, 当 $F=(F_1, \cdots, F_n)$ 在 $f=(f_1, \cdots, f_n)$ 的充分小的球形邻域 $D^n\subset \mathbf{R}^n$ 中变化时, M_F 扫出 M_f 的一个邻域, 这是一个 $2n$ 维微分流形, 微分同胚于

$$\{(F, \varphi \bmod 2\pi) \mid F\in D^n, [\varphi]\in T^n\}=D^n\times T^n.$$

在此 M_f 的邻域内, Hamilton 函数 $H=F_1$ 的相流, 可用局部坐标 (F, φ) 中的简单的 $2n$ 常微分方程组给出

$$\frac{dF}{dt}=0, \qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(F),$$

其解可积出

$$F(t)=F(0), \quad \varphi(t)=\varphi(0)+\omega(F(0))t.$$

剩下的问题是: (F, φ) 不一定是正则坐标.

引理 3 函数的复合保持对合性.

证明 设 $A=A(F_1, \cdots, F_n)$, $B=B(F_1, \cdots, F_n)$, 则由下列公式可知 A 与 B 对合

$$(A, B)=\frac{\partial A}{\partial F_k}\frac{\partial B}{\partial F_l}(F_k, F_l). \tag{4-2-13}$$

此公式可由直接计算得到(对 k, l 用求和约定)

$$\begin{aligned}(A, B)&=\sum_{i=1}^n\begin{vmatrix}\dfrac{\partial A}{\partial q_i} & \dfrac{\partial B}{\partial q_i}\\ \dfrac{\partial A}{\partial p_i} & \dfrac{\partial B}{\partial p_i}\end{vmatrix}\\ &=\sum_{i=1}^n\begin{vmatrix}\dfrac{\partial A}{\partial F_k}\dfrac{\partial F_k}{\partial q_i} & \dfrac{\partial B}{\partial F_l}\dfrac{\partial F_l}{\partial q_i}\\ \dfrac{\partial A}{\partial F_k}\dfrac{\partial F_k}{\partial p_i} & \dfrac{\partial B}{\partial F_l}\dfrac{\partial F_l}{\partial p_i}\end{vmatrix}\\ &=\sum_{i=1}^n\frac{\partial A}{\partial F_k}\frac{\partial B}{\partial F_l}\frac{\partial(F_k, F_l)}{\partial(q_i, p_i)}=\text{右式}.\end{aligned} \tag{4-2-14}$$

可以证明, 存在 $F=(F_1, \cdots, F_n)$ 的 n 个函数 $I=I(F)$, $I=(I_1, \cdots, I_n)$, 使得 (I, φ) 为正则坐标, 因而辛结构可以表示为

$$\omega^2=\sum_{i=1}^{n} dI_i\wedge d\varphi_i. \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

由上面引理易知 $I_1, \cdots, I_n$ 两两对合．辛结构的上述表达式引出更完备的一组式子：

$$(I_i,\ I_j)=(\varphi_i,\ \varphi_j)=0, \qquad (\varphi_i,\ I_j)=\delta_{ij}.$$

I 称为作用变量．$(I,\ \varphi)$ 组成不变环面 M_f 的邻域中的正则坐标的作用—角变量系统．

显然，$I_1, \cdots, I_n$ 仍是原系统的守恒量．流方程可用作用—角变量写为

$$\frac{dI}{dt}=0, \qquad \frac{d\varphi}{dt}=\omega(I). \qquad (4\text{-}2\text{-}16)$$

作用变量 I 的构成见[3]．

例　n 线性振子是辛流形 $(\boldsymbol{R}^{2n},\ dp\wedge dq)$ 中的 Hamilton 系统

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j^2+\omega_j^2 q_j^2). \qquad (4\text{-}2\text{-}17)$$

由 Poisson 括号 $(p_i,\ p_j)=(q_i,\ q_j)=0,\ (q_i,\ p_j)=\delta_{ij}$，知

$$F_j=p_j^2+\omega_j^2 q_j^2, \qquad j=1,\ \cdots,\ n$$

为两两对合的守恒积分系．当 $f_1>0, \cdots, f_n>0$ 时，M_f 显然是 n 环面 T^n，其上的角坐标为 $\varphi_j=\mathrm{tg}^{-1}(\omega_j q_j/p_j)$．直接计算得

$$d\varphi_j=\frac{\omega_j}{F_j}(p_j dq_j-q_j dp_j), \qquad (4\text{-}2\text{-}18)$$

$$dF_j=2(p_j dp_j+\omega_j^2 q_j dq_j), \qquad (4\text{-}2\text{-}19)$$

故 $dF_j\wedge d\varphi_j=2\omega_j dp_j\wedge dq_j$．因此可以取作用变量为

$$I_j=\frac{F_j}{2\omega_j}=\frac{1}{2\omega_j}(p_j^2+\omega_j^2 q_j^2).$$

此时，$dI_j\wedge d\varphi_j=dp_j\wedge dq_j$．利用正则方程直接计算得

$$\dot{I}_j=0, \qquad \dot{\varphi}_j=\omega_j.$$

故 $I_j(t)=I_j(0)$，$\varphi_j(t)=\varphi_j(0)+\omega_j t$，而

$$p_j=\sqrt{2\omega_j I_j}\cos\varphi_j, \qquad (4\text{-}2\text{-}20)$$

$$q_j=\sqrt{\frac{2I_j}{\omega_j}}\sin\varphi_j. \tag{4-2-21}$$

§3 几个有限维可积系统

3.1 Plücker 坐标的括号性质

考察辛流形$(\boldsymbol{R}^{2n},\ \omega^2=dp\wedge dq)$，其相应的 Poisson 括号的具体形式为

$$(F,\ H)=\langle\nabla F,\ J\nabla H\rangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(F,\ H)}{\partial(q_i,\ p_i)}. \tag{4-3-1}$$

这里尖括号表示欧氏标准内积$\langle\xi,\ \eta\rangle=\Sigma\xi_i\eta_i$. 诸坐标的括号为

$$(p_i,\ p_j)=(q_i,\ q_j)=0,\qquad (q_i,\ p_j)=\delta_{ij}.$$

由于 Poisson 括号定义为沿流的导数，故不难验证 Leibnitz 公式与复合函数公式:

$$(AB,\ H)=A(B,\ H)+B(A,\ H), \tag{4-3-2}$$

$$(f(A),\ H)=f'(A)(A,\ H), \tag{4-3-3}$$

$$(A,\ B)=\sum_k\sum_l\frac{\partial(A,\ B)}{\partial(F_k,\ F_l)}(F_k,\ F_l). \tag{4-3-4}$$

寻找 Liouville 完全可积系的关键，在于寻找对合的函数系，而其中最简单的是坐标的多项式构成的对合系。

定义二次多项式

$$B_{ij}=p_iq_j-p_jq_i.$$

从力学上看，这是角动量的分量. 从几何上看，这是以过原点的二维平面为元素的 Grassmann 流形 $G(2,\ n)$的 Plücker 坐标. 显然，$B_{ji}=-B_{ij}$. 又由

$$\begin{vmatrix} p_i & p_j & p_k & p_l\\ q_i & q_j & q_k & q_l\\ 0 & p_j & p_k & p_l\\ 0 & q_j & q_k & q_l \end{vmatrix}=0$$

按 2×2 Laplace 展开，得 Plücker 恒等式

$$B_{ij}B_{kl}-B_{ik}B_{jl}+B_{il}B_{jk}=0 \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

引理 1　(i) $(p_k,\ B_{ij})=\delta_{ki}p_j-\delta_{kj}p_i$;　(4-3-6)

(ii) $(q_k,\ B_{ij})=\delta_{ki}q_j-\delta_{kj}q_i$;　(4-3-7)

(iii) $(\|p\|,\ B_{ij})=(\|q\|,\ B_{ij})=(\langle p,\ q\rangle,\ B_{ij})=0$.　(4-3-8)

证明　(i)、(ii)式由直接计算易得. (iii)式的第一等式

$$\begin{aligned}\|p\|(\|p\|,\ B_{ij})&=\frac{1}{2}(\|p\|^2,\ B_{ij})\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(p_k^2,\ B_{ij})\\&=\sum_{k=1}^{n}p_k(p_k,\ B_{ij})\\&=\sum_{k=1}^{n}p_k(\delta_{ki}p_j-\delta_{kj}p_i)\\&=p_ip_j-p_jp_i=0.\end{aligned}$$

故 $\|p\|\neq 0$ 时，$(\|p\|,\ B_{ij})=0$. $\|p\|=0$ 时，由连续性，此式仍成立. 后两个等式的证明相仿.

命题 1　$\{B_{ij}\}$生成一个有限维 Lie 代数，且有

(i) $(B_{ij},\ B_{kl})=-B_{ik}\delta_{jl}+B_{il}\delta_{jk}+B_{jk}\delta_{il}-B_{jl}\delta_{ik}$;　(4-3-9)

(ii)

$$\frac{1}{4}(B_{ij}^2,\ B_{jl}^2)=B_{ik}B_{il}B_{jk}\delta_{jk}+B_{ik}B_{il}\delta_{jk}B_{jl}+B_{ik}\delta_{il}B_{jk}B_{jl}+\delta_{ik}B_{il}B_{jk}B_{jl}. \qquad (4\text{-}3\text{-}10)$$

证明　(i)式的左边等于

$$(p_iq_j-p_jq_i,\ B_{kl})=p_i(q_j,\ B_{kl})+q_j(p_i,\ B_{kl})-p_j(q_i,\ B_{kl})-q_i(p_j,\ B_{kl}).$$

利用引理 1 展开各括号即可. (ii)式左边等于 $B_{ij}B_{kl}(B_{ij},\ B_{kl})$. 利用(i)式展开括号，再用 Plücker 恒等式使指标$(i,\ j)$与$(k,\ l)$相互作用，注意 $B_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}=0$，即导出所需结果.

3.2 Delauney-Moser 对合系

命题 2 $B_2=B_{21}^2,\ B_3=B_{31}^2+B_{32}^2,\ B_n=B_{n1}^2+B_{n2}^2+\cdots+B_{n,n-1}^2$ 是对合系.

证明 显然$(B_k,\ B_k)=0$. 不妨设 $i>k$,

$$\frac{1}{4}(B_i,\ B_k)=\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{4}(B_{ij}^2,\ B_{kl}^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1}(B_{ik}B_{il}B_{jk}\delta_{jl}+B_{ik}B_{il}\delta_{jk}B_{jl}$$

$$+B_{ik}\delta_{jl}B_{jk}B_{jl}+\delta_{ik}B_{il}B_{jk}B_{jl}).$$

由于 $i>k>l$, 故 $\delta_{il}=\delta_{ik}=0$, 后两项为零. 上式成为

$$\sum_{j=1}^{k-1}B_{ik}B_{ij}B_{jk}+\sum_{l=1}^{k-1}B_{ik}B_{il}B_{kl}=B_{ik}\sum_{j=1}^{k-1}B_{ij}(B_{jk}+B_{kj})=0.$$

定理 1 n 维 Kepler 系统

$$H=\frac{1}{2}\|p\|^2-\|q\|^{-1} \tag{4-3-11}$$

是 Liouville 完全可积的.

证明 $B_1=H,\ B_2,\ \cdots,\ B_n$ 是对合系. 事实上, 由 3.1 段之引理 1 知$(\|p\|,\ B_k)=(\|q\|,\ B_k)=0$, 故

$$(H,\ B_k)=\left(\frac{1}{2}\|p\|^2-\|q\|^{-1},\ B_k\right)$$

$$=\|p\|(\|p\|,\ B_k)+\|q\|^{-2}(\|q\|,\ B_k)=0.$$

推广 设 f: $\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ 是光滑函数, 则 $H=f(\langle p,\ p\rangle,\ \langle q,\ q\rangle,\ \langle p,\ q\rangle)$是 Liouville 完全可积的.

证明 显然,

$$(H,\ B_{ij})=f_a'\cdot(\langle p,\ p\rangle,\ B_{ij})+f_b'\cdot(\langle q,\ q\rangle,\ B_{ij})$$

$$+f_c'\cdot(\langle p,\ q\rangle,\ B_{ij})=0.$$

因此$(H,\ B_i)=0$. 这样, $H,\ B_2,\ \cdots,\ B_n$ 为 n-对合系.

等价形式 $F_1=H,\ F_2=B_2,\ F_3=B_2+B_3,\ \cdots,\ F_n=B_2+\cdots+B_n$, 仍构成 n-对合系. $n=3$ 时, 即天体力学中的 Delauney坐标.

3.3　共焦对合系

命题 3　设 $\alpha_i \neq \alpha_j$，则

$$G_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{B_{ij}^2}{\alpha_i - \alpha_j} \quad (i=1, \cdots, n) \tag{4-3-12}$$

是对合系，这里 $\sum'$ 表示 $j \neq i$.

证明　设 $i \neq k$，则注意 $\delta_{ik}=0$，我们有

$$\frac{1}{4}(G_i, G_k) = \sum_j{}' \sum_l{}' \frac{(B_{ij}^2, B_{kl}^2)}{4(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_k-\alpha_l)}$$

$$= \sum_j{}' \sum_l{}' \frac{B_{ik}B_{il}B_{jk}\delta_{jl} + B_{ik}B_{il}\delta_{jk}B_{jl} + B_{ik}\delta_{il}B_{jk}B_{jl}}{(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_k-\alpha_l)}$$

去掉公因子 B_{ik} 后，化为

$$\sum_l{}' \frac{B_{il}B_{lk}}{(\alpha_i-\alpha_l)(\alpha_k-\alpha_l)} + \sum_l{}' \frac{B_{il}B_{kl}}{(\alpha_i-\alpha_k)(\alpha_k-\alpha_l)}$$

$$+ \sum_j{}' \frac{B_{ik}B_{ji}}{(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_k-\alpha_i)},$$

将第三项的求和指标 j 改写为 l. 第一项经过下列换算

$$\frac{1}{(\alpha_i-\alpha_l)(\alpha_k-\alpha_l)} = \frac{1}{\alpha_i-\alpha_k}\left(\frac{1}{\alpha_k-\alpha_l} - \frac{1}{\alpha_i-\alpha_l}\right)$$

成为两项. 将公因子 $(\alpha_i-\alpha_k)^{-1}$ 提出后，最后得

$$\frac{1}{4}(G_i, G_k)$$

$$= \frac{B_{ik}}{\alpha_i-\alpha_k}\left(\sum_l{}' \frac{B_{il}(B_{lk}+B_{kl})}{\alpha_k-\alpha_l} - \sum_l{}' \frac{B_{lk}(B_{il}+B_{li})}{\alpha_i-\alpha_l}\right)$$

$$=0.$$

引理 2　设 $\{A_k\}$，$\{B_k\}$ 都是对合系，且当 $k \neq l$ 时，(A_k, B_l) 关于 k，l 对称，则 $\{aA_k+bB_k\}$ 是对合系（a，b 是任常数）.

证明　直接计算

$$(aA_k+bB_k, aA_l+bB_l) = ab(A_k, B_l) + ba(B_k, A_l)$$

$$= ab(A_k, B_l) - ab(A_l, B_k) = 0. \tag{4-3-13}$$

引理 3　(p_k^2, G_l)，(q_k^2, G_l)，(p_kq_k, G_l) 都关于 k，l 对称.

证明 $k\neq l$ 时,

$$\frac{1}{4}(p_k^2,\ G_l)=\frac{1}{4}\sum_j{}'\frac{(p_k^2,\ G_{lj})}{\alpha_l-\alpha_j}$$

$$=\sum_j{}'\frac{p_k B_{lj}(p_k,\ B_{lj})}{\alpha_l-\alpha_j}$$

$$=\sum_j{}'\frac{p_k B_{lj}(\delta_{kl}p_j-\delta_{kj}p_l)}{\alpha_l-\alpha_j}$$

$$=-\frac{B_{lk}}{\alpha_l-\alpha_k}p_k p_l. \qquad (4\text{-}3\text{-}14)$$

显然,关于 k, l 对称. 同理可算出

$$\frac{1}{4}(q_k^2,\ G_l)=-\frac{B_{lk}}{\alpha_l-\alpha_k}q_k q_l,$$

$$\frac{1}{2}(p_k q_k,\ G_l)=-\frac{B_{lk}}{\alpha_l-\alpha_k}(p_k q_l+p_l q_k), \qquad (4\text{-}3\text{-}15)$$

都关于 k, l 对称.

定理 2 设 a, b, c 为常数,则

$$E_k=ap_k^2+2bp_kq_k+cq_k^2+G_k \quad (k=1,\ \cdots,\ n) \qquad (4\text{-}3\text{-}16)$$

是对合系. $\{G_k\}$, $\{E_k\}$都称为共焦对合系.

G_k 与 E_k 的母函数 记 $A=\mathrm{diag}(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$. 定义

$$Q_z(x,\ y)=\langle(zI-A)^{-1}x,\ y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k y_k}{z-\alpha_k}. \qquad (4\text{-}3\text{-}17)$$

命题 4 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{G_k}{z-\alpha_k}=\begin{vmatrix}Q_z(p,\ p) & Q_z(p,\ q)\\ Q_z(q,\ p) & Q_z(q,\ q)\end{vmatrix}. \qquad (4\text{-}3\text{-}18)$$

证明 因为

$$\frac{1}{(z-\alpha_i)(z-\alpha_j)}=\frac{1}{(z-\alpha_i)(\alpha_i-\alpha_j)}+\frac{1}{(z-\alpha_j)(\alpha_j-\alpha_i)},$$

所以命题中公式的右边为

$$\sum_i\sum_j\frac{p_i^2q_j^2-p_iq_ip_jq_j}{(z-\alpha_i)(z-\alpha_j)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\frac{(p_iq_j-p_jq_i)^2}{(z-\alpha_i)(z-\alpha_j)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum\left(\frac{B_{ij}^2}{(z-\alpha_i)(\alpha_i-\alpha_j)}+\frac{B_{ij}^2}{(z-\alpha_j)(\alpha_j-\alpha_i)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_i\frac{G_i}{z-\alpha_i}+\sum_j\frac{G_j}{z-\alpha_j}\right)=\text{左式}.$$

命题 5 $\Phi_z(p,\ q)\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{z-\alpha_k}$

$$=aQ_z(p,\ p)+2bQ_z(p,\ q)+cQ_z(q,\ q)+\begin{vmatrix}Q_z(p,\ p) & Q_z(p,\ q)\\ Q_z(q,\ p) & Q_z(q,\ q)\end{vmatrix}. \tag{4-3-19}$$

推论 $(\Phi_\alpha(p,\ q),\ \Phi_\beta(p,\ q))=0,\quad \forall\ \alpha,\ \beta\in\boldsymbol{C}.$

3.4　共焦系决定的完全可积系统

考察　$E_k(x,\ y,\ p,\ q)=x_ky_k+G_k=x_ky_k+\sum_j'\frac{B_{kj}^2}{\alpha_k-\alpha_j}.$

当 $x_ky_k=p_k^2,\ p_kq_k,\ q_k^2$ 三种情形，恰为上段 $(a,\ 2b,\ c)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ 三种特例．故三种情形下 $\{E_k\}$ 都是对合系．诸 E_k 的线性组合，显然是完全可积的 Hamilton 系统．特别，考察下列形式的线性组合

$$F_s(x,\ y,\ p,\ q)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^sE_k(x,\ y,\ p,\ q), \tag{4-3-20}$$

其中 s 为整数．F_s 的优点是有简单的显式表示．

命题 6 $F_0(x,\ y,\ p,\ q)=\langle x,\ y\rangle.$ (4-3-21)

$$F_1(x,\ y,\ p,\ q)=\langle Ax,\ y\rangle+\begin{vmatrix}\langle p,\ p\rangle & \langle q,\ p\rangle\\ \langle p,\ q\rangle & \langle q,\ q\rangle\end{vmatrix}. \tag{4-3-22}$$

$$F_s(x,\ y,\ p,\ q)=\langle A^sx,\ y\rangle+\sum_{i+j=s-1}\begin{vmatrix}\langle A^ip,\ p\rangle & \langle A^jq,\ p\rangle\\ \langle A^iq,\ p\rangle & \langle A^jq,\ q\rangle\end{vmatrix}.$$

这里 $s=1,\ 2,\ \cdots$.

证明　当 $|z|>\max\{|\alpha_1|,\ \cdots,\ |\alpha_n|\}$，有 (4-3-23)

$$\frac{1}{z-\alpha_k}=\sum_{s=0}^{\infty}z^{-s-1}\alpha_k^s. \tag{4-3-24}$$

$$Q_z(\xi,\ \eta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k\eta_k}{z-\alpha_k}=\sum_{s=0}^{\infty}z^{-s-1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^s\xi_k\eta_k$$

$$=\sum_{s=0}^{n}z^{-s-1}\langle A^s\xi,\ \eta\rangle. \tag{4-3-25}$$

用两种方式展开 $\Phi_z(x,\ y,\ p,\ q)$，一方面它等于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{z-\alpha_k}=\sum_{s=0}^{\infty}z^{-s-1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^s E_k=\sum_{s=0}^{\infty}z^{-s-1}F_s.$$

另一方面它等于

$$Q_z(x,\ y)+\begin{vmatrix}Q_z(p,\ p) & Q_z(p,\ q)\\ Q_z(q,\ p) & Q_z(q,\ q)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}z^{-s-1}\langle A^s x,\ y\rangle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}z^{-i-j-2}\begin{vmatrix}\langle A^i p,\ p\rangle & \langle A^j p,\ q\rangle\\ \langle A^i q,\ p\rangle & \langle A^j q,\ q\rangle\end{vmatrix}.$$

比较 z 的同次幂系数即得命题结果。

命题 7

$$F_{-1}(x,\ y,\ p,\ q)=\langle A^{-1}x,\ y\rangle-\begin{vmatrix}\langle A^{-1}p,\ p\rangle & \langle A^{-1}q,\ p\rangle\\ \langle A^{-1}q,\ p\rangle & \langle A^{-1}q,\ q\rangle\end{vmatrix};$$

$$F_{-s-1}(x,\ y,\ p,\ q)=\langle A^{-s-1}x,\ y\rangle$$

$$-\sum_{i+j=s}\begin{vmatrix}\langle A^{-i-1}p,\ p\rangle & \langle A^{-j-1}q,\ p\rangle\\ \langle A^{-i-1}q,\ p\rangle & \langle A^{-j-1}q,\ q\rangle\end{vmatrix},$$

其中 $s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. (4-3-26)

证明 当 $|z|<\min\{|\alpha_1|,\ \cdots,\ |\alpha_n|\}$ 时有

$$\frac{1}{z-\alpha_k}=-\sum_{s=0}^{\infty}z^s\alpha_k^{-s-1},$$

$$Q_z(\xi,\ \eta)=-\sum_{s=0}^{\infty}z^s\langle A^{-s-1}\xi,\ \eta\rangle.$$

用两种方式展开 $\Phi_z(x,\ y,\ p,\ q)$，一方面它等于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k}{z-\alpha_k}=-\sum_{s=0}^{\infty}z^s\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{-s-1}E_k=-\sum_{s=0}^{\infty}z^sF_{-s-1}. \tag{4-3-27}$$

另一方面它等于

$$
Q_z(x, y)+\begin{vmatrix} Q_z(p, p) & Q_z(p, q) \\ Q_z(q, p) & Q_z(q, q) \end{vmatrix}
$$

$$
=-\sum_{s=0}^{\infty} z^s\langle A^{-s-1}x, y\rangle
$$

$$
+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z^{i+j}\begin{vmatrix} \langle A^{-i-1}p, p\rangle & \langle A^{-i-1}p, q\rangle \\ \langle A^{-j-1}q, p\rangle & \langle A^{-j-1}q, q\rangle \end{vmatrix}. \tag{4-3-28}
$$

比较 z 的同次幂即得命题.

例 1　F_1 流，$x=p$, $y=q$ 情形.

$$
H=F_1=\langle Ap, q\rangle+\langle p, p\rangle\langle q, q\rangle-\langle p, q\rangle^2,
$$

Hamilton 正则方程为($k=1, \cdots, n$)

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha_k & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}
$$

$$
+\begin{pmatrix} 2\langle p, q\rangle & -2\langle p, p\rangle \\ 2\langle q, q\rangle & -2\langle p, q\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}. \tag{4-3-29}
$$

它与 Zakharov-Shabat 特征值问题的无反射位势和有限带势有密切关系，我们将另文研究.

例 2　F_{-1} 流，$x=p$, $y=q$ 情形.

$$
H=F_{-1}=\langle A^{-1}p, q\rangle-\langle A^{-1}p, p\rangle\langle A^{-1}q, q\rangle+\langle A^{-1}p, q\rangle^2.
$$

正则方程为($k=1, \cdots, n$)

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}=\alpha_k^{-1}\begin{pmatrix} -1-2\langle A^{-1}p, q\rangle & 2\langle A^{-1}p, p\rangle \\ -2\langle A^{-1}q, q\rangle & 1+2\langle A^{-1}p, q\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}. \tag{4-3-30}
$$

它与特征值问题

$$
\frac{d\varphi}{dt}=\begin{pmatrix} -\xi & f(t)\xi \\ g(t)\xi & \xi \end{pmatrix}\varphi \tag{4-3-31}
$$

的无反散位势与有限带势有密切关系. 此问题在孤立子理论中亦有应用.

3.5　J. Moser 约束方法

考察 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 的子集 M:

$$M=\{x\in \boldsymbol{R}^{2n}|G_1(x)=\cdots=G_{2r}(x)=0\}.$$

假定:

(1) $dG_1, \cdots, dG_{2r}$ 在 M 上每点处线性无关;

(2) $\det((G_i, G_j))\neq 0$.

前者保证 M 为 $2n-2r$ 维流形. 由下文可知,后者保证 M 为辛流形.

引理 4 Hamilton 向量场 $\xi=IdH$ 与流形 M 相切, 当且仅当 $(G_i, H)=0$, $i=1, \cdots, 2r$, 在 M 上处处成立.

证明 ξ 与 M 相切的条件是 $dG_i(\xi)=0$, $\forall i$. 也就是

$$0=dG_i(IdH)=\omega^2(IdH, IdG_i)=(G_i, H). \tag{4-3-32}$$

Lagrange 不定乘子法 当 $H: \boldsymbol{R}^{2n}\to\boldsymbol{R}$ 的 Hamilton 向量场与流形 M 相切时,可考虑其在 M 上的限制. 若不相切,则须修改 H 为

$$H^*(x)=H(x)-\sum_{j=1}^{2r}\lambda_j(x)G_j(x). \tag{4-3-33}$$

在 M 上的相切条件为

$$0=(G_i, H^*)=(G_i, H)-\sum_{j=1}^{2r}\lambda_j(G_i, G_j). \tag{4-3-34}$$

其中一项 $(G_i, \lambda_j)G_j$ 在 M 上为零. 由于以 (G_i, G_j) 为元素的行列式不为零,故 Lagrange 乘子 $\lambda_j(x)$ 在 M 上的值可唯一确定. 易知在流形 M 上:

$$H^*=H;$$

$$IdH^*=IdH-\sum_{j=1}^{2r}\lambda_jIdG_j. \tag{4-3-35}$$

另一项 $G_jId\lambda_j$ 因 $G_j(x)=0$ 而消失. 现在的问题是: $(\boldsymbol{R}^{2n}, H)$ 的完全可积性不一定推出 (M, H^*) 的完全可积性. 为解决此问题, 有

Moser 约束 设 $(\boldsymbol{R}^{2n}, H)$ 为 Liouville 完全可积的, 守恒积分的 n 对合系为: $F_1, \cdots, F_n$,

$$(H, F_i)=0, \ (F_i, F_j)=0, \ \forall \ i, j.$$

考察由约束条件

$$F_1(x)=\cdots=F_r(x)=0$$

及

$$G_1(x)=\cdots=G_r(x)=0$$

决定的子流形 M，设在 M 上 $dF_1, \cdots, dG_r$ 线性无关，且 $\det((F_i, G_j))\neq 0$. 修改 H 为

$$H^*=H-\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i F_i+\mu_i G_i). \qquad (4\text{-}3\text{-}36)$$

由相切条件 $(H^*, F_j)=0$, $(H^*, G_j)=0$ 易知 $\mu_i=0$，且 λ_i 满足

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(F_i, G_j)=(H, G_j), \qquad (4\text{-}3\text{-}37)$$

它有唯一解.

命题 8 $(M^{2n-2r}, H^*=H-\sum_{i=1}^{r}\lambda_{\alpha_i}F_i)$ 完全可积.

证明 修改 $F_{r+1}, \cdots, F_n$ 为

$$F_\alpha^*=F_\alpha-\sum_{j=1}^{r}\lambda_{\alpha_j}F_j \quad (\alpha=r+1, \cdots, n), \qquad (4\text{-}3\text{-}38)$$

其中 $\lambda_{\alpha j}$ 由下列线性方程唯一确定：

$$\sum_{j=1}^{r}\lambda_{\alpha j}(F_j, G_k)=(F_\alpha, G_k) \quad k=1, \cdots, r. \qquad (4\text{-}3\text{-}39)$$

不难验证 (F_α^*, F_β^*) 在 M^{2n-2r} 上为零，它们给出系统 (M^{2n-2r}, H^*) 的 $(n-r)$ 对合守恒积分系.

3.6 C. Neumann 系统

Moser 约束的一个最简单的应用，给出历史上的一个著名的完全可积系统：C. Neumann系统. 考虑 $x=y=q$ 情形的共焦系的 F_1 流：

$$H=\frac{1}{2}F_1(q, q, p, q)$$

$$=\frac{1}{2}\langle Aq, q\rangle+\frac{1}{2}(\|p\|^2\|q\|^2-\langle p, q\rangle^2), \quad (4\text{-}3\text{-}40)$$

其对合的守恒积分为：E_1, $\cdots$, E_n. 引入

$$F=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} E_k-1\right)=\frac{1}{2}(\|q\|^2-1), \qquad (4\text{-}3\text{-}41)$$

则 F, $E_2\cdots$, E_n 仍为一组对合守恒积分. 研究其在球面 S^{n-1} 的切丛 TS^{n-1} 上的约束：

$$\begin{aligned} M^{2n-2}&=TS^{n-1}\\ &=\{(p,\ q)\in \boldsymbol{R}^{2n}\mid F=\frac{1}{2}(\|q\|^2-1)=0,\\ &\qquad G=\langle p,\ q\rangle=0\}, \end{aligned} \qquad (4\text{-}3\text{-}42)$$

直接计算 Lagrange 乘子 λ：

$$(F,\ G)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(q_i,\ p_i)}=\|q\|^2=1, \qquad (4\text{-}3\text{-}43)$$

$$(H,\ G)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\alpha_i q_i+\|p\|^2 q_i & \|q\|^2 p_i\\ p_i & q_i\end{vmatrix}=\langle Aq,\ q\rangle, \qquad (4\text{-}3\text{-}44)$$

$$\lambda=\frac{(H,\ G)}{(F,\ G)}=\langle Aq,\ q\rangle. \qquad (4\text{-}3\text{-}45)$$

注意在切丛 TS^{n-1} 上 $F=0$, 故 $H^*=H-\lambda F$ 的正则方程在 TS^{n-1} 上的限制为

$$\begin{cases}\dot{p}=-H_q+\lambda F_q=-Aq+\nu q,\\ \dot{q}=H_p-\lambda F_p=p,\end{cases} \qquad (4\text{-}3\text{-}46)$$

其中 $\nu=\langle Aq,\ q\rangle-\langle\dot{q},\ \dot{q}\rangle$. 消去 p 成为

$$\ddot{q}+(A-\nu)q=0, \quad \|q\|=1.$$

分量式为

$$\ddot{q}_i+(\alpha_i-\nu)q_i=0, \quad \sum_{i=1}^{n}q_i^2=1. \qquad (4\text{-}3\text{-}47)$$

C. Neumann 问题的一个重要应用，是决定一维 Schrödinger 方程的稳定带. 设 $q=\xi(t)$, $p=\dot{\xi}(t)$ 是 C. Neumann 问题的一个解，则 $E_k(\dot{\xi},\ \xi)=c_k$ 为与 t 无关的常数. 因为

$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}E_k(\dot{\xi},\ \xi)=\langle\xi,\ \xi\rangle=1,$$

故

$$\Phi_z(\dot{\xi},\ \xi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-\alpha_k}=\frac{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_{n-1})}{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)},\quad (4\text{-}3\text{-}48)$$

其中 β_j 与 t 无关．设 $\alpha_1<\cdots<\alpha_n$，恰当确定初值，使 $c_k>0$，则容易证明

$$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\cdots<\beta_{n-1}<\alpha_n.$$

此外可以证明 $(\alpha_1,\ \beta_1)$，…，$(\alpha_{n-1},\ \beta_{n-1})$，$(\alpha_n,\ \infty)$ 恰构成 Hill 方程

$$-\ddot{\psi}+\nu\psi=\lambda\psi,\qquad \nu=\langle A\xi,\ \xi\rangle-\langle\dot{\xi},\ \dot{\xi}\rangle\qquad (4\text{-}3\text{-}49)$$

的稳定带(见本章末[4])．

3.7．椭球上的测地流

设 $A=\mathrm{diag}(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，$0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n$．考察椭球

$$Q^{n-1}=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\langle A^{-1}x,\ x\rangle=1\}.\qquad (4\text{-}3\text{-}50)$$

它在 x 点的法向量为 $2A^{-1}x$．由于沿曲面运动的质点所受的约束力平行于法向量时，质点沿曲面的测地线运动，故 Newton 运动方程

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\nu A^{-1}x\qquad (3\text{-}3\text{-}51)$$

即测地线方程．为确定比例因子 ν，将曲面方程 $\langle A^{-1}x,\ x\rangle=1$ 求导两次，不难确定

$$\nu=\frac{\langle A^{-1}x',\ x'\rangle}{\langle A^{-1}x,\ A^{-1}x\rangle}.\qquad (4\text{-}3\text{-}52)$$

为证明椭球上测地线方程的 Liouville 完全可积性，先证明它可表为自由 Hamilton 量 $H=\frac{1}{2}\langle y,\ y\rangle$ 在切丛 TQ^{n-1} 上的约束．令

$$TQ^{n-1}=M^{2n-2}=\{(x,\ y)\in\boldsymbol{R}^{2n}\,|\,K_1=0,\ K_2=0\},$$
$$K_1=\langle A^{-1}x,\ x\rangle-1,\qquad K_2=\langle A^{-1}x,\ y\rangle.$$

计算辛空间 $(\boldsymbol{R}^{2n},\ dy\wedge dx)$ 中的 Poisson 括号：

$$(K_1,\ K_2)=2\langle A^{-1}x,\ A^{-1}x\rangle\equiv\frac{2}{\mu},\qquad (4\text{-}3\text{-}53)$$

$$(H, K_1) = -2\langle A^{-1}x, y\rangle, \tag{4-3-54}$$

$$(H, K_2) = -\langle A^{-1}y, y\rangle. \tag{4-3-55}$$

令 $H^* = H - \lambda_1 K_1 - \lambda_2 K_2$，由 H^* 的 Hamilton 向量场与 TQ^{n-1} 相切的条件 $(H^*, K_1)=0$，$(H^*, K_2)=0$，可确定

$$\lambda_1 = -\frac{\mu}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle, \quad \lambda_2 = \mu\langle A^{-1}x, y\rangle.$$

由此算出

$$H^* = \frac{1}{2}\langle y, y\rangle + \frac{\mu}{2}\Phi_0(x, y) - \frac{\mu}{2}\langle A^{-1}x, y\rangle^2,$$

其中 $\Phi_0 = -\langle A^{-1}y, y\rangle + \langle A^{-1}x, x\rangle\langle A^{-1}y, y\rangle - \langle A^{-1}x, y\rangle^2$.

由于 TQ^{n-1} 上 $\langle A^{-1}x, y\rangle = 0$，故只须考虑

$$H^* = \frac{1}{2}\langle y, y\rangle + \frac{\mu}{2}\Phi_0(x, y). \tag{4-3-56}$$

它与前面的 H^* 在 TQ^{n-1} 上有相同的 Hamilton 向量场. 由直接计算知，在 TQ^{n-1} 上的正则方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial H^*}{\partial y} = y, & (4\text{-}3\text{-}57) \\ \dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{\partial H^*}{\partial x} = -\dfrac{\langle A^{-1}y, y\rangle}{\langle A^{-1}x, A^{-1}x\rangle} A^{-1}x, & (4\text{-}3\text{-}58) \end{cases}$$

消去 y 得到的恰为测地线方程.

命题 9　椭球上的测地线方程是 Liouville 完全可积的.

证明　(i) 考察共焦对合系(见本节 3.3 段)

$$E_j = E_j(y, y, x, y) = y_j^2 + G_j,$$

则有

$$|y|^2 = \langle y, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} E_j, \tag{4-3-59}$$

$$\Phi_0 = -F_{-1} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{-1} E_j = \langle A^{-1}y, y\rangle K_1 - K_2^2, \tag{4-3-60}$$

因此 Poisson 括号 $(|y|^2, E_k) = (\Phi_0, E_k) = 0$.

(ii) 断语: $(K_1, E_k) = 0$ 在 $M = TQ^{n-1}$ 上成立，$k=1, \cdots, n$

事实上，由于在 M 上 $K_1 = K_2 = 0$，故

$$0=(\Phi_0,\ E_k)=\langle A^{-1}y,\ y\rangle(K_1,\ E_k)+K_1(\langle A^{-1}y,\ y\rangle,\ E_k)$$
$$-2K_2(K_2,\ E_k)$$
$$=\langle A^{-1}y,\ y\rangle(K_1,\ E_k). \qquad (4\text{-}3\text{-}61)$$

当 $y\neq 0$ 时 $\langle A^{-1}y,\ y\rangle\neq 0$，此时 $(K_1,\ E_k)=0$. 当 $y=0$ 时，由连续性知 $(K_1,\ E_k)$ 仍为零.

(iii) 令 $E_j^*=E_j-\mu_jK_1$，μ_j 由 IdE_j^* 与 M 相切的条件确定：

$$(E_j^*,\ K_1)=(E_j,\ K_1)=0, \qquad (4\text{-}3\text{-}62)$$
$$(E_j^*,\ K_2)=(E_j,\ K_2)-\mu_j(K_1,\ K_2)=0. \qquad (4\text{-}3\text{-}63)$$

第一式由断语(ii)自然满足. 第二式导出 $M_j=\frac{1}{2}\mu(E_j,\ K_2)$. 利用上述断语不难验证，在 M 上成立对合条件 $(E_j^*,\ E_k^*)=0,\ \forall j,\ k$.

此外，由于 $dE_1,\ \cdots,\ dE_n$ 在 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 的某开集的每一点处都为满秩，故余切向量组

$$(dE_1^*,\ \cdots,\ dE_n^*)=(dE_1-\mu_1dK_1,\ \cdots,\ dE_n-\mu_ndK_1)$$

在 $M=TQ^{n-1}$ 的某开集的每一点上，至少为 $n-1$ 秩.

(iv) 剩下只须证 E_j^* 是 H^* 的守恒积分，即 Poisson 括号 $(H^*,\ E_j^*)$ 在 TQ^{n-1} 上为零. 这不难由直接计算确立. 命题证完.

H. Knörrer 证明了一个深刻的结果(见本章末[4])：在 Gauss 映射下：

$$x\mapsto q=\frac{A^{-1}x}{\|A^{-1}x\|}, \qquad Q^{n-1}\to S^{n-1}, \qquad (4\text{-}3\text{-}64)$$

椭球测地线问题的解映为 Neumann 问题的解.

3.8 矩阵的保谱变形与 Lax 方程

本段考虑的都是 $n\times n$ 矩阵. 当矩阵 $L(t)$ 的特征值与参数 t 无关时，我们称之为保谱变形. 我们作更强的假定，设

$$L(t)=U(t)L_0V(t),$$

其中 $U,\ V$ 互逆($UV=E$ 为单位矩阵). 假定对 t 是光滑的，求导得

$$\dot{L}=\dot{U}L_0V+UL_0\dot{V}=(\dot{U}V)L+L(U\dot{V}). \qquad (4\text{-}3\text{-}65)$$

因为 $\dot{U}V+U\dot{V}=0$，可令 $A(t)=\dot{U}V=-U\dot{V}$，从而

$$\dot{L}=AL-LA\equiv[A,\ L],\tag{4-3-66}$$

这就是所谓 Lax 方程.

反过来，设 L 满足 Lax 方程 $\dot{L}=[A,\ L]$，考察齐线性常微分方程的基解矩阵 U:

$$\dot{U}=A(t)U,\quad U(0)=E,$$

由常微分方程理论，$A(t)$ 连续即保证 $U(t)$ 存在、唯一且属于 C^1. 记 $V=U^{-1}$，易证 V 满足

$$\dot{V}=-VA(t),\quad V(0)=E.$$

直接计算

$$\begin{aligned}(VLU)^{\cdot}&=\dot{V}LU+V\dot{L}U+VL\dot{U}\\&=V(\dot{L}-[A,\ L])U=0,\end{aligned}\tag{4-3-67}$$

故 $V(t)L(t)U(t)=L(0)$，$L(t)$ 与 $L(0)$ 相似. 于是有:

命题 10 下列两件事实是等价的:

(i) 存在非退化矩阵 $U(t)\in C^1$，使得

$$L(t)=U(t)L(0)(U(t))^{-1};\tag{4-3-68}$$

(ii) 存在矩阵 $A(t)\in C^0$，使得 $\dot{L}=[A,\ L]$.

推论 设 $\dot{L}=[A,\ L]$，则 L 的特征值 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ 是守恒积分. 进一步，

$$F_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k\tag{4-3-69}$$

是守恒积分(因 F_k 是 L 的变元的多项式，故亦称 F_k 是多项式守恒积分).

这个结论十分重要，因此我们考虑另一个直接证明.

引理 5 $\operatorname{tr}[A,\ B]=0$.

证明 $\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}b_{ki}-\sum\limits_i\sum\limits_k b_{ik}a_{ki}=0.$ (4-3-70)

引理 6 若 $\dot{L}=[A,\ L]$，则

$$(L^k)^{\cdot}=[A,\ L^k].\tag{4-3-71}$$

证明 $(L^k)^{\cdot}=\sum_{j=1}^{k} L^{j-1}\dot{L}L^{k-j}=\sum_{j=1}^{k} L^{j-1}(AL-LA)L^{k-j}$

$$=\sum_{j=1}^{k}(L^{j-1}AL^{k-j+1}-L^jAL^{k-j})$$

$$=AL^k-L^kA=\text{右式}.$$

定理 3 若 $\dot{L}=[A,L]$，则 $F_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k)$ 是守恒积分.

证明
$$\dot{F}_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k)^{\cdot}=\frac{1}{k}\operatorname{tr}[A,L^k]=0. \tag{4-3-72}$$

3.9 周期 Toda 链

考察辛流形 $(\boldsymbol{R}^{2N}, dp\wedge dq)$ 中的 Hamilton 函数

$$H=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}p_k^2+\exp(q_{k+1}-q_k)\right). \tag{4-3-73}$$

设 $p_{N+k}=p_k$，$q_{N+k}=q_k$，$\forall k$（周期条件），Hamilton 正则方程为

$$\begin{cases}\dot{p}_k=\exp(q_{k+1}-q_k)-\exp(q_k-q_{k-1}),\\ \dot{q}_k=p_k.\end{cases}$$

作代换 $c_k=\exp(q_k-q_{k-1})$，化为

$$\begin{cases}\dot{p}_k=c_{k+1}-c_k, & (4\text{-}3\text{-}74)\\ \dot{b}_k=(p_k-p_{k-1})c_k. & (4\text{-}3\text{-}75)\end{cases}$$

命题 11 周期 Toda 链方程有 Lax 表示 $\dot{L}=[L,A]$，其中 L，A 都是 $N\times N$ 矩阵，变元为

$$L_{nm}=\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1}+\sqrt{c_{n+1}}\,\delta_{n+1,m}+p_n\delta_{nm}, \tag{4-3-76}$$

$$A_{nm}=\frac{1}{2}(\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1}-\sqrt{c_{n+1}}\,\delta_{n+1,m}). \tag{4-3-77}$$

一切下标 n，m 都在模 N 下理解，即 $n+N$ 与 n 视为同一.

证明 经直接计算得

$$[L,A]_{nm}=\sum_{j=1}^{N}(L_{nj}A_{jm}-A_{nj}L_{jm})$$

$$=(c_{n+1}-c_n)\delta_{nm}+\frac{1}{2}\sqrt{c_n}(p_n-p_{n-1})\delta_{n,m+1}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_{n+1}}\,(p_{n+1}-p_n)\delta_{n+1,m}.$$

$$\dot{L}_{nm}=\dot{p}_n\delta_{nm}+\frac{1}{2\sqrt{c_n}}\,\dot{c}_n\delta_{n,m+1}+\frac{1}{2\sqrt{c_{n+1}}}\,\dot{c}_{n+1}\delta_{n+1,m}.$$

由此知 Lax 方程即 Toda 链方程.

引理7 两种变量下的 Poisson 括号计算公式

$$(F,\ G)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(q_n,\ p_n)}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\left(c_n\,\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(c_n,\ p_n)}-c_{n+1}\,\frac{\partial(F,\ G)}{\partial(c_{n+1},\ p_n)}\right)\qquad(4\text{-}3\text{-}78)$$

(容易直接验证).

考察特征值问题 $L\psi=\lambda\psi,\ \psi=(\psi_1,\ \cdots,\ \psi_N)^T$, 其分量式为

$$\sqrt{c_n}\,\psi_{n-1}+\sqrt{c_{n+1}}\,\psi_{n+1}+p_n\psi_n=\lambda\psi_n.$$

引理8 设特征向量满足归范条件 $\Sigma_n\psi_n^2=1$, 则

$$\frac{\partial\lambda}{\partial c_n}=\frac{1}{\sqrt{c_n}}\psi_n\psi_{n-1},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial p_n}=\psi_n^2.\qquad(4\text{-}3\text{-}79)$$

证明 将 $(c_n,\ p_n)$ 换为 $(c_n+\varepsilon\delta c_n,\ p_n+\varepsilon\delta p_n)$. 将 $\delta=\partial/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ 作用于 $L\psi=\lambda\psi$, 得

$$L(\delta\psi)+(\delta L)\psi=(\delta\lambda)\psi+\lambda\delta\psi.$$

与 ψ 作内积

$$\langle\psi,\ L\delta\psi\rangle+\langle\psi,\ (\delta L)\psi\rangle=\delta\lambda+\lambda\langle\psi,\ \delta\psi\rangle,$$

因 L 为对称矩阵, 故两旁消掉一项,

$$\delta\lambda=\langle\psi,\ (\delta L)\psi\rangle$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\psi_n\left(\frac{\psi_{n-1}}{2\sqrt{c_n}}\,\delta c_n+\frac{\psi_{n+1}}{2\sqrt{c_{n+1}}}\,\delta c_{n+1}+\psi_n\delta p_n\right).\qquad(4\text{-}3\text{-}80)$$

由此即得引理.

定义 Wronsky 行列式为

$$W_n(\psi,\ \varphi)=\sqrt{c_n}\,(\psi_n\varphi_{n-1}-\psi_{n-1}\varphi_n).$$

设 $\psi,\ \varphi$ 分别是相应于特征值 $\lambda,\ \mu$ 的特征向量,

$$\sqrt{c_n}\,\psi_{n-1}+\sqrt{c_{n+1}}\,\psi_{n+1}+p_n\psi_n=\lambda\psi_n,\qquad(4\text{-}3\text{-}81)$$

$$\sqrt{c_n}\,\varphi_{n-1}+\sqrt{c_{n+1}}\,\varphi_{n+1}+p_n\varphi_n=\mu\varphi_n.$$

分别用 φ_n, $-\psi_n$ 乘两式，相加得

$$(\lambda-\mu)\psi_n\varphi_n=W_{n+1}(\psi,\ \varphi)-W_n(\psi,\ \varphi).\qquad(4\text{-}3\text{-}82)$$

命题 12　矩阵 L 的相异特征值 λ, μ 对合.

证明　用变量 c_n, p_n 直接计算 λ, μ 的 Poisson 括号：

$$(\lambda,\ \mu)=\sum_{n=1}^{N}\left(c_n\frac{\partial(\lambda,\ \mu)}{\partial(c_n,\ p_n)}-c_{n+1}\frac{\partial(\lambda,\ \mu)}{\partial(c_{n+1},\ p_n)}\right)$$

$$=\sum_n c_n\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{c_n}}\psi_n\psi_{n-1} & \psi_n^2\\ \dfrac{1}{\sqrt{c_n}}\varphi_n\varphi_{n-1} & \varphi_n^2\end{vmatrix}$$

$$-c_{n+1}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{c_{n+1}}}\psi_{n+1}\psi_n & \psi_n^2\\ \dfrac{1}{\sqrt{c_{n+1}}}\varphi_{n+1}\varphi_n & \varphi_n^2\end{vmatrix}$$

$$=-\sum_n\psi_n\varphi_n(W_n(\psi,\ \varphi)+W_{n+1}(\psi,\ \varphi))$$

$$=\frac{1}{(\lambda-\mu)}\sum_n(W_n^2(\psi,\ \varphi)-W_{n+1}^2(\psi,\ \varphi)).$$

由周期条件，和式显然为零.

命题 13　$F_k=\dfrac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k)$, $k=1,\ \cdots,\ n$, 是 p_n, q_n 的多项式对合系.

证明　因 $F_k=\Sigma_j\lambda_j^k$, 由 λ_1, $\cdots$, λ_n 的对合性推出其复合函数系 F_1, $\cdots$, F_n 的对合性.

定理 4　周期 Toda 链系统是 Liouville 完全可积系，其对合守恒积分为 F_1, $\cdots$, F_n, 其 Hamilton 量 $H=F_2$.

证明　只须证明

$$H=F_2.$$

由于

$$L=\begin{bmatrix} p_1 & \sqrt{c_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_2} & p_2 & \sqrt{c_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_3} & p_3 & \sqrt{c_4} & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & p_{N-1} & \sqrt{c_N} \\ \sqrt{c_1} & 0 & \cdots & & \cdots & \sqrt{c_N} & p_N \end{bmatrix}$$

为对称矩阵：$L_{ki}=L_{ik}$，所以

$$F_2=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(L^2)=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k L_{ik}L_{ki}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k L_{ik}^2, \qquad (4\text{-}3\text{-}83)$$

即一切变元的平方和，它显然等于

$$\sum_k\left(\frac{1}{2}p_k^2+c_k\right)=\sum_k\left(\frac{1}{2}p_k^2+\exp(q_k-q_{k-1})\right)=H. \qquad (4\text{-}3\text{-}84)$$

3.10 Calogero-Moser N 体问题

考察 Hamilton 函数

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N p_i^2+\sum_{i<j}\frac{1}{|q_i-q_j|^\alpha}, \qquad (4\text{-}3\text{-}85)$$

当 $\alpha=1$，第二项是 Newton 位势．$N=3$ 时即经典的三体问题，它不是完全可积的，其历史地位在本章引言中已提到过．有趣的是，$\alpha=2$ 时它是 Liouville 完全可积的，这是 Calogero 与 Moser 的重大发现．当 $\alpha=6$，质点间的力与距离的 7 次方成反比，称为 Van de Waals 力，在研究某类分子系统的相互作用时要遇到．Van de Waals 系统是否完全可积的，目前尚不知道．

Calogero-Moser 系统($\alpha=2$)的正则方程为

$$\dot{p}_k=\sum_{j=1}^{N}{}' 2(q_k-q_j)^{-3},\ \dot{q}_k=p_k.$$

消去 p_k 得

$$\ddot{q}_k=\sum_{j=1}^{N}{}' 2(q_k-q_j)^{-3}\quad(k=1,\cdots,N), \qquad (4\text{-}3\text{-}86)$$

$\sum'$ 中不含 $j=k$ 的项．

命题 14 Calogero-Moser 方程组可写为 Lax 形式：$\dot{L}=[A,$

$L]$, $N\times N$ 矩阵 A, L 的变元为

$$L_{kk}=p_k=\dot{q}_k,\quad L_{kj}=\frac{i}{q_k-q_j};\tag{4-3-87}$$

$$A_{kk}=-id_k=-i\sum_{j=1}^{N}{}'\frac{1}{(q_k-q_j)^2},\quad A_{kj}=\frac{i}{(q_k-q_j)^2}.$$

这里 $i=\sqrt{-1}$. (4-3-88)

证明 直接计算得($k\neq j$)

$$[A,\ L]_{kk}=\sum_s(A_{ks}L_{sk}-L_{ks}A_{sk})$$
$$=\sum_{s\neq k}=\sum_s{}'2(q_k-q_s)^{-3},$$
$$[A,\ L]_{kj}=\sum_s(A_{ks}L_{sj}-L_{ks}A_{sj})$$
$$=\frac{i}{(q_k-q_j)^2}(\dot{q}_j-\dot{q}_k).$$

故 $\dot{L}_{kj}=[A,\ L]_{kj}$ 自然满足;而 $\dot{L}_{kk}=[A,L]_{kk}$ 恰给出 CM 方程组.

命题 15 $I_n=\mathrm{tr}L^n$ 是多项式守恒积分,且 Hamilton 量

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}L^2=\frac{1}{2}I_2.\tag{4-3-89}$$

证明 前一部分由上节 Lax 理论即知. 第二部分直接验证,只须注意 L 为 Hermite 矩阵,即 $L^*=L$ 或 L_{jk} 为 L_{kj} 的复共轭:

$$\mathrm{tr}L^2=\sum_k\sum_j L_{kj}L_{jk}$$
$$=\sum_k\sum_j L_{kj}L_{kj}^*$$
$$=\sum_k p_k^2+\sum_{k\neq j}\sum(q_k-q_j)^{-2}$$
$$=2H.$$

I_1, …, I_n 的两两对合性证明见本章末[6]. 以下将 CM 系统化为完全可积形式,为此定义 $N\times N$ 矩阵 $Q=\mathrm{diag}(q_1,\ \cdots,\ q_N)$(见本章末[7]).

引理 9 $\dot{Q}=[A,\ Q]+L.$ (4-3-90)

证明 直接计算($k\neq j$).

$$[A, Q]_{kk}=\sum_s(A_{ks}Q_{sk}-Q_{ks}A_{sk})=A_{kk}q_k-q_kA_{kk}=0, \tag{4-3-91}$$

$$\begin{aligned}[A, Q]_{kj}&=\sum_s(A_{ks}Q_{sj}-Q_{ks}A_{sj})\\&=A_{kj}q_j-q_kA_{kj}\\&=\frac{i}{(q_k-q_j)^2}(q_j-q_k)\\&=-L_{kj},\end{aligned} \tag{4-3-92}$$

而 $\dot{Q}_{kk}=\dot{q}_k=L_{kk}$，$\dot{Q}_{kj}=0$. 由此即得引理.

命题 16 设 $\dot{L}=[A, L]$ 成立，则

$$(QL^{n-1})_t=[A, QL^{n-1}]+L^n \quad (n=1, \cdots, N). \tag{4-3-93}$$

证明 用归纳法. $n=1$ 时由上面引理知其成立. 设 $n=m$ 时成立，则

$$\begin{aligned}(QL^m)_t&=(QL^{m-1})_tL+(QL^{m-1})L_t\\&=[A, QL^{m-1}]L+L^{m+1}+QL^{m-1}[A, L].\end{aligned} \tag{4-3-94}$$

打开两个矩阵换位括号，立刻得结论.

定理 5 设 $I_n=\mathrm{tr}(L^n)$，$J_n=\mathrm{tr}(QL^{n-1})$，则 Calogero-Moser 系统化为

$$\dot{I}_n=0,\ \dot{J}_n=I_n \quad (n=1, \cdots, N),$$

因而 $$I_n(t)=I_n(0),\ J_n(t)=J_n(0)+I_n(0)t. \tag{4-3-95}$$

证明 $$\begin{aligned}\dot{J}_n&=\mathrm{tr}(QL^{n-1})_t\\&=\mathrm{tr}([A, QL^{n-1}]+L^n)\\&=\mathrm{tr}L^n.\end{aligned}$$

参考文献

[1] J. Moser, *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory*, in Proc. of 1983 Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Eq's, Science Press, Beijing, 1986, 157~229.

[2] J. Pöschel, Comm. Pur. Appl. Math, 35(1982), 653~696.

[3] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer Verlag, 1978.

[4] H. Knörrer, J. rein. ang. Math., 334(1982), 69~78.

[5] V. E. 扎哈罗夫等,彭启才译,孤立子理论,科学出版社,1985.

[6] J. Moser, Adv. Math., 16(1975), 197~220.

[7] M. J. Ablowitz and H. Sequr, Soliton and the inverse scattering Transform, SIAM, Philadelphia, 1981.

第五章

对　　称

田　畴

在研究非线性演化方程时，对称这一概念近来愈来愈受到人们的重视．对一个给定的方程，寻找它的对称及其李代数结构是一个有意义的问题．在本章中，我们将阐明对称的定义及其几何意义，并进一步讨论与寻找对称有关的概念和方法．为了便于读者的理解，KdV 方程将作为例子贯彻始终来加以说明．

如无特别声明，本章出现的 $u(x, t)$, $v(x, t)$ 等都指 x, t 的函数，并简记为 u, v 等．$F(x, t, u)$, $a(x, t, u)$ 等则表示 x, t, u, u_x, $\cdots$ 的函数，所有的函数都假定是连续可微的．如果需要，我们还将假定，当 $|x|\to\infty$ 时，所有的函数及其各阶导数都趋于零．

§1 对　　称

考虑非线性演化方程

$$u_t = K(x, t, u). \tag{5-1-1}$$

设 $u=u(x, t)$ 是(5-1-1)的一个解，g_ε 是作用于 u 的一个单参数变换(ε 为参数，$g_0=I$ 为恒等变换)，

$$\begin{aligned}\bar{u} &= g_\varepsilon u = \bar{u}(u, \varepsilon),\\ \bar{u}|_{\varepsilon=0} &= g_0 u = \bar{u}(u, 0) = u.\end{aligned} \tag{5-1-2}$$

若 $\bar{u}$ 仍是(5-1-1)的解，即

$$\bar{u}_t = K(x, t, \bar{u}), \tag{5-1-3}$$

则由(5-1-2)，

$$\bar{u} = u + \varepsilon \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \cdots,$$

$$K(\bar{u}) = K(u) + \varepsilon K'(u)[\sigma] + \cdots,$$

其中
$$\sigma(x, t, u) = \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0},$$

$$K'(u)[\sigma] = \frac{d}{d\varepsilon} K(x, t, u+\varepsilon\sigma)\bigg|_{\varepsilon=0},$$

即 K 对 u 沿方向 σ 的 Gateaux 导数。将它们代入(5-1-3)，并考虑 $\varepsilon\to 0$ 时的极限，就得到

$$\frac{d\sigma}{dt} = K'(u)[\sigma].$$

$K'(u)[\sigma]$也可以理解为 K 对 u 的线性化算子 $K'(u)$对 σ 的作用，因此，$K'(u)[\sigma]$可看作为 $K'(u)\cdot\sigma$，并常简写为 $K'\cdot\sigma$ 或 $K'\sigma$。而

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \sigma, \quad \bar{u}(u, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = u,$$

则表明了 $\sigma(x, t, u)$与变换 g_ε 的关系.

1.1 对称的概念

定义 1 $\sigma(x, t, u)$称为方程(5-1-1)的一个对称(Symmetry)，如果它满足方程

$$\frac{d\sigma}{dt} = K'\sigma, \tag{5-1-4}$$

其中 $\frac{d\sigma}{dt}$ 表示 σ 对 t 的全导数，K' 表示K对 u 的线性化算子，u 满足(5-1-1)。

可见，方程(5-1-1)的一个对称 $\sigma(x, t, u)$可以理解为保持

(5-1-1)的解的“无穷小变换”，也可以说，它是对应于这个变换的向量场$\left(\sigma(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u}\right)$.

命题1 $\sigma(x, t, u)$是(5-1-1)的对称必须且只须它满足

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}=[K, \sigma], \tag{5-1-5}$$

其中$\frac{\partial \sigma}{\partial t}$表示$\sigma$对$t$的偏导数，$[K, \sigma]=K'\sigma-\sigma'K$称为$K$与$\sigma$的换位子.

证明 由

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt}&=\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial \sigma}{\partial u_x}\frac{du_x}{dt}+\cdots\\&=\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial \sigma}{\partial u}K+\frac{\partial \sigma}{\partial u_x}K_x+\cdots\\&=\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\sigma'K\end{aligned}$$

和定义1，命题得证.

特别，若σ不显含t，则σ为(5-1-1)的对称的条件就简化为

$$[K, \sigma]=0 \quad (\text{见章末[1]}). \tag{5-1-6}$$

例1 KdV方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x, \tag{5-1-7}$$

$$K=u_{xxx}+6uu_x,$$

$$K'=D^3+6uD+6u_x,$$

其中算子$D=\frac{d}{dx}$. 根据定义，$\sigma(x, t, u)$是(5-1-7)的对称必须且只须它满足

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sigma_{xxx}+6u\sigma_x+6u_x\sigma \tag{5-1-8}$$

(u满足(5-1-7)). 不难直接验证，

$$K_0=u_x,$$

$$K_1=u_{xxx}+6uu_x(=K=u_t),$$

$$\tau_0 = 3tu_x + \frac{1}{2},$$

$$\tau_1 = 3tu_t + xu_x + 2u$$

都满足方程(5-1-8)，因而它们都是 KdV 方程(5-1-7)的对称. 并且，它们分别对应于下列保持解的单参数变换：

$$f_0(\varepsilon):\ u(x,\ t)\to\bar{u}(x,\ t,\ \varepsilon)=u(x+\varepsilon,\ t),$$

$$f_1(\varepsilon):\ u(x,\ t)\to\bar{u}(x,\ t,\ \varepsilon)=u(x,\ t+\varepsilon),$$

$$g_0(\varepsilon):\ u(x,\ t)\to\bar{u}(x,\ t,\ \varepsilon)=u(x+3t\varepsilon,\ t)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$g_1(\varepsilon):\ u(x,\ t)\to\bar{u}(x,\ t,\ \varepsilon)=e^{2\varepsilon}u(xe^{\varepsilon},\ te^{3\varepsilon}).$$

不难看出，上述变换有明确的物理意义，它们分别表示沿 x 轴的平移，沿 t 轴的平移，伽利略(Galilean)变换和标量(Scalar)变换.

由对称 $\sigma(x,\ t,\ u)$ 去寻找相应的单参数变换，可以去求解微分方程

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}=\sigma(x,\ t,\ \bar{u}),\qquad \bar{u}|_{\varepsilon=0}=u. \tag{5-1-9}$$

例如，由 $K_0=u_x$ 即可构造微分方程

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon}=\bar{u}_x,$$

$$\bar{u}|_{\varepsilon=0}=u,$$

并不难得到解 $\bar{u}=u(x+\varepsilon,\ t)$. 当然，一般说来，求解方程(5-1-9)并不容易，特别是当对称 σ 的形式比较复杂时.

KdV 方程中不显含 x 和 t，但是它的对称中却可能显含 x 和 t(例如 τ_0 和 τ_1). 对显含 x 和 t 的方程，讨论时并无本质上的差别.

例 2 广义 KdV(GKdV)方程(见章末[2])

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x+6fu+x(f'-12f^2) \tag{5-1-10}$$

(f 是 t 的任意函数)是 KdV 方程($f=0$)和柱 KdV(GKdV)方程

$\left(f=-\frac{1}{12t}\right)$

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x-\frac{u}{2t} \tag{5-1-11}$$

的统一和推广．GKdV 方程(5-1-10)的

$$K=u_{xxx}+6uu_x+6fu+x(f'-12f^2),$$
$$K'=D^3+6uD+6u_x+6f,$$

对称 $\sigma(x, t, u)$ 应满足的方程为

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sigma_{xxx}+6u\sigma_x+6u_x\sigma+6f\sigma. \tag{5-1-12}$$

可直接验证 GKdV 方程(5-1-10)也有下列对称：

$$K_0=g^{-\frac{1}{2}}(u_x-f),$$
$$K_1=g^{-\frac{3}{2}}(u_{xxx}+6uu_x-6xfu_x-6fu+6xf^2)$$
$$(=g^{-\frac{3}{2}}(u_t-12fu-6xfu_x-xf'+18xf^2),$$
$$\tau_0=3g^{-\frac{1}{2}}\left(\int g^{\frac{3}{2}}dt\right)(u_x-f)+\frac{g}{2},$$
$$\tau_1=3g^{-\frac{3}{2}}\left(\int g^{\frac{3}{2}}dt\right)K_1+x(u_x-f)+2(u-xf),$$

其中 $g(t)=e^{\int 12fdt}(g'=12fg)$．特别，当 $f=0$ 时，$g=1$，以上四个对称就归结为前面已经讨论过的 KdV 方程的对称．当 $f=-\frac{1}{12t}$，则 $g=-\frac{1}{12t}$，以上四个对称就归结为 GKdV 方程(5-1-11)的对称(见章末[3]、[4])．

不难看出，对称的概念和对称应满足的条件也适用于高维演化方程

$$u_t=K(x, t, u, u_x, u_y, \cdots).$$

根据对称是保持解的无穷小变换这一观点，有关对称的概念和条件还可以推广到一般的微分方程．

众所周知，在研究非线性演化方程时，守恒量是一个重要的概

念，对称与守恒量有密切的关系.

1.2 对称与守恒量的关系

假定所讨论的函数空间中定义了内积. 记号 $\langle a, b\rangle$ 表示函数 $a(x, t, u)$ 和 $b(x, t, u)$ 的内积.

定义 2 $I(x, t, u)$ 称为方程(5-1-1)的一个守恒量，如果当 u 满足(5-1-1)时它与 t 无关，即

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{u_t=K(x,t,u)}=0.$$

显然，上述条件也可以表示为

$$I'K+\frac{\partial I}{\partial t}=0. \tag{5-1-13}$$

定义 3 $r(x, t, u)$ 称为方程(5-1-1)的一个守恒协变量(conserved covariant)，如果它满足方程

$$\frac{dr}{dt}+K'^{*}r=0, \tag{5-1-14}$$

其中 K'^{*} 是线性化算子 K' 的共轭算子，u 满足方程(5-1-1).

由 $\frac{dr}{dt}=\frac{\partial r}{\partial t}+r'K$，立即得到：

命题 2 $r(x, t, u)$ 是(5-1-1)的守恒协变量必须且只须

$$\frac{\partial r}{\partial t}+K'^{*}r+r'K=0.$$

命题 3 设 $\sigma(x, t, u)$ 是(5-1-1)的一个对称，$r(x, t, u)$ 是(5-1-1)的一个守恒协变量，则 $\langle\sigma, r\rangle$ 与 t 无关.

证明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma, r\rangle&=\left\langle\frac{d\sigma}{dt}, r\right\rangle+\left\langle\sigma, \frac{dr}{dt}\right\rangle\\&=\langle K'\sigma, r\rangle+\langle\sigma, -K'^{*}r\rangle\\&=\langle\sigma, K'^{*}r\rangle+\langle\sigma, -K'^{*}r\rangle\\&=0.\end{aligned}$$

定义 4 $r(x, t, u)$ 称为函数 $F(x, t, u)$ 的梯度，如果

$$F'\xi = \langle r, \xi \rangle$$

对任意的函数 $\xi(x, t, u)$ 成立.

F 的梯度常记作 grad F 或 $\dfrac{\delta F}{\delta u}$.

设 $\Phi(x, t, u)$ 是作用于函数空间上的一个算子，对 $\Phi(x, t, u)$ 也可以定义它对 u 沿方向 σ 的 Gateaux 导数为

$$\Phi'(u)[\sigma] = \frac{d}{d\varepsilon}\Phi(x, t, u+\varepsilon\sigma)\Big|_{\varepsilon=0},$$

并常简记作 $\Phi'[\sigma]$. 显然，$\Phi'[\sigma]$ 仍然是一个算子.

特别，对一个函数的线性化算子有下述重要性质.

命题 4　对任意的函数 $F(x, t, u)$, $a(x, t, u)$ 和 $b(x, t, u)$,

$$(F')'[a]\circ b = (F')'[b]\circ a.$$

证明　根据定义，

$$\begin{aligned}(F')'[a]\circ b &= \frac{d}{d\varepsilon_1}F'(u+\varepsilon_1 a)\Big|_{\varepsilon_1=0}\circ b\\ &= \frac{d}{d\varepsilon_1}\frac{d}{d\varepsilon_2}F(u+\varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b)\Big|_{\varepsilon_1=0=\varepsilon_2}\\ &= \frac{d}{d\varepsilon_2}\frac{d}{d\varepsilon_1}F(u+\varepsilon_2 b+\varepsilon_1 a)\Big|_{\varepsilon_1=0=\varepsilon_2}\\ &= (F')'[b]\circ a.\end{aligned}$$

命题 5　设 $r(x, t, u)$ 为梯度函数(即 r 为某一函数的梯度)，则 r' 为对称算子，即 $r' = r'^*$.

证明　设 $r = \text{grad}\, F$. 根据定义，对任意的函数 a 和 b,

$$F'a = \langle r, a \rangle,$$

$$(F')'[b]\circ a = \langle r'b, a \rangle,$$

$$(F')'[a]\circ b = \langle r'a, b \rangle.$$

由命题 4,　　$\langle r'b, a \rangle = \langle r'a, b \rangle = \langle r'^*b, a \rangle$

对任意的函数 a 和 b 成立，所以，$r' = r'^*$.

设 $I(x, t, u)$ 是(5-1-1)的一个守恒量，$r = \text{grad}\, I$, 则条件(5-1-13)就可以表示为

$$\langle r, K\rangle+\frac{\partial I}{\partial t}=0. \tag{5-1-15}$$

将上式沿任意方向 v(设 v 不显含 t)求导数，则得到

$$\langle r'v, K\rangle+\langle r, K'v\rangle+\frac{\partial}{\partial t}(I'v)=0,$$

即 $$\langle v, r'^*K\rangle+\langle K'^*r, v\rangle+\frac{\partial}{\partial t}\langle r, v\rangle=0.$$

所以，

$$\left\langle r'^*K+K'^*r+\frac{\partial r}{\partial t}, v\right\rangle=0 \tag{5-1-16}$$

对任意的 v 成立. 又由 $r'=r'^*$. (5-1-16) 又可以化为

$$\left\langle r'K+K'^*r+\frac{\partial r}{\partial t}, v\right\rangle=0.$$

可见，守恒协变量与守恒量有密切的关系. 能否由已知的守恒协变量 r 去求得与之相应的守恒量? 这样的守恒量未必存在，因为 r 未必是梯度函数. 命题 5 说明了 r 是梯度函数的必要条件是 r' 为对称算子. 下面证明这个条件也是充分的. 事实上，我们还可以具体给出相应的函数.

命题 6 设 $r(x, t, u)$ 的线性化算子 r' 是对称的($r'=r'^*$)，则 r 是函数

$$F=\int_0^1\langle r(\lambda u), u\rangle d\lambda$$

的梯度.

证明 对任意函数 ξ,

$$F'\xi=\int_0^1(\langle r'(\lambda u)\xi, u\rangle+\langle r(\lambda u), \xi\rangle)d\lambda$$

$$=\int_0^1\langle r'(\lambda u)u+r(\lambda u), \xi\rangle d\lambda.$$

由 $$r'(\lambda u)u=\frac{d}{d\varepsilon}r(\lambda(u+\varepsilon u))\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\lambda\frac{dr(\lambda u)}{d\lambda},$$

$$F'\xi=\int_0^1\left\langle\lambda\frac{dr(\lambda u)}{d\lambda}+r(\lambda u),\ \xi\right\rangle d\lambda$$

$$=\int_0^1\left\langle\frac{d}{d\lambda}(\lambda r(\lambda u)),\ \xi\right\rangle d\lambda$$

$$=\langle\lambda r(\lambda u),\xi\rangle\Big|_0^1$$

$$=\langle r(u),\ \xi\rangle.$$

所以，
$$r=\operatorname{grad} F.$$

例3 KdV 方程(5-1-7)的

$$K=u_{xxx}+6uu_x,$$

$$K'=D^3+6uD+6u_x.$$

假设 $a(x,\ t,\ u)$和 $b(x,\ t,\ u)$的内积 $\langle a,\ b\rangle$ 定义为

$$\langle a,\ b\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}abdx,$$

由 $\langle K'a,\ b\rangle=\langle a,\ K'^*b\rangle$ 即可得到

$$K'^*=-(D^3+6uD).$$

于是，$r(x,\ t,\ u)$是(5-1-7)的守恒协变量必须且只须它满足方程

$$\frac{dr}{dt}=r_{xxx}+6ur_x, \tag{5-1-17}$$

其中 u 满足方程(5-1-7)．显然，

$$r_0=u$$

是(5-1-7)的一个守恒协变量．我们还不难证明，

$$r_1=u_{xx}+3u^2,$$

$$\tilde{r}_0=3tu+\frac{x}{2},$$

$$\tilde{r}_1=3t(u_{xx}+3u^2)+xu+D^{-1}u$$

(D^{-1} 是 D 的逆算子，$D^{-1}\circ D=D\circ D^{-1}=I$)也都是(5-1-7)的守恒协变量．

将上述守恒协变量与在本节例1中得到的对称作比较，不难看出它们之间存在下列关系：

$$K_0 = Dr_0, \quad K_1 = Dr,$$
$$\tau_0 = D\tilde{r}_0, \quad \tau_1 = D\tilde{r}_1.$$

这个事实并不是偶然的. 比较(5-1-17)和(5-1-8), 我们容易证明: 如果 r 满足(5-1-17), 则 Dr 满足(5-1-8). 也就是说, 运算子 D^{-1} 将方程(5-1-7)的守恒协变量变为对称. 这一点与 KdV 方程(5-1-7)的 Hamilton 结构有密切关系.

按照本节命题 6 所提示的办法, 我们就可以作出与 r_0, r_1 和 $\tilde{r}_0$ 相应的函数:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2}\, dx,$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{uu_{xx}}{2} + u^3 \right) dx,$$

$$\tilde{I}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2} xu^2 + \frac{x}{2} u \right) dx ①.$$

不难直接验证, I_0, I_1 和 $\tilde{I}_0$ 都是 KdV 方程(5-1-7)的守恒量. r_0, r_1 和 $\tilde{r}_0$ 分别是它们的梯度, I_1 通常表示为

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{u_x^2}{2} + u^3 \right) dx.$$

但是, 不存在与 τ_1 相对应的守恒量, 因为 τ_1' 不是对称算子.

下面我们将看到, 对 KdV 方程, 已经找到两组无穷个对称, 与它们相应的有两组无穷个守恒协变量, 但是, 其中只有一组才有相应的无穷个守恒量.

§2 强对称、遗传性

在上一节中, 我们定义了方程(5-1-1)的对称, 并给出了对称 σ 应满足的条件. 根据这个条件去寻找方程的对称, 对一些简单形式的对称是可行的, 而对一些复杂的对称则不很容易. 我们需

①根据需要, 还可以假设: 当 $|x|\to\infty$ 时, u, u_x, … 充分快地 $\to 0$, 例如 $xu\to 0$ 等.

要探索寻找对称的新的途径．一个自然的考虑，就是如何由已知的对称去生成新的对称．

2.1 强对称

假设 $\Phi(x, t, u)$ 是作用于函数空间上的一个运算子，对任意的函数 $a(x, t, u)$，Φa 仍然是一个函数．

命题 1 对任意的运算子 $\Phi(x, t, u)$ 和任意的函数 $a(x, t, u)$，$b(x, t, u)$，

$$(\Phi a)'b=\Phi'[b]a+\Phi\circ a'b. \tag{5-2-1}$$

证明 根据定义，

$$\begin{aligned}(\Phi a)'b&=\frac{d}{d\varepsilon}(\Phi(u+\varepsilon b)a(u+\varepsilon b))\big|_{\varepsilon=0}\\&=\left(\frac{d}{d\varepsilon}\Phi(u+\varepsilon b)\right)a(u+\varepsilon b)\big|_{\varepsilon=0}\\&\quad+\Phi(u+\varepsilon b)\frac{d}{d\varepsilon}a(u+\varepsilon b)\big|_{\varepsilon=0}\\&=\Phi'[b]a+\Phi\circ a'b.\end{aligned}$$

定义 1 运算子 $\Phi(x, t, u)$ 称为方程(5-1-1)的一个强对称(Strong Symmetry)，如果它使(5-1-1)的对称变为对称．也就是说，若 $\sigma(x, t, u)$ 是(5-1-1)的对称，则 $\Phi\sigma$ 也是(5-1-1)的对称．

命题 2 $\Phi(x, t, u)$ 是(5-1-1)的一个强对称，如果它满足

$$\frac{d\Phi}{dt}=[K', \Phi], \tag{5-2-2}$$

其中 $[K', \Phi]=K'\circ\Phi-\Phi\circ K'$．

证明 设 σ 是(5-1-1)的一个对称，即

$$\frac{d\sigma}{dt}=K'\sigma,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d(\Phi\sigma)}{dt}&=\frac{d\Phi}{dt}\cdot\sigma+\Phi\circ\frac{d\sigma}{dt}\\&=[K', \Phi]\sigma+\Phi K'\sigma\end{aligned}$$

$$=K'(\Phi\sigma),$$

$\Phi\sigma$ 也是(5-1-1)的对称. 所以, Φ 是(5-1-1)的强对称. 显然, 条件(5-2-2)也可以表示为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Phi'[K]=[K',\Phi]. \tag{5-2-3}$$

特别, 若 Φ 不显含 t, 则(5-2-3)就简化为

$$\Phi'[K]=[K',\Phi].$$

例 1 $$\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$$

是 KdV 方程(5-1-7)的一个强对称, 因为,

$$\Phi'[K]=4K+2K_xD^{-1}$$
$$=4(u_{xxx}+6uu_x)+2(u_{xxxx}+6uu_{xx}+6u_x^2)D^{-1},$$
$$[K',\Phi]=(D^3+6uD+6u_x)\circ(D^2+4u+2u_xD^{-1})$$
$$-(D^2+4u+2u_xD^{-1})\circ(D^3+6uD+6u_x),$$

直接计算即可得到

$$\Phi'[K]=[K',\Phi].$$

又因为 Φ 不显含 t, 所以 Φ 是(5-1-7)的强对称.

不难看出, 上节例 1 中所提到的 KdV 方程(5-1-7)的四个对称 K_0, K_1, τ_0 和 τ_2 之间存在下列关系:

$$K_1=\Phi K_0,$$
$$\tau_1=\Phi\tau_0,$$

即 K_1 和 τ_1 可以由 K_0 和 τ_0 通过强对称 Φ 生成. 事实上, 方程的任一个对称经由强对称可以生成无穷个对称. 对 KdV 方程(5-1-7), 由 K_0, τ_0 和强对称 Φ 就可以生成下列两组无穷个对称:

$$K_n=\Phi^nK_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$\tau_n=\Phi^n\tau_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$(\Phi^0=I).$$

例 2 $$\Phi=\frac{1}{g}(D^2+4(u-xf)+2(u_x-f)D^{-1})$$

是 GKdV 方程(5-1-10)的一个强对称. 由

$$\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{g'}{g^2}(D^2+4(u-xf)+2(u_x-f)D^{-1})$$
$$+\frac{1}{g}(4(u_t-xf')+2(u_{xt}-f')D^{-1})$$
$$=\frac{1}{g}(-12f\Phi+4(u_{xxx}+6uu_x+6fu-12xf^2)$$
$$+2(u_{xxxx}+6uu_{xx}+6u_x^2+6fu_x-12f^2)D^{-1},$$
$$[K',\ \Phi]=(D^3+6uD+6u_x+6f)$$
$$\circ(D^2+4(u-xf)+2(u_x-f)D^{-1})$$
$$-(D^2+4(u-xf)+2(u_x-f)D^{-1})$$
$$\circ(D^3+6uD+6u_x+6f),$$

直接计算即可得到(见章末[1])

$$\frac{d\Phi}{dt}=[K',\ \Phi].$$

由上节例 2 中的对称 K_0 和 τ_0($K_1=\Phi K_0$, $\tau_1=\Phi\tau_0$), 利用强对称 Φ 也能生成 GKdV 方程(5-1-10)的两组对称:

$$K_n=\Phi^n K_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$\tau_n=\Phi^n\tau_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

当 $f=0$, 则 $g=1$, 这就归结为本节例 1 中所讨论的 KdV 方程(5-1-7)的情形. 当 $f=-\frac{1}{12t}$, $g=-\frac{1}{12t}$, 这就归结为 GKdV 方程(5-1-11)的情况. 这时, 强对称 Φ 为

$$\Phi=-\frac{1}{12t}\left(D^2+4\left(u+\frac{x}{12t}\right)+2\left(u_x+\frac{1}{12t}\right)D^{-1}\right).$$

从本节例 1 中可以看到, KdV 方程(5-1-7)的右端 $K=K_1$. 这样, KdV 方程可理解为

$$u_t=K_1.$$

它可以看作由一个最简单的方程

$$u_t=K_0(=u_x) \tag{5-2-4}$$

的右端经 Φ 的作用得到. 并且, 我们容易证明 Φ 也是(5-2-4)的

强对称．进一步我们考虑下列两族方程：

$$u_t=K_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{5-2-5}$$

$$u_t=\tau_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{5-2-6}$$

讨论它们之间内在联系．对(5-2-5)已有许多讨论，并称之为KdV方程族．对(5-2-6)的讨论近来也受到重视，称之为新KdV方程族．上述问题不仅是对KdV方程，对许多具有强对称的方程也有类似情形．为进行较一般性讨论，先引进算子的遗传性概念．

2.2 遗传性

定义 2 运算子 $\Phi(x,\ t,\ u)$ 称为具有遗传性的，如果对任意的函数 $f(x,\ t,\ u)$ 和 $g(x,\ t,\ u)$，都有

$$\Phi'[\Phi f]g-\Phi'[\Phi g]f=\Phi(\Phi'[f]g-\Phi'[g]f). \tag{5-2-7}$$

具有遗传性的算子常称为遗传对称(Hereditary Symmetry)．要注意，遗传性是算子本身的性质，它是独立于方程的，只是常常要考虑强对称的遗传性．具有遗传性的强对称称为遗传强对称，它具有特别的重要性．遗传的含义似乎可以反映在下述命题中．

命题 3 设 Φ 是方程 $u_t=K(x,\ t,\ u)$ 的一个遗传强对称，且不显含 t，$\Phi 0=0$，则 Φ 是下列方程族

$$u_t=\Phi^n K,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

中所有方程的强对称．

证明 由于遗传性是与方程无关的，我们只要证明 Φ 是方程

$$u_t=\Phi K$$

的强对称，即 Φ 满足方程

$$\frac{d\Phi}{dt}=[(\Phi K)',\ \Phi].$$

又因为 Φ 不显含 t，只要证明

$$(\Phi'[\Phi K]-[(\Phi K)',\ \Phi])a=0$$

对任意的函数 $a(x,\ t,\ u)$ 成立．

由本节命题 1 和 Φ 的遗传性,

$$
\begin{aligned}
&[(\Phi K)',\ \Phi]a \\
&=(\Phi K)\circ\Phi a-\Phi\circ(\Phi K)'a \\
&=\Phi'[\Phi a]K+\Phi K'\Phi a-\Phi\Phi'[a]K-\Phi\Phi K'a \\
&=\Phi'[\Phi a]K-\Phi'[\Phi K]a-\Phi\Phi'[a]K+\Phi\Phi'[K]a \\
&\quad+\Phi'[\Phi K]a+\Phi_0[K',\ \Phi]a-\Phi\Phi'[K]a \\
&=\Phi'[\Phi K]a+\Phi([K',\ \Phi]-\Phi'[K])a.
\end{aligned}
$$

又由 Φ 是方程 $u_t=K$ 的强对称的假设,

$$([K',\ \Phi]-\Phi'[K])a=0.$$

于是,
$$(\Phi'[\Phi K]-[(\Phi K)',\ \Phi])a=0,$$
Φ 是方程 $u_t=\Phi K$ 的强对称.

例 3　运算子

$$\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$$

具有遗传性.

证明　对任意的函数 $f(x,\ t,\ u)$ 和 $g(x,\ t,\ u)$,

$$\Phi f=f_{xx}+4uf+2u_xD^{-1}f,$$

$$
\begin{aligned}
\Phi'[\Phi f]g&=(4\Phi f+2(\Phi f)_xD^{-1})g \\
&=4(f_{xx}g+4ufg+2u_xD^{-1}fg) \\
&\quad+2(f_{xxx}+4u_xf+4uf_x+2u_{xx}D^{-1}f+2u_xf)D^{-1}g,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi'[\Phi f]g-\Phi'[\Phi g]f \\
&=4(f_{xx}g-g_{xx}f)+2(f_{xxx}D^{-1}g-g_{xxx}D^{-1}f) \\
&\quad+8u(f_xD^{-1}g-g_xD^{-1}f)+4u_x(fD^{-1}g-gD^{-1}f),
\end{aligned}
$$

$$\Phi'[f]g=4fg+2f_xD^{-1}g,$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\Phi'[f]g-\Phi'[g]f) \\
&=2(D^2+4u+2u_xD^{-1})(f_xD^{-1}g-g_xD^{-1}f) \\
&=2(f_{xxx}D^{-1}g-g_{xxx}D^{-1}f)+4(f_{xx}g-g_{xx}f) \\
&\quad+8u(f_xD^{-1}g-g_xD^{-1}f)+4u_x(D^{-1}(f_xD^{-1}g)-D^{-1}(g_xD^{-1}f)).
\end{aligned}
$$

由
$$D^{-1}(f_xD^{-1}g)=fD^{-1}g-D^{-1}(fg),$$

就得到

$$\Phi'[\Phi, f]g-\Phi'[\Phi g]f=\Phi(\Phi'[f]g-\Phi'[g]f), \quad (5\text{-}2\text{-}8)$$

所以，Φ 具有遗传性.

注意，Φ 中的 u 是一个任意函数，它并不与任何的具体方程相联系. 等式(5-2-8)是对任意的 f, g 和 u 成立的.

特别，对方程 $u_t=u_x$ 和 KdV 方程(5-1-7)，Φ 是一个遗传强对称. 由本节命题 3，Φ 是 KdV 方程族中所有方程的强对称. 在证明了 $\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$ 的遗传性以后，要证明 Φ 是 KdV 族全体方程的强对称，只要证明它是 $u_t=u_x$ 的强对称就够了. 这只须证明

$$\Phi'[u_x]=[(u_x)', \Phi],$$

即

$$4u_x+2u_{xx}D^{-1}=[D, D^2+4u+2u_xD^{-1}].$$

这比在本节例 1 中要做的容易得多.

遗传性对强对称是很重要的，但是，验证遗传性的条件往往比较麻烦. 下面将对遗传性作进一步的讨论，以便运用.

命题 4　运算子 Φ 具有遗传性必须且只须

$$\Phi^2[f, g]+[\Phi f, \Phi g]=\Phi([\Phi f, g]+[f, \Phi g]). \quad (5\text{-}2\text{-}9)$$

事实上，(5-2-9)只是(5-2-7)的不同写法，将(5-2-9)展开就能化为(5-2-7).

命题 5　设 $\Phi(x, t, u)$ 为任意的一个运算子，$\sigma_0(x, t, u)$ 为一任意函数，则

$$\Phi'[\sigma_0]=[\sigma_0', \Phi]$$

必须且只须

$$\Phi[\sigma_0, a]=[\sigma_0, \Phi a] \quad (5\text{-}2\text{-}10)$$

对任意的函数 $a(x, t, u)$ 成立. 条件(5-2-10)常称为 Φ 与 σ_0 是交换的.

证明　因为，

$$\Phi[\sigma_0, a]=\Phi\circ\sigma_0'a-\Phi\circ a'\sigma_0,$$

$$[\sigma_0, \Phi a] = \sigma_0' \circ \Phi a - (\Phi a)'\sigma_0$$
$$= \sigma_0' \circ \Phi a - \Phi'[\sigma_0] \circ a - \Phi \circ a'\sigma_0,$$

所以，　$\Phi[\sigma_0, a] - [\sigma_0, \Phi a] = (\Phi'[\sigma_0] - [\sigma_0, \Phi])a$

对任意的函数 a 成立．命题得证．

命题 6　若 $\Phi(x, t, u)$ 是一个具有遗传性的运算子且与 $\sigma_0(x, t, u)$ 交换(即 $\Phi[\sigma_0, a] = [\sigma_0 \Phi a]$)，$\Phi 0 = 0$，则 Φ 与所有的 $\sigma_n = \Phi^n \sigma_0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 都是交换的，即

$$\Phi[\sigma_n, a] = [\sigma_n, \Phi a]$$

对任意的函数 $a(x, t, u)$ 成立．

证明　只要证明 Φ 与 σ_1 交换，即

$$\Phi[\sigma_1, a] = [\sigma_1, \Phi a]$$

对任意的函数 a 成立．因为，

$$\Phi[\sigma_1, a] = \Phi[\Phi\sigma_0, a] = \Phi(\Phi'[a]\sigma_0 + \Phi\sigma_0' a - a'\Phi\sigma_0),$$
$$[\sigma_1, \Phi a] = [\Phi\sigma_0, \Phi a] = (\Phi\sigma_0)'(\Phi a) - (\Phi a)'(\Phi\sigma_0)$$
$$= \Phi'[\Phi a]\sigma_0 + \Phi\sigma_0'\Phi a - \Phi'[\Phi\sigma_0]a - \Phi a'\Phi\sigma_0,$$

所以，　$\Phi[\sigma, a] - [\sigma_1, \Phi a] = \Phi'[\Phi\sigma_0]a - \Phi'[\Phi a]\sigma$
$$+ \Phi(\Phi'[a]\sigma_0 - \Phi'[\sigma_0]a)$$
$$+ \Phi(\Phi'[\sigma_0] - [\sigma_0', \Phi])a.$$

根据 Φ 的遗传性和与 σ_0 交换的假设，由本节命题 5,

$$\Phi[\sigma_1, a] - [\sigma_1, \Phi a] = 0$$

对任意的函数 a 成立．

由本节命题 5，此命题又可以改写为：

命题 7　若 Φ 是具有遗传性的运算子，$\Phi_0 = 0$，σ_0 为一函数，且

$$\Phi'[\sigma_0] = [\sigma_0', \Phi], \tag{5-2-11}$$

则

$$\Phi'[\sigma_n] = [\sigma_n', \Phi], \tag{5-2-12}$$

其中 $\sigma_n = \Phi^n \sigma_0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$．

当 Φ 不显含 t 时，(5-2-11) 和 (5-2-12) 分别为 Φ 是方程 $u_t=\sigma_0$ 和 $u_t=\sigma_n$ 的强对称的条件．因此，条件(5-2-11)和 Φ 的遗传性就保证了 Φ 是所有的方程 $u_t=K_n(n=0,\ 1,\ \cdots)$ 的强对称．

2.3 强对称与Lax对的关系

对一个给定的方程，强对称是否存在？如何求得它的强对称？这些问题并没有彻底解决，强对称和 Lax 对有着密切的关系，我们将通过下面的例子来具体说明

例 4 我们知道，KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x \tag{5-1-7}$$

有一个 Lax 对

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-u & 0\end{pmatrix}dx+\begin{pmatrix}-u_x & 4\lambda+2u\\ (4\lambda+2u)(\lambda-u)-u_{xx} & +u_x\end{pmatrix}dt$$

$$\equiv Mdx+Ndt$$

(λ 为任意常数)，即

$$d\Omega-\Omega\wedge\Omega=0$$

必须且只须(5-1-7)成立．也就是说，KdV 方程(5-1-7)可以看作是下列线性方程

$$V_x=MV,\ V_t=NV \tag{5-2-13}$$

$\left(V=\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}\right)$ 的可积条件．

令 $v_1=\varphi$，则 $v_2=\varphi_x$，(5-2-13)可归结为

$$\varphi_{xx}+u\varphi=\lambda\varphi, \tag{5-2-14}$$

$$\varphi_t=u_x\varphi+(2u+4\lambda)\varphi_x. \tag{5-2-15}$$

KdV 方程(5-1-7)则是 $\varphi_{xxt}=\varphi_{txx}$ 成立的条件．令

$$\sigma=(\varphi^2)_x=2\varphi\varphi_x, \tag{5-2-16}$$

则由(5-2-15)、(5-2-14)即可得到 σ 满足的方程

$$\sigma_t=\sigma_{xxx}+6u\sigma_x+6u_x\sigma, \tag{5-2-17}$$

即 $\sigma_t=K'\sigma$．而由方程(5-2-14)则可得到

$$(D^2+4u+2u_xD^{-1})\sigma=4\lambda\sigma, \tag{5-2-18}$$

即 $\Phi\sigma=4\lambda\sigma$, $\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$ 为(5-1-7)的强对称.

可见,变换 $\sigma=(v^2)_x$ 将 Lax 方程(5-2-14)和(5-2-15)化为

$$\Phi\sigma=4\lambda\sigma, \tag{5-2-18}$$

$$\sigma_t=K'\sigma. \tag{5-2-17}$$

这就给出了 Lax 对与强对称、对称之间的联系. (5-2-17)说明了 σ 是(5-1-7)的一个对称, (5-2-18)则说明了 σ 是 Φ 的一个特征函数. 将(5-2-18)对 t 求导数,并将(5-2-17)代入,就能得到

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}-[K',\ \Phi]\right)\sigma=0.$$

例 5 设

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-u & 0\end{pmatrix}dx+\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}dt$$

(λ 为任意常数, A, B 和 C 为任意函数), 则 $d\Omega-\Omega\wedge\Omega=0$ 必须且只须

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-u & 0\end{pmatrix}_t-\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}_x+\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda-u & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}\right]$$
$$=0,$$

即

$$A_x=C-(\lambda-u)B, \tag{5-2-19}$$

$$B_x=-2A, \tag{5-2-20}$$

$$u_t+C_x=2(\lambda-u)A. \tag{5-2-21}$$

由(5-2-20)和(5-2-19),

$$A=-\frac{1}{2}B_x,$$
$$C=A_x+(\lambda-u)B$$
$$=-\frac{1}{2}B_{xx}+(\lambda-u)B,$$

于是,(5-2-21)就归结为演化方程

$$u_t=\frac{1}{2}B_{xxx}+u_xB-2(\lambda-u)B_x$$
$$\equiv K. \tag{5-2-22}$$

希望能选取适当的 B，使(5-2-22)中不含有 λ. 设

$$B=\sum_{i=0}^{n}B_i\lambda^{n-i},$$

并将它代入 K,

$$\begin{aligned}K&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}B_{i,xxx}\lambda^{n-i}+\sum_{i=0}^{n}u_xB_i\lambda^{n-i}+2u\sum B_{i,x}\lambda^{n-i}\\&-2\sum_{i=0}^{n}B_{i,x}\lambda^{n-i+1}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}B_{i,xxx}+u_xB_i+2uB_{i,x}\right)\lambda^{n-i}\\&-2\sum_{i=0}^{n-1}B_{i+1,x}\lambda^{n-i}-2B_{0,x}\lambda^{n+1}\\&=\frac{1}{2}B_{n,xxx}+u_2B_n+2uB_{n,x}\\&\quad+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}B_{i,xxx}+u_xB_i+2uB_{i,x}-2B_{i+1,x}\right)\lambda^{n-i}\\&\quad-2B_{0,x}\lambda^{n+1}.\end{aligned}$$

K 中不含有 λ 必须且只须

$$B_{0,x}=0, \tag{5-2-23}$$

$$\begin{aligned}B_{i+1,x}&=\frac{1}{4}(B_{i,xxx}+4uB_{i,x}+2u_xB_i)\\&=\Phi B_{i,x},\qquad i=0,1,\cdots,n-1,\end{aligned} \tag{5-2-24}$$

其中 $\Phi=\frac{1}{4}(D^2+4u+2u_xD^{-1})$. 这时，演化方程(5-2-22)就归结为

$$u_t=K_n, \tag{5-2-25}$$

$$K_n=\Phi B_{n,x},\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{5-2-26}$$

其中 $B_{n,x}$ 可以按递推公式(5-2-24)和(5-2-25)确定. 按递推关系(5-2-24)就得到

$$K_n=\Phi K_{n-1}=\cdots=\Phi^nK_0,\ K_0=B_{1,x}.$$

当 $n=0$，由 $B_{0,x}=0$，可取 $B_0=4$，于是由 (5-2-24) 就得到 $B_{1,x}=u_x$，即

$$K_0=u_x.$$

(5-2-25)就归结为

$$u_t=\Phi^n K_0,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

这就是前面讨论过的 KdV 方程族. 在这里，Φ 是作为递推算子出现的. 所以，强对称又常称为递推算子(Recurrsion Operator). 通过递推算子 Φ 可以确定 B_i，这就确定了 B(λ 的多项式)，从而确定 A 和 C. 这就是说，Lax 对也同时随之而确定.

进一步，若考虑 λ 依赖于 t，即 $\lambda=\lambda(t)$，$\lambda'(t)\neq 0$，并设

$$\lambda_t=\sum_{i=0}^{n}k_i\lambda^{n-i}.$$

这时，(5-2-21)应改为

$$u_t-\lambda_t+C_x=2(\lambda-u)A,$$

即有
$$u_t=\frac{1}{2}B_{xxx}+u_xB-2(\lambda-u)B_x+\lambda_t.$$

类似于前面的讨论就能得到

$$B_{0,x}=0,$$

$$B_{i+1,x}=\Phi B_{i,x}+\frac{1}{2}k_i,$$

以及
$$u_t=K_n,$$

$$K_n=\Phi B_{n,x}+\frac{1}{2}k_n,\quad n=0,\ 1,\ \cdots.$$

特别，若取 $B_0=12t(B_{0,x}=0)$，$k_0=1$，$k_1=\cdots=k_n=0$，

则有
$$B_{1,x}=3tu_x+\frac{1}{2}$$

以及
$$K_n=\Phi^n\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

这就得到新 KdV 方程族

$$u_t=\Phi^n\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right),\quad n=0,\ 1,\ 2\cdots.$$

§3 换位子、李代数

在上一节中，我们已经介绍了如何由已知的对称通过强对称来生成新的对称．在这一节中，我们将介绍另一个途径，由已知的对称通过换位运算来生成新的对称，并进一步讨论对称对这个换位运算所构成的李代数．

3.1 对称之间的换位子

换位运算在前两节中已有说明，为了系统地叙述并强调它的重要性，现在重述它的定义．

定义 设 $a(x, t, u)$ 和 $b(x, t, u)$ 为任意的函数，

$$[a, b]=a'b-b'a$$

称为 a 和 b 的换位子．

命题1 对任意的函数 a, b, c 和任意的常数 λ, μ,

$$[a, b]=-[b, a], \tag{5-3-1}$$

$$[\lambda a+\mu b, c]=\lambda[a, c]+\mu[b, c], \tag{5-3-2}$$

$$[[a, b], c]+[[b, c], a]+[[c, a], b]=0. \tag{5-3-3}$$

证明 (5-3-1) 和 (5-3-2) 由定义即可立即得到，下面证明 (5-3-3)．根据本节定义和 §2 中命题 1,

$$\begin{aligned}[[a, b], c]&=[a'b-b'a, c]\\&=(a'b)'c-(b'a)'c-c'(a'b)+c'(b'a)\\&=(a')'[c]b+a'b'c-(b')'[c]a-b'a'c-c'a'b+c'b'a.\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}[[b, c], a]&=(b')'[a]c+b'c'a-(c')'[a]b\\&\quad-c'b'a-a'b'c+a'c'b,\\ [[c, a], b]&=(c')'[b]a+c'a'b-(a')'[b]c\\&\quad-a'c'b-b'c'a+b'a'c.\end{aligned}$$

由本章 §1中命题 4,

$$(a')'[b]c=(a')'[c]b,$$

$$(b')'[c]a=(b')'[a]c,$$

$$(c')'[a]b=(c')'[b]a,$$

所以，$$[[a, b], c]+[[b, c], a]+[[c, a], b]=0.$$

由此可知，全体函数对上述线性运算和换位运算构成一李代数．(5-3-3)称为 Jacobi 等式，上述换位运算也常称为李乘积．

对于一个任意给定的方程，显然，它的任意两个对称的线性组合也是对称．以下我们证明，两个对称的换位子一定是对称．

命题 2 对任意的函数 $a(x, t, u)$ 和 $b(x, t, u)$，

$$\frac{d(a'b)}{dt}=\left(\frac{da}{dt}\right)'b.$$

证明 根据定义，

$$\begin{aligned}\left(\frac{da}{dt}\right)'b&=\frac{d}{d\varepsilon}\frac{da}{dt}(a+\varepsilon b)\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\frac{d}{d\varepsilon}\frac{d}{dt}(a+\varepsilon a'b+\cdots)\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\frac{d(a'b)}{dt}.\end{aligned}$$

命题 3 设 $\sigma_1(x, t, u)$ 和 $\sigma_2(x, t, u)$ 是方程

$$u_t=K(x, t, u) \tag{5-1-1}$$

的对称，则 $\sigma=[\sigma_1, \sigma_2]$ 也是它的对称．

证明 根据假设和对称的定义，

$$\frac{d\sigma_1}{dt}=K'\sigma_1,\quad \frac{d\sigma_2}{dt}=K'\sigma_2.$$

应用本节命题 2，

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt}&=\frac{d}{dt}[\sigma_1, \sigma_2]\\&=\frac{d(\sigma_1'\sigma_2)}{dt}-\frac{d(\sigma_2'\sigma_1)}{dt}\\&=\left(\frac{d\sigma_1}{dt}\right)'\sigma_2-\left(\frac{d\sigma_2}{dt}\right)'\sigma_1\end{aligned}$$

$$=(K'\sigma_1)'\sigma_2-(K'\sigma_2)'\sigma_1$$
$$=(K')'[\sigma_2]\sigma_1+K'\sigma_1'\sigma_2-(K')'[\sigma_1]\sigma_2-K'\sigma_2'\sigma_1,$$

再应用§1中命题4,

$$\frac{d\sigma}{dt}=K'\sigma_1'\sigma_2-K'\sigma_2'\sigma_1$$
$$=K'[\sigma_1,\ \sigma_2]=K'\sigma.$$

所以,σ 是(5-1-1)的对称.

例 KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x.$$

已经知道它的对称 $K_0=u_x$, $K_1=u_t$, $\tau_0=3tu_x+\frac{1}{2}$ 和 $\tau_1=3tu_t+xu_x+2u$. 这时,

$$[K_0,\ K_1]=K_0'K_1-K_1'K_0$$
$$=u_{xt}-u_{tx}=0, \tag{5-3-4}$$

$$[K_0,\ \tau_0]=\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right)_x-3t(u_x)_x$$
$$=0, \tag{5-3-5}$$

$$[K_1,\ \tau_0]=\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right)_t-3t(u_t)_x$$
$$=3u_x=3K_0, \tag{5-3-6}$$

$$[\tau_0,\ \tau_1]=3t(3tu_t+xu_x+2u)_x-3t\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right)_t$$
$$-x\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right)_x-2\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right)$$
$$=-6tu_x-1$$
$$=-2\tau_0. \tag{5-3-7}$$

以上各式展示了 K_0, K_1, τ_0 和 τ_1 这四个对称相互作换位运算的效果(零可看成是一个平凡的对称),也反映了与它们相应的单参数变换的换位运算的结果.(5-3-4)说明了沿 x 轴的平移和沿 t 轴的平移是交换的;(5-3-5)则说明了沿 x 轴的平移和伽利略

变换也是交换的，(5-3-6)说明了沿 t 轴的平移和伽利略变换是不交换的，先后次序的不同相差的是一个沿 x 轴的平移. (5-3-7)则说明了伽利略变换和标量变换也是不交换的，先后次序不同相差的则是一个伽利略变换. 以上事实也不难直接验证.

3.2 对称的李代数结构

由此可知，对一个给定的方程，寻找它的对称并研究其李代数结构是十分重要的，今以 KdV 方程(5-1-7)为例作系统讨论.

由本章前两节的讨论已经知道，KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x \tag{5-1-7}$$

有一个遗传强对称

$$\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$$

和两组对称：

$$K_n=\Phi^nK_0,\ K_0=u_x,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$\tau_n=\Phi^n\tau_0,\ \tau_0=3tu_x+\frac{1}{2},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$\left(\tau_n=3t\,K_n+\Phi^n\dfrac{1}{2}\right)$. 现在讨论由 K_n 和 $\tau_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$所生成的李代数的结构，先证明下列两个关键性的引理.

引理 1

$$\Phi'[K_n]=[K_n',\ \Phi].\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{5-3-8}$$

证明 容易验证，

$$\Phi'[K_1]=[K_0',\ \Phi].$$

由 Φ 的遗传性和§2 中命题7，(5-3-8)成立.

引理 2

$$\Phi'[\tau_n]=[\tau_n',\ \Phi]+2\Phi^n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{5-3-9}$$

证明 对 n 作归纳法. 当 $n=0$,

$$\Phi'[\tau_0]=3t\Phi'[K_0]+\Phi'\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$=3t\Phi'[K_0]+2I,$$

$$[\tau_0', \Phi]=3t[K_0', \Phi].$$

于是，由本节引理1，

$$\Phi'[\tau_0]=[\tau_0', \Phi]+2I,$$

即(5-3-9)当 $n=0$ 时成立．设(5-3-9)对 $n-1$ 时成立，即

$$\Phi'[\tau_{n-1}]=[\tau_{n-1}', \Phi]+2\Phi^{n-1}(n>1),$$

则对任意的函数 v，

$$\begin{aligned}
&(\Phi'[\tau_n]-[\tau_n', \Phi])v \\
&=\Phi'[\tau_n]v-[\tau_n', \Phi]v \\
&=\Phi'[\Phi\tau_{n-1}]v-\tau_n'\Phi v+\Phi\tau_n'v \\
&=\Phi'[\Phi\tau_{n-1}]v-(\Phi\tau_{n-1})'\Phi v+\Phi(\Phi\tau_{n-1})'v \\
&=\Phi'[\Phi\tau_{n-1}]v-\Phi'[\Phi v]\tau_{n-1}-\Phi\tau_{n-1}'\Phi v+\Phi\Phi'[v]\tau_{n-1} \\
&\quad+\Phi\Phi'\tau_{n-1}'v.
\end{aligned}$$

由 Φ 的遗传性，上式等于

$$\begin{aligned}
&\Phi(\Phi'[\tau_{n-1}]v-\Phi'[v]\tau_{n-1})-\Phi(\tau_{n-1}'\Phi v+\Phi\Phi'[v]\tau_{n-1})+\Phi\Phi\tau_{n-1}'v \\
&=\Phi(\Phi'[\tau_{n-1}]-[\tau_{n-1}', \Phi])v.
\end{aligned}$$

又由归纳法假设，

$$(\Phi'[\tau_n]-[\tau_n', \Phi])v=2\Phi^n v,$$

即
$$(\Phi'[\tau_n]-[\tau_n', \Phi]-2\Phi^n)v=0$$

对任意的函数 v 成立．所以，

$$\Phi'[\tau_n]=[\tau_n', \Phi]+2\Phi^n,$$

引理2得证．

定理1 KdV 方程 (5-1-7) 的两组对称 K_n 和 $\tau_n(n=0, 1, 2, \cdots)$ 满足下列李代数关系：

(i) $$[K_m, K_n]=0, \tag{5-3-10}$$

(ii) $$[K_m, \tau_n]=(2m+1)K_{m+n-1}, \tag{5-3-11}$$

(iii) $$[\tau_m, \tau_n]=2(m-n)\tau_{m+n-1}, \tag{5-3-12}$$

$$(m, n=0, 1, 2, \cdots, K_{-1}=0=\tau_{-1}).$$

证明 (见本章末[5])

(i) 因为所有的 $K_m(m=0, 1, 2, \cdots)$ 都是方程(5-1-7),即

$$u_t=K_1$$

的对称,且都不显含 t,所以

$$[K_m, K_1]=0,$$

$m=0, 1, 2, \cdots$. 又

$$\begin{aligned}[K_m, K_n]&=[K_m, \Phi K_{n-1}]\\&=K'_m\Phi K_{n-1}-(\Phi K_{n-1})'K_m\\&=K'_m\Phi K_{n-1}-\Phi'[K_m]K_{n-1}-\Phi K'_{n-1}K_m,\end{aligned}$$

由本节引理 1,

$$\begin{aligned}[K_m, K_n]&=K'_m\Phi K_{n-1}-[K'_m, \Phi]K_{n-1}-\Phi K'_{n-1}K_m\\&=\Phi[K_m, K_{n-1}].\end{aligned}$$

于是,对 n 作归纳法即可证得

$$[K_m, K_n]=0,$$

$m=0, 1, 2, \cdots$; $n=1, 2, \cdots$. 上述等式加上 $[K_0, K_0]=0$ 这一显然的等式就得到(5-3-10).

(ii) 先证明 $[K_0, \tau_n]=K_{n-1}$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 对 n 作归纳法. 当 $n=0$,

$$[K_0, \tau_0]=0.$$

假设 $[K_0, \tau_{n-1}]=K_{n-2}$,则

$$\begin{aligned}[K_0, \tau_n]&=[K_0, \Phi\tau_{n-1}]\\&=K'_0\Phi\tau_{n-1}-(\Phi\tau_{n-1})'K_0\\&=K'_0\Phi\tau_{n-1}-\Phi'[K_0]\tau_{n-1}-\Phi\tau'_{n-1}K_0.\end{aligned}$$

根据本节引理 1 和归纳法假设,

$$\begin{aligned}[K_0, \tau_n]&=K'_0\Phi\tau_{n-1}-[K'_0, \Phi]\tau_{n-1}-\Phi\tau'_{n-1}K_0\\&=\Phi[K_0, \tau_{n-1}]=\Phi K_{n-2}=K_{n-1}.\end{aligned}$$

再证 $[K_m, \tau_n]=(2m+1)K_{m+n-1}$. 对 m 作归纳法, $m=0$ 时,前面已证明等式成立. 假设等式对 $m-1$ 成立,即

$$[K_{m-1}, \tau_n]=(2m-1)K_{m+n-2}.$$

又
$$\begin{aligned}[K_m, \tau_n]&=[\Phi K_{m-1}, \tau_n]\\ &=(\Phi K_{m-1})'\tau_n-\tau_n'(\Phi K_{m-1})\\ &=\Phi'[\tau_n]K_{m-1}+\Phi K_{m-1}'\tau_n'-\tau_n'\Phi K_{m-1}.\end{aligned}$$

根据本节引理 2 和归纳法假设,

$$\begin{aligned}[K_m, \tau_n]&=[\tau_n', \Phi]K_{m-1}+2\Phi''K_{m-1}+\Phi K_{m-1}'\tau_n-\tau_n'\Phi K_{m-1}\\ &=\Phi[K_{m-1}, \tau_n]+2\Phi''K_{m-1}\\ &=(2m-1)\Phi K_{m+n-2}+2K_{m+n-1}\\ &=(2m+1)K_{m+n-1},\end{aligned}$$

所以,
$$[K_m, \tau_n]=(2m+1)K_{m+n-1}$$
$(m, n=0, 1, 2, \cdots)$.

(iii) 先证明$[\tau_m, \tau_0]=2\tau_{m-1}$, $m=0, 1, 2, \cdots$. 对 m 作归纳法. 当 $m=0$ 和 1 时,

$$[\tau_0, \tau_0]=0=2\tau_{-1},$$
$$[\tau_1, \tau_0]=2\tau_0.$$

假设等式对 $m-1(\geqslant 0)$ 成立, 即

$$[\tau_{m-1}, \tau_0]=2(m-1)\tau_{m-2}.$$

而
$$\begin{aligned}[\tau_m, \tau_0]&=[\Phi\tau_{m-1}, \tau_0]\\ &=(\Phi\tau_{m-1})'\tau_0-\tau_0'\Phi\tau_{m-1}\\ &=\Phi'[\tau_0]\tau_{m-1}+\Phi\tau_{m-1}'\tau_0-\tau_0'\Phi\tau_{m-1},\end{aligned}$$

根据本节引理 2 和归纳法假设,

$$\begin{aligned}[\tau_m, \tau_0]&=[\tau_0', \Phi]\tau_{m-1}+2\tau_{m-1}+\Phi\tau_{m-1}'\tau_0-\tau_0'\Phi\tau_{m-1}\\ &=\Phi[\tau_{m-1}, \tau_0]+2\tau_{m-1}\\ &=2(m-1)\Phi\tau_{m-2}+2\tau_{m-1}\\ &=2m\tau_{m-1}.\end{aligned}$$

再证$[\tau_m, \tau_n]=2(m-n)\tau_{m+n-1}$. 对 n 作归纳法, 前面已经证明当 $n=0$ 时等式成立. 假设等式对 $n-1$ 成立, 即

$$[\tau_m, \tau_{n-1}]=2(m-n+1)\tau_{m+n-2},$$

又 $$[\tau_m, \tau_n] = [\tau_m, \Phi\tau_{n-1}]$$
$$= \tau'_m\Phi\tau_{n-1} - (\Phi\tau_{n-1})'\tau_m$$
$$= \tau'_m\Phi\tau_{n-1} - \Phi'[\tau_m]\tau_{n-1} - \Phi\tau'_{n-1}\tau_m.$$

由本节引理 2 和归纳法假设,

$$[\tau_m, \tau_n] = \tau'_m\Phi\tau_{n-1} - [\tau'_m, \Phi]\tau_{n-1} - 2\Phi^m\tau_{n-1} - \Phi\tau'_{n-1}\tau_m$$
$$= \Phi[\tau_m, \tau_{n-1}] - 2\Phi^m\tau_{n-1}$$
$$= 2(m-n+1)\Phi\tau_{m+n-2} - 2\tau_{m+n-1}$$
$$= 2(m-n)\tau_{m+n-1}.$$

(5-3-12)得证.

由定理 1, 在全体 K_n 和 $\tau_n(n=0, 1, 2, \cdots)$中, 只要有了 K_0, K_1, τ_0, τ_1, τ_2 和 τ_3, 其余的就可以由它们通过换位运算来生成:

$$K_n = \frac{1}{2n-1}[K_{n-1}, \tau_2], \quad n>1, \tag{5-3-13}$$

$$\tau_n = \frac{1}{2(n-3)}[\tau_{n-1}, \tau_2], \quad n>3. \tag{5-3-14}$$

K_0, K_1, τ_0, τ_1, τ_2 和 τ_3 通常称为种子(Seed)对称, 这也就为我们寻找对称提示了又一个途径, 即先找出若干个种子对称, 然后按照(5-3-13)和(5-3-14)的方式去生成其它的对称, 特别是对那些难以找到强对称的方程.

进一步考虑 KdV 方程族

$$u_t = K_l, \ l=0, 1, 2, \cdots. \tag{5-3-15}$$

我们已经知道, $\Phi = D^2 + 4u + 2u_x D^{-1}$ 是族中所有的方程的强对称. 因为 $K_m(m=0, 1, 2, \cdots)$都不显含 t, 由定理 1 的结论(i), K_m $(m=0, 1, 2, \cdots)$也是族中所有方程的对称. 并且, 对族中的每一个方程, 都还有另一组对称(与 l 有关)

$$\tau_n^l = \Phi^n\tau_0^l, \quad \tau_0^l = (2l+1)tK_{l-1} + \frac{1}{2}, \tag{5-3-16}$$

即 $$\tau_n^l = (2l+1)tK_{n+l-1} + \Phi^n\frac{1}{2}, \tag{5-3-17}$$

n, $l=0, 1, 2, \cdots$. 我们只需证明 τ_0^l 是方程 $u_t=K_l$ 的对称. 由定理 1,

$$K_l'\frac{1}{2}=\left[K_l,\ \frac{1}{2}\right]=\left[K_l,\ 3tK_0+\frac{1}{2}\right]$$
$$=[K_l,\ \tau_0]=(2l+1)K_{l-1},$$

利用这个等式即可直接验证

$$\frac{d\tau_0^l}{dt}=K_l'\tau_0^l,$$

即 τ_0 是 $u_t=K_l$ 的对称.

定理 2 方程 $u_t=K_l\ (l=0, 1, 2, \cdots)$ 的两组对称 K_m 和 τ_n^l 满足下列李代数关系:

$$\text{(i)}\quad [K_m,\ K_n]=0, \tag{5-3-18}$$

$$\text{(ii)}\quad [K_m,\ \tau_n^l]=(2m+1)K_{m+n-1}, \tag{5-3-19}$$

$$\text{(iii)}\quad [\tau_m^l,\ \tau_n^l]=2(m-n)\tau_{m+n-1}^l, \tag{5-3-20}$$

$$(m,\ n=0, 1, 2, \cdots,\ K_{-1}=0=\tau_{-1}^l)$$

证明(见本章末[5]) 只须证明(ii)和(iii). 由 § 2 中定理 1,

$$\left[K_m,\ \Phi^n\frac{1}{2}\right]=\left[K_m,\ 3tK_n+\Phi^n\frac{1}{2}\right]$$
$$=[K_m,\ \tau_n]=(2m+1)K_{m+n-1},$$

$$\left[\Phi^m\frac{1}{2},\ \Phi^n\frac{1}{2}\right]$$
$$=[\tau_m,\ \tau_n]-3t\left[K_m,\ \Phi^n\frac{1}{2}\right]-3t\left[\Phi^m\frac{1}{2},\ K_n\right]$$
$$=2(m-n)\tau_{m+n-1}-6t(m-n)K_{m+n-1}$$
$$=2(m-n)\Phi^{m+n-1}\frac{1}{2}.$$

于是, 应用上列等式和 § 2 方定理 1, 就得到

$$[K_m,\ \tau_n^l]=\left[K_m,\ (2l+1)tK_{n+l-1}+\Phi^n\frac{1}{2}\right]$$
$$=\left[K_m,\ \Phi^n\frac{1}{2}\right]=(2m+1)K_{m+n-1},$$

$$
\begin{aligned}
&[\tau_m^l,\ \tau_n^l] \\
&=\left[(2l+1)tK_{m+l-1}+\Phi^m\frac{1}{2},\ (2l+1)tK_{n+l-1}+\Phi^n\frac{1}{2}\right] \\
&=(2l+1)t\left[K_{m+l-1},\ \Phi^n\frac{1}{2}\right] \\
&\quad+(2l+1)t\left[\Phi^m\frac{1}{2},\ K_{m+l-1}\right]+\left[\Phi^m\frac{1}{2},\ \Phi^n\frac{1}{2}\right] \\
&=2(m-n)(2l+1)tK_{m+n+l-2}+2(m-n)\Phi^{m+n-1}\frac{1}{2} \\
&=2(m-n)\tau_{m+n-1}^l.
\end{aligned}
$$

可见，定理 2 既是定理 1 的推广也是定理 1 的推论.

3.3 K-P 方程和 AKNS 方程的对称

有关理论对高维的演化方程也是适用的. 现以 1+2 维的 Kademtsev-Petviasnvilli (K-P) 方程为例说明（见章末 [6]、[7]）.

K-P 方程

$$u_t=D^{-1}u_{yy}-u_{xxx}-6uu_x \tag{5-3-21}$$

的

$$K=D^{-1}u_{yy}-u_{xxx}-6uu_x,$$

$$K'=D^{-1}D_y^2-D^3-6uD-6u_x$$

$\left(D_y=\dfrac{d}{dy}\right)$. $\sigma(x,\ t,\ u)$是(5-3-21)的对称必须且只须

$$\frac{d\sigma}{dt}=D^{-1}\sigma_{yy}-\sigma_{xxx}-6u\sigma_x-6u_x\sigma. \tag{5-3-22}$$

寻找 K-P 方程的强对称十分困难. 现在采取另一个途径，先给出它的一些“种子”对称（见章末[1]）：

$$K_0=\frac{1}{3}u_x,\quad K_1=\frac{2}{3}u_y,$$

$$K_2=D^{-1}u_{yy}-u_{xxx}-6uu_x(=u_t),$$

$$K_3=\frac{4}{3}D^{-2}u_{yyy}-4u_{yxx}-8u_xD^{-1}u_y-16uu_y,$$

$$K_4=\frac{5}{3}D^{-3}u_{yyy}+3u_{xxxxx}-10u_{yyx}+90u^2u_x-10u_xD^{-2}u_y$$
$$-20uD^{-1}u_{yy}-5D^{-1}(u^2)_{yy}+30u_{xxx}u$$
$$+60u_{xx}u_x-20u_yD^{-1}u_y.$$

$$\tau_0=tK_0-\frac{1}{18},$$
$$\tau_1=tK_1+yK_0,$$
$$\tau_2=tK_2+yK_1+xK_0+\frac{2}{3}u,$$
$$\tau_3=tK_3+yK_2+xK_1+\frac{1}{3}D^{-1}u_y,$$
$$\tau_4=tK_4+yK_3+xK_2+2D^{-1}u_{yy}-4u_{xx}-8u^2-2u_xD^{-1}u.$$

对这些对称可以直接验证它们满足(5-3-22). 进一步, 还可以验证它们之间的换位运算有下列关系:

$$[K_i,\ K_j]=0,$$
$$[K_i,\ \tau_j]=\frac{i+1}{3}K_{i+j-2},$$
$$[\tau_i,\ \tau_j]=\frac{n-j}{3}\tau_{i+j-2}.$$

$i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ i+j-2\leqslant 4$. 当 $i+j-2>4$ 时, 通过换位运算就能产生新的对称. 于是, 令

$$K_n=\frac{3}{n}[K_{n-1},\ \tau_3],$$
$$\tau_n=\frac{3}{n-4}[\tau_{n-1},\ \tau_3]$$

$(n>4)$. 这样, 就有了 K-P 方程(5-3-21)的两组对称: K_n 和 τ_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$; 并且还可以证明它们满足下列李代数:

$$[K_m,\ K_n]=0,$$
$$[K_m,\ \tau_n]=\frac{m+1}{3}K_{m+n-2},$$
$$[\tau_m,\ \tau_n]=\frac{m-n}{3}\tau_{m+n-2}.$$

关于这个结论的证明和许多进一步的讨论，可以参阅有关的文献(见章末[6]、[8]、[9]、[7]、[10]). 当 u 与 y 无关时，K-P 方程就归结为 KdV 方程，上述一些结论也就归结为前面已经讨论过的 KdV 方程的有关结论. 所以，K-P 方程也可以看作 KdV 方程向高维的一个推广，又常称为 1+2 维的 KdV 方程. 对高维方程的讨论要比 1+1 维的情况困难得多，近来愈来愈受到重视.

关于对称的讨论也适用于未知量为向量值函数的方程（即一方程组）. 下面介绍对 AKNS 方程族的讨论(见章末[11]).

AKNS 方程族是

$$\underline{u}_t=\underline{K}_n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{5-3-23}$$

其中
$$\underline{K}_n=\Phi^n\underline{K}_0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$\underline{u}=\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \qquad \underline{K}_0=\begin{pmatrix} -iq \\ ir \end{pmatrix},$$

$$\Phi=\frac{1}{i}\begin{pmatrix} -D+2qD^{-1}r & 2qD^{-1}q \\ -2rD^{-1}r & D-2rD^{-1}q \end{pmatrix}. \tag{5-3-24}$$

例如，
$$\underline{K}_1=\begin{pmatrix} q_x \\ r_x \end{pmatrix}=\Phi\underline{K}_0,$$

$$\underline{K}_2=\frac{1}{i}\begin{pmatrix} -q_{xx}+2q^2r \\ r_{xx}-2r^2q \end{pmatrix}=\Phi\underline{K}_1,$$

$$\underline{K}_3=\begin{pmatrix} -q_{xxx}-2qD^{-1}(r_{xx}q)+2qD^{-1}(rq_{xx})+2(q^2r)_x \\ -r_{xxx}-2rD^{-1}(rq_{xx})+2rD^{-1}(r_{xx}q)+2(r^2q)_x \end{pmatrix}$$
$$=\Phi\underline{K}_2.$$

相应的方程为

$$\begin{cases} q_t=q_x, \\ r_t=r_x; \end{cases} \qquad (n=1) \tag{5-3-25}$$

$$\begin{cases} iq_t=-q_{xx}+2q^2r, \\ ir_t=r_{xx}-2r^2q \end{cases} \qquad (n=2), \tag{5-3-26}$$

$$\begin{cases} q_t = -q_{xxx} + 6qrq_x, \\ r_t = -r_{xxx} + 6qrr_x. \end{cases} \qquad (n=3) \tag{5-3-27}$$

函数 $\underline{F}(x, t, \underline{u}) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ 关于 $\underline{u}$ 对方向 $\underline{\sigma}(x, t, \underline{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$ 的 Gateaux 导数仍定义为

$$F'(u)[\sigma] = \frac{d}{d\varepsilon} F(\underline{u} + \varepsilon\underline{\sigma})\big|_{\varepsilon=0}. \tag{5-3-28}$$

同样，$\underline{F}'(\underline{u})$（或简写为 $\underline{F}'$）仍称为 $\underline{F}$ 对 $\underline{u}$ 的线性化算子；(5-3-28)可简记为 $\underline{F}'\circ\underline{u}$ 或 $\underline{F}'\underline{u}$. 根据定义

$$\underline{F}'\circ\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{d\varepsilon} F_1(x, t, q+\varepsilon\sigma_1, r+\varepsilon\sigma_2)\big|_{\varepsilon=0} \\ \dfrac{d}{d\varepsilon} F_2(x, t, q+\varepsilon\sigma_1, r+\varepsilon\sigma_2)\big|_{\varepsilon=0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F'_{1q}[\sigma_1] + F'_{r1}[\sigma_2] \\ F'_{2q}[\sigma_1] + F'_{2r}[\sigma_2] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F'_{1q}\circ\sigma_1 + F'_{1r}\circ\sigma_2 \\ F'_{2q}\circ\sigma_1 + F'_{2r}\circ\sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{5-3-29}$$

式中 F'_{1q}, F'_{2q}, F'_{1r}, F'_{2r} 分别表示 F_1 和 F_2 对 q 和 r 的线性化算子. (5-3-29)也可以表示为

$$\underline{F}'\circ\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} F'_{1q} & F'_{1r} \\ F'_{2q} & F'_{2r} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix},$$

即

$$\underline{F}' = \begin{pmatrix} F'_{1q} & F'_{1r} \\ F'_{2q} & F'_{2r} \end{pmatrix}.$$

例如，

$$K'_0 = i\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix},$$

$$K'_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} -D^2 + 4qr & 2q^2 \\ -2r^2 & D^2 - 4rq \end{pmatrix}.$$

可以证明，有关的公式和理论对于向量值函数都适用．对 AKNS 方程族(5-3-23)，我们可以证明 Φ 是族中所有方程的强对称．首先，我们可以证明 Φ 具有遗传性，通过直接的、冗长的计算可以验证它适合遗传性条件(见章末[11])．因为 Φ 不显含 t，进一步只须证明 Φ 是方程 $\underline{u}_t=\underline{K}_0$ 的强对称，即 $\Phi'[K_0]=[K_0', \Phi]$，其中 $[K_0', \Phi]$ 仍为 $K_0'\circ\Phi-\Phi\circ K_0'$．这一点不难直接验证：

$$\Phi'[K_0]=-4\begin{pmatrix} 0 & qD^{-1}q \\ rD^{-1}r & 0 \end{pmatrix}=[K_0', \Phi].$$

AKNS 方程族(5-3-23)中任一方程

$$\underline{u}_t=\underline{K}_l, \quad l=0, 1, 2, \cdots \tag{5-3-30}$$

也均有两组对称，

$$\underline{K}_n=\Phi^n\underline{K}_0,$$
$$\underline{\tau}_n^l=\Phi^n\underline{\tau}_0^l, \quad \underline{\tau}_0^l=lt\underline{K}_{l-1}+x\underline{u}.$$

由于 Φ 是方程 $\underline{u}_t=\underline{K}_l$ 的强对称，只须证明 $\underline{K}_0$ 和 $\underline{\tau}_0^l$ 是方程 $\underline{u}_t=\underline{K}_l$ 的对称．这可以用类似证明 K_0 和 τ_n^l 是 KdV 方程族中方程 $u_t=K_l$ 的对称的办法来证明．进一步，类似于本节定理 1 和 2 的证明，也能给出 AKNS 方程族的两组对称 $\underline{K}_n$ 和 $\underline{\tau}_n^l$ 满足的李代数关系(见本章末[11])：

$$[\underline{K}_m, \underline{K}_n]=\underline{0},$$
$$[\underline{K}_m, \underline{\tau}_n]=mK_{m+n-1},$$
$$[\underline{\tau}_m, \underline{\tau}_n]=(m-n)\underline{\tau}_{m+n-1},$$

$(m, n=0, 1, 2, \cdots, \underline{K}_{-1}=\underline{0}=\underline{\tau}_{-1})$．

特别，若 $q=u$, $r=-1$，则有

$$\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix} u_x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (n=1),$$

$$\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix} -u_{xxx}6uu_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n=3).$$

即
$$u_t=u_x, \qquad (n=1),$$

$$u_t=-u_{xxx}6uu_x, \qquad (n=3).$$

进一步直接计算即能证明，对任意的$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\Phi^2\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Phi_1 v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (q=u,\ r=-1),$$

其中
$$\Phi_1=-(D^2+4u+2u_x D^{-1}).$$

可见，AKNS 方程族中$(u=q,\ r=1)$的

$$u_t=\Phi^{2n}\underline{K}_1=\Phi^{2n+1}\underline{K}_0, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

就给出 KdV 方程族

$$u_t=\Phi_1^n u_x.$$

所以，KdV 方程族可以看作是 AKNS 方程族的一种约化情况。不仅如此，NLS 方程族，MKdV 方程族，sine-Gordon 和 sinh-Gordon 方程族等也都可以看作是 AKNS 方程族的某种约化（见章末[20]）. AKNS 方程族则可以认为是上述各方程族的统一和推广.

§4 变 换

许多演化方程之间存在某种变换关系. 例如，KdV 方程和 Modified KdV(MKdV)方程之间存在 Miura 变换；Burgers 方程和热传导方程之间有 Cole-Hopf 变换；KdV 方程和 CKdV 方程之间也存在变换关系，不过这种变换不仅限于未知函数之间，自变量也要经过变换. 自然要问，存在这种变换关系的方程的对称之间有何变换关系？在这一节中，我们将给出由方程之间的变换诱导出相应的强对称、对称及其李代数的变换关系.

4.1 变换的基本概念

对非线性演化方程

$$u_t=K(x,\ t,\ u), \tag{5-4-1}$$

考虑变换

$$u=F(x,\ t,\ v),$$
$$\xi=\xi(x,\ t),\ \tau=\tau(x,\ t). \tag{5-4-2}$$

对于变换，通常我们均要求它是可逆的. 在这里我们还进一步假设 $\tau_0\neq 0$，于是，

$$\begin{aligned} u_t&=F_t\\ &=\frac{\partial F}{\partial \tau}+Tv_t\\ &=\frac{\partial F}{\partial \tau}+T(v_\xi \xi_t)+T(v_t\tau_t), \end{aligned} \tag{5-4-3}$$

其中 T 表示 F 对 v 的线性化算子 $F'(v)$，即 $T=F'$.

将(5-4-3)代入(5-1-1)，则得到

$$T(v_t\tau_t)=K\circ F-\frac{\partial F}{\partial \tau}-T(v_\xi\xi_t). \tag{5-4-4}$$

若有函数 $H(\xi,\ \tau,\ v)$ 使得

$$K\circ F-\frac{\partial F}{\partial \tau}-T(v_\xi\xi_t)=T(H(\xi,\ \tau,\ v)\tau_t), \tag{5-4-5}$$

则(5-4-4)就归结为

$$T(v_t-H(\xi,\ \tau,\ v))\tau_t=0,$$

从而得到方程

$$v_t=H(\xi,\ \tau,\ v). \tag{5-4-6}$$

这样，(5-4-1)和(5-4-2)就给出了方程(5-1-1)和(5-4-6)之间的变换. 以下将讨论由变换(5-4-1)和(5-4-2)诱导出的方程(5-1-1)和(5-4-6)的强对称、对称及其李代数之间的变换关系.

为了简便，记号F 有时也统指变换关系$(\xi,\ \tau,\ v)\to(x,\ t,\ u)$.

引理 1 $$(K\circ F)'=K'\circ T(=K'\circ F'). \tag{5-4-7}$$

证明 对任意的函数 $a(\xi,\ \tau,\ v)$，

$$(K\circ F)'_v a=\frac{d}{d\varepsilon}K(F(v+\varepsilon a))\big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} K(F(v) + \varepsilon Ta + \cdots)\big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} K(u + \varepsilon Ta + \cdots)\big|_{\varepsilon=0}$$

$$= K' \circ Ta,$$

所以，$(K \circ F)' = K' \circ T$.

须注意，(5-4-7)左端$(K \circ F)'$表示对 v 的线性化算子，右端 K' 则表示对 u 的线性化算子．以下也常有类似的情况，均不特别声明．

引理 2 对任意的函数 $a(\xi, \tau, v)$ 和 $b(\xi, \tau, v)$,

$$T'[a] \circ b = T'[b] \circ a.$$

因为 $T = F'$，这个引理由 § 1 中命题 4 就可以立即得到．

定理 1 若 $\tilde{\sigma}(\xi, \tau, v)$ 是(5-4-6)的对称，则 $\tilde{\sigma} = T\tilde{\sigma}$（作为 x, t, u 的函数）是(5-1-1)的对称．

证明
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dT}{dt} \circ \tilde{\sigma} + T \circ \frac{d\tilde{\sigma}}{dt}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} + T'[v_t] \circ \tilde{\sigma} + T \circ \frac{d\tilde{\sigma}}{dt}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} + T'[v_\xi \xi_t] \circ \tilde{\sigma} + T'[v_\tau \tau_t] \circ \tilde{\sigma}$$

$$+ T\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\xi} \xi_t\right) + T\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tau} \tau_t\right)$$

（注意 T 为一线性算子）．另一方面，由本节引理 1 和(5-4-5),

$$K'\sigma = K' \circ T\tilde{\sigma} = (K \circ F)'\tilde{\sigma}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} + (T(v_\xi \xi_t))'\tilde{\sigma} + (T(H\tau_t))'\tilde{\sigma}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} + T[\tilde{\sigma}] \circ (v_\xi \xi_t) + T_0 (v_\xi \xi_t)'\tilde{\sigma}$$

$$+ T'[\tilde{\sigma}] \circ (H\tau_t) + T \circ H' \circ \tilde{\sigma} \tau_t$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} \circ \tilde{\sigma} + T'[\tilde{\sigma}] \circ (v_\xi \xi_t) + T \circ \frac{d\tilde{\sigma}}{d\xi} \xi_t$$

$$+T'[\tilde{\sigma}]\circ(H\tau_t)+T\circ H'\circ\tilde{\sigma}\tau_t,$$

由本节引理 2,

$$T'[v_\xi\xi_t]\circ\tilde{\sigma}=T'[\tilde{\sigma}]\circ(v_\xi\xi_t),$$
$$T'[v_\tau\tau_t]\tilde{\sigma}=T'[\tilde{\sigma}]\circ(v_\tau\tau_t)',$$

于是就得到

$$\frac{d\sigma}{dt}-K'\sigma=T\circ\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\tau}-H\tilde{\sigma}\right)\tau_t.$$

因为 $\tilde{\sigma}$ 是(5-4-6)的对称, $\frac{d\tilde{\sigma}}{dt}-H'\tilde{\sigma}=0$;

所以,
$$\frac{d\sigma}{dt}-K'\sigma=0,$$
σ 是(5-1-1)的对称.

容易看出, 这个定理的逆也是成立的. 也就是说, 若 σ 是(5-1-1)的对称, 则 $\tilde{\sigma}=T^{-1}\sigma(=T^{-1}\sigma\circ F)$ 是(5-4-6)的对称.

定理 2 $\Phi(x, t, u)$ 是方程 (5-1-1) 的强对称必须且只须 $\tilde{\Phi}(\xi, \tau, v)=T^{-1}\Phi T(=T^{-1}\Phi T\circ F)$ 是(5-4-6)的强对称.

证明 由本节定理 1, σ 是(5-1-1)的对称必须且只须 $\tilde{\sigma}=T^{-1}\sigma$ 是(5-4-6)的对称; 又由

$$\Phi\sigma=T\tilde{\Phi}T^{-1}\sigma=T(\tilde{\Phi}\tilde{\sigma})$$

可知, $\Phi\sigma$ 是(5-1-1)的对称必须且只须 $\tilde{\Phi}\tilde{\sigma}$ 是(5-4-6)的对称, 所以, $\tilde{\Phi}$ 是(5-4-6)的强对称必须且只须 Φ 是(5-1-1)的强对称.

定理 3 运算子 $\Phi(x, t, u)$ 具有遗传性必须且只须 $\tilde{\Phi}(\xi, \tau, v)=T^{-1}\Phi T$ 具有遗传性.

证明 对任意的函数 $f(x, t, u)$, $g(x, t, u)$ 以及 $\tilde{f}(\xi, \tau, v)=T^{-1}f(=(T^{-1}f)\circ F)$, $\tilde{g}=T^{-1}g$,

$$\begin{aligned}
&\Phi'[\Phi f]g-\Phi'[\Phi g]f\\
&=(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_u[T\tilde{\Phi}\tilde{f}]T\tilde{g}-(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_u[T\tilde{\Phi}\tilde{g}]T\tilde{f}\\
&=(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_v[\tilde{\Phi}\tilde{f}]T\tilde{g}-(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_v[\tilde{\Phi}\tilde{g}]T\tilde{f}\\
&=T'[\tilde{\Phi}\tilde{f}]\tilde{\Phi}\tilde{g}+T\tilde{\Phi}'[\tilde{\Phi}\tilde{f}]\tilde{g}+T\tilde{\Phi}(T^{-1})'[\tilde{\Phi}\tilde{f}]T\tilde{g}
\end{aligned}$$

$$-T'[\tilde{\Phi}\tilde{g}]\tilde{\Phi}\tilde{f}-T\tilde{\Phi}'[\tilde{\Phi}\tilde{g}]\tilde{f}-T\tilde{\Phi}(T^{-1})'[\tilde{\Phi}\tilde{g}]T\tilde{f},$$

式中下标 u 和 v 分别强调对 u 和 v 的线性化运算. 又

$$\begin{aligned}
&\Phi(\Phi'[f]g-\Phi'[g]f)\\
&=T\tilde{\Phi}T^{-1}(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_u[T\tilde{f}]T\tilde{g}-(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_u[T\tilde{g}]T\tilde{f}\\
&=T\tilde{\Phi}T^{-1}((T\tilde{\Phi}T^{-1})'_v[\tilde{f}]T\tilde{g}-(T\tilde{\Phi}T^{-1})'_v[\tilde{g}]T\tilde{f})\\
&=T\tilde{\Phi}T^{-1}(T'[\tilde{f}]\tilde{\Phi}\tilde{g}+T\tilde{\Phi}'[\tilde{f}]\tilde{g}+T\tilde{\Phi}(T^{-1})'[\tilde{f}]T\tilde{g}\\
&\quad -T'[\tilde{g}]\tilde{\Phi}\tilde{f}-T\tilde{\Phi}[\tilde{g}]\tilde{f}-T\tilde{\Phi}(T^{-1})'[\tilde{g}]T\tilde{f}),
\end{aligned}$$

由 $T^{-1}\circ T=I$ (恒同)

$$\begin{aligned}
(T^{-1})'[\tilde{\Phi}\tilde{f}]\circ T&=-T^{-1}\circ T'[\tilde{\Phi}\tilde{f}],\\
(T^{-1})'[\tilde{\Phi}\tilde{g}]\circ T&=-T^{-1}\circ T'[\tilde{\Phi}\tilde{g}],\\
(T^{-1\prime})[\tilde{f}]\circ T&=-T^{-1}\circ T'[\tilde{f}],\\
(T^{-1})'[\tilde{g}]\circ T&=-T^{-1}\circ T'[\tilde{g}],
\end{aligned}$$

以及本节引理 2, 就得到

$$\begin{aligned}
&\Phi'[\Phi f]g-\Phi'[\Phi g]f-\Phi(\Phi'[f]g-\Phi'[g]f)=\\
&T(\tilde{\Phi}'[\tilde{\Phi}\tilde{f}]\tilde{g}-\tilde{\Phi}'[\tilde{\Phi}\tilde{g}]\tilde{f}-\tilde{\Phi}'(\tilde{\Phi}[\tilde{f}]\tilde{g}-\tilde{\Phi}'[\tilde{g}]\tilde{f})). \quad (5\text{-}4\text{-}8)
\end{aligned}$$

根据遗传性的定义, 定理得证.

定理 4 对任意的函数 $\tilde{a}(\xi, \tau, v)$ 和 $\tilde{b}(\xi, \tau, v)$,

$$[T\tilde{a}, T\tilde{b}]=T[\tilde{a}, \tilde{b}]. \quad (5\text{-}4\text{-}9)$$

(注意, 等式中李乘积的线性化运算, 左端对 u, 右端对 v).

证明

$$\begin{aligned}
[T\tilde{a}, T\tilde{b}]&=(T\tilde{a})'_u(T\tilde{b})-(T\tilde{b})'_u(T\tilde{a})\\
&=(T\tilde{a})'_v\tilde{b}-(T\tilde{b})'_v\tilde{a}\\
&=T'[\tilde{b}]\tilde{a}+T\tilde{a}'\tilde{b}-T'[\tilde{a}]\tilde{b}-T\tilde{b}'\tilde{a}
\end{aligned}$$

根据本节引理 2,

$$\begin{aligned}
[T\tilde{a}, T\tilde{b}]&=T\tilde{a}'\tilde{b}-T\tilde{b}'\tilde{a}\\
&=T[\tilde{a}, \tilde{b}],
\end{aligned}$$

定理得证.

特别, 若 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 是(5-4-6)的对称, 则 $T\tilde{a}$ 和 $T\tilde{b}$ 是(5-1-1)的对称; (5-4-9)就给出了(5-4-6)和(5-1-1)的相应的对称的李代数

之间同构关系.

根据以上四个定理，若两个方程间存在(5-4-1)和(5-4-2)这样的变换关系，则可由一个方程的强对标(或遗传强对称)、对称及其李代数导出另一个方程的强对称(或遗传强对称)、对称及其李代数，从而可以把对称的研究分类. 所以，上述定理有着广泛应用.

4.2 有关变换定理的应用　例

例 1　MKdV 方程

$$\varphi_t=\varphi_{xxx}-6\varphi^2\varphi_x \tag{5-4-10}$$

与 KdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x \tag{5-1-7}$$

之间存在著名的 Miura 变换

$$u=\varphi_x-\varphi^2.$$

事实上，直接计算就能得到

$$u_t-u_{xxx}-6uu_x$$

$$\overset{u=\varphi_x-\varphi^2}{=\!=\!=\!=\!=}(D-2\varphi)(\varphi_t-\varphi_{xxx}+6\varphi^2\varphi_x),$$

于是，
$$T=D-2\varphi.$$

已经知道 KdV 方程有一个遗传强对称

$$\Phi=D^2+4u+2u_xD^{-1}$$

以及两组对称

$$K_n=\Phi^nK_0,\ K_0=u_x,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$\tau_n=\Phi^n\tau_0,\ \tau_0=3tu_x+\frac{1}{2},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

由 $(D^2+uu+2u_xD^{-1})\circ(D-2\varphi)$

$$=(D^2+4(\varphi_x-\varphi^2)+2(\varphi_{xx}-2\varphi\varphi_x)D^{-1})\circ(D-2\varphi)$$

$$=D^3-4\varphi^2D-2\varphi D^2-12\varphi\varphi_x+8\varphi^3-4\varphi_{xx}D^{-1}\varphi+8\varphi\varphi_xD^{-1}\varphi,$$

$$(D-2\varphi)\circ(D^2-4\varphi^2-4\varphi_xD^{-1}\varphi)$$

$$=D^3-8\varphi\varphi_x-4\varphi^2D-4D(\varphi_xD^{-1}\varphi)-2\varphi D^2$$

$$+8\varphi^3+8\varphi\varphi_xD^{-1}\varphi,$$

以及 $$D(\varphi_x D^{-1}\varphi)=\varphi_{xx}D^{-1}\varphi+\varphi\varphi_x,$$

就得到 $$\Phi\circ T=T\circ(D^2-4\varphi^2-4\varphi_x D^{-1}\varphi)$$

根据本节定理 2 和 3,

$$\tilde{\Phi}=D^2-4\varphi^2-4\varphi_x D^{-1}\varphi$$

是 MKdV 方程(5-4-10)的遗传强对称

应用本节定理 1 又可以由 KdV 方程的两组对称导出 MKdV 方程的两组对称:

$$\tilde{K}_n=\tilde{\Phi}^n\tilde{K}_0=T^{-1}K_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$\tilde{\tau}_n=\tilde{\Phi}^n\tilde{\tau}_0=T^{-1}\tau_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;$$

$$\begin{aligned}\tilde{K}_0&=T^{-1}K_0=(D-2\varphi)^{-1}u_x\\&=(D-2\varphi)^{-1}(D-2\varphi)\varphi_x=\varphi_x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_0&=(D-2\varphi)^{-1}\left(3tu_x+\frac{1}{2}\right)\\&=3t\varphi_x+\frac{1}{2}(D-2\varphi)^{-1}\\&=3t\varphi_x+\frac{1}{2}e^{2D^{-1}\varphi}D^{-1}e^{-2D^{-1}\varphi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1&=(D-2\varphi)^{-1}(3tu_t+2u+xu_x)\\&=3t\varphi_t+\varphi+x\varphi_x=T^{-1}\tau_1.\end{aligned}$$

进一步由本节定理 1 和定理 4 就又能立即得到 $\tilde{K}_n$ 和 $\tilde{\tau}_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$满足的李代数关系:

$$[\tilde{K}_m,\ \tilde{K}_n]=0,$$

$$[\tilde{K}_m,\ \tilde{\tau}_n]=(2m+1)\tilde{K}_{m+n-1},$$

$$[\tilde{\tau}_m,\ \tilde{\tau}_n]=2(m-n)\tilde{\tau}_{m+n-1},$$

$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \tilde{K}_{-1}=0=\tilde{\tau}_{-1})$.

例 2 PMKdV (Potential MKdV) 方程

$$v_t=v_{xxx}-2v_x^3 \tag{5-4-11}$$

可以由 MKdV 方程(5-4-10)变形得到

$$\varphi_t-\varphi_{xxx}+6\varphi^2\varphi_x$$

$$\xrightarrow{\varphi=v_x} D(v_t-v_{xxx}+2v_x^3),$$

可见，
$$\bar{T}=D.$$

于是，应用本节中的定理就能得到 PMKdV 方程(5-4-11)的一个遗传强对称

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}&=D^{-1}(D^2-4\varphi^2-4\varphi_x D^{-1}\varphi)D\\&=D^2-4v_x^2+4v_x D^{-1}v_{xx}\\&=D^2-4v_x D^{-1}v_x D,\end{aligned}$$

以及两组对称及其李代数：

$$\begin{aligned}&\bar{K}_n=\bar{\Phi}^n\bar{K}_0=\bar{T}^{-1}\tilde{K}_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\\&\bar{\tau}_n=\bar{\Phi}^n\bar{\tau}_0=\bar{T}^{-1}\tilde{\tau}_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\\&\bar{K}_0=\bar{T}^{-1}\tilde{K}_0=v_x,\\&\bar{\tau}_0=\bar{T}^{-1}\tilde{\tau}_0=3tv_x+\frac{1}{2}D^{-1}(e^{2v}D^{-1}e^{-2v}),\\&\bar{\tau}_1=\bar{T}^{-1}\tilde{\tau}_1=3tv_t+xv_x;\\&[\bar{K}_m,\ \bar{K}_n]=0,\\&[\bar{K}_m,\ \bar{\tau}_n]=(2m+1)\bar{K}_{m+n-1},\\&[\bar{\tau}_m,\ \bar{\tau}_n]=2(m-n)\bar{\tau}_{m+n-1},\end{aligned}$$

$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ \bar{K}_{-1}=0=\bar{\tau}_{-1})$

例3 GKdV 方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x+6fu+x(f'-12f^2) \tag{5-1-10}$$

(f 是 t 的任意函数)．在第一节中已经提到，它是 KdV 方程($f=0$)和 CKdV 方程$\left(f=-\dfrac{1}{12t}\right)$的统一和推广．令

$$u=xf+gv,\ \ g=e^{\int 12f dt}\ (g'=12fg), \tag{5-4-12}$$

$$\xi=xg^{\frac{1}{3}},\ \tau=\int g^{\frac{3}{2}}dt, \tag{5-4-13}$$

则有

$$\begin{aligned}&u_t=xf'+12fgv+g^{\frac{3}{2}}v_\tau+6xfg^{\frac{3}{2}}v_\xi,\\&u_x=f+g^{\frac{3}{2}}v_\xi.\end{aligned}$$

$$u_{xxx}=g^{\frac{5}{2}}v_{\xi\xi\xi},$$

从而得到

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx}-6uu_x-6fu-x(f'-12f^2) \\ &= g^{\frac{5}{2}}(v_\tau-v_{\xi\xi\xi}-6vv_\xi). \end{aligned}$$

可见，(5-4-12)和(5-4-13)给出 GKdV 方程(5-1-10)到 KdV 方程 $v_\tau=v_{\xi\xi\xi}+6vv_\xi$ 的一个变换；这时，

$$\tau_t=g^{\frac{3}{2}},$$

$$T=g.$$

由

$$\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_t\\ \tau_x & \tau_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g^{\frac{1}{2}} & 6xfg^{\frac{1}{2}}\\ 0 & g^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_\xi & x_\tau\\ t_\xi & t_\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g^{-\frac{1}{2}} & -6xfg^{-\frac{3}{2}}\\ 0 & g^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix},$$

$$D_\xi=g^{-\frac{1}{2}}D \quad \left(D_\xi=\frac{d}{d\xi}\right),$$

$$D_\xi^{-1}=g^{\frac{1}{2}}D^{-1},$$

应用本节的定理就能得到 GKdV 方程(5-1-10)的遗传强对称

$$\Phi=\frac{1}{g}(D^2+4(u-xf)+2(u_x-f)D^{-1})$$

和两组对称：

$$K_n=\Phi^n K_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$\tau_n=\Phi^n\tau_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$K_0=Tv_\xi=\frac{1}{\sqrt{g}}(u_x-f),$$

$$\begin{aligned}\tau_0 &= T\left(\xi\tau v_\xi+\frac{1}{2}\right) \\ &= 3\left(\int g^{\frac{3}{2}}dt\right)\frac{1}{\sqrt{g}}(u_x-f)+\frac{g}{2},\end{aligned}$$

以及它们满足的李代数关系:

$$[K_m,\ K_n]=0,$$
$$[K_m,\ \tau_n]=(2m+1)K_{m+n-1},$$
$$[\tau_m,\ \tau_n]=2(m-n)\tau_{m+n-1},$$

$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ K_{-1}=0=\tau_{-1})$.

例 4 新 KdV 方程

$$u_t=3t(u_{xxx}+6uu_x)+xu_x+2u \tag{5-4-14}$$

(左端为 KdV 方程(5-4-7)的对称 τ_1). 令

$$u=e^{2t}v, \tag{5-4-15}$$

$$\xi=xe^t,\ \tau=te^{3t}-\frac{1}{3}e^{3t}. \tag{5-4-16}$$

则有

$$u_t=2e^{2t}v+xe^{2t}v_\xi+3te^{5t}v_\tau,$$
$$u_x=e^{3t}v_\xi,$$
$$u_{xxx}=e^{5t}v_{\xi\xi\xi},$$

从而得到

$$v_t-3t(v_{xxx}+6uu_x)-xu_x-2u$$
$$=3te^{5t}(v_\tau-v_{\xi\xi\xi}-6vv_\xi).$$

可见,(5-4-15)和(5-4-16)给出新 KdV 方程(5-4-14)到 KdV 方程的变换. 这时

$$\tau_t=3te^{3t},$$
$$T=e^{2t}.$$

由

$$\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_t\\ \tau_x & \tau_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & xe^t\\ 0 & 3te^{3t}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_\xi & x_\tau\\ t_\xi & t_\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t} & -\dfrac{x}{3t}e^{-3t}\\ 0 & \dfrac{1}{3t}e^{-3t}\end{pmatrix},$$

$$D_\xi=e^{-t}D,\ D_\xi^{-1}=e^tD^{-1},$$

并应用上述定理就得到新 KdV 方程(5-4-14)的遗传强对称:

$$\Phi=e^{-2t}(D^2+4u+2u_xD^{-1})$$

和两组对称

$$K_n = \Phi^n K_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$\tau_n = \Phi^n \tau_0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$K_0 = T v_\xi = e^{-t} u_x,$$
$$\tau_0 = T\left(\xi \tau v_\xi + \frac{1}{2}\right)$$
$$= e^{2t}\left(3t u_x - u_x + \frac{1}{2}\right),$$

以及它们满足的李代数关系:

$$[K_m,\ K_n] = 0,$$
$$[K_m,\ \tau_n] = (2m+1) K_{m+n-1},$$
$$[\tau_m,\ \tau_n] = 2(m-n) \tau_{m+n-1},$$

$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ K_{-1}=0=\tau_{-1})$.

不难看出，本节中各定理对高维的演化方程也是适用的. 下面以 K-P 方程与广义 K-P 方程和 Modified K-P 方程之间的变换关系为例说明.

例 5 广义 K-P 方程

$$u_t = g^2 D^{-1} u_{yy} - u_{xxx} - 6uu_x - 6fu - x(f' - 12f^2)$$

(f 为 t 的任意函数, $g = e^{\int 12 f dt}$) 是 K-P 方程

$$u_t = D^{-1} u_{yy} - u_{xxx} - 6uu_x$$

($f=0$) 和柱 K-P 方程

$$u_t = \frac{1}{144t^2} D^{-1} u_{yy} - u_{xxx} - 6uu_x + \frac{u}{2t}$$

$\left(f = -\frac{1}{12t}\right)$ 的统一和推广. 令

$$u = xf + gv,\quad g = e^{\int 12 f dt}, \tag{5-4-17}$$
$$\xi = xg^{\frac{1}{2}},\quad \tau = \int g^{3/2}\, dt,\ \eta = y, \tag{5-4-18}$$

则有 $\quad u_\tau = g^2 D^{-1} u_{yy} - u_{xxx} - 6uu_x - 6fu - x(f' - 12f^2)$

$$=g^{\frac{5}{2}}(v_\tau-D_\xi^{-1}v_{\eta\eta}+v_{\xi\xi\xi}+6vv_\xi).$$

可见，(5-4-17)和(5-4-18)给出广义 K-P 方程到 K-P 方程的变换. 这时，

$$\tau_t=g^{\frac{3}{2}},$$

$$T=g.$$

由上一节中有关 K-P 方程的讨论，应用本节中的定理就能得到广义 K-P 方程的对称及其李代数：

$$K_0=\frac{1}{3}Tv_\xi=\frac{1}{3\sqrt{g}}(u_x-f),$$

$$K_1=\frac{2}{3}Tv_\eta=\frac{2}{3}u_y,$$

$$K_2=g^{\frac{5}{2}}(g^2D^{-1}u_{yy}-u_{xxx}-6uu_x+6fu+6xfu_x-6xf^2),$$

$$K_3=g^{-1}\left(\frac{4}{3}g^2D^{-1}u_{yy}-u_{yyx}-8(u_x-f)D^{-1}u_y-16(u-xf)u_y\right),$$

$$\tau_0=K_0\int g^{\frac{3}{2}}dt-\frac{1}{18},$$

$$\tau_1=K_1\int g^{\frac{3}{2}}dt+yK_0,$$

$$\tau_2=K_2\int g^{\frac{3}{2}}dt+yK_1+xg^{\frac{1}{2}}K_0+\frac{2}{3}(u-xf),$$

$$\tau_3=K_3\int g^{\frac{3}{2}}dt+yK_2+xg^{\frac{1}{2}}K_1+\frac{4}{3}g^{\frac{1}{2}}D^{-1}u_y,$$

$$K_n=\frac{3}{n}[K_{n-1},\ \tau_3],\ n\geqslant 3,$$

$$\begin{aligned}\tau_4=&K_4\int g^{\frac{3}{2}}dt+yK_3+xg^{\frac{1}{2}}K_2\\&+g^2(2D^{-1}u_{yy}-4u_{xx}-8(u-xf)^2\\&-2(u_x-f)D^{-1}(u-xf)),\end{aligned}$$

$$\tau_n=\frac{3}{n-4}[\tau_{n-1},\ \tau_3],\ n>4,$$

以及
$$[K_m, K_n]=0,$$
$$[K_m, \tau_n]=\frac{m+1}{3}K_{m+n-2},$$
$$[\tau_m, \tau_n]=\frac{m-n}{3}\tau_{m+n-2},$$
$(m, n=0, 1, 2, \cdots; K_i=0=\tau_i$, 当 $i<0)$.

例 6 Modified K-P(MK-P)方程
$$\varphi_t=D^{-1}\varphi_{yy}-\varphi_{xxx}+6\varphi^2\varphi_x-2\sqrt{3}\,\varphi_x D^{-1}\varphi_y \quad (5\text{-}4\text{-}19)$$
可以由 K-P 方程
$$u_t=D^{-1}u_{yy}-u_{xxx}-6uu_x$$
经推广的 Miura 变换
$$u=\varphi_x-\varphi^2+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}\varphi_y,$$
得到
$$u_t-D^{-1}u_{yy}+u_{xxx}+6uu_x$$
$$u=\varphi_x-\varphi^2+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}\varphi_y\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)$$
$$\times(\varphi_t-D^{-1}\varphi_{yy}+\varphi_{xxx}-6\varphi^2\varphi_x+2\sqrt{3}\,\varphi_x D^{-1}\varphi_y),$$
$\left(D_y=\frac{d}{dy}\right)$, 可见
$$T=D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y.$$
应用上述定理也能从 K-P 方程的对称和李代数得到 MK-P 方程的对称和李代数:
$$K_0=\frac{1}{3}T^{-1}u_x=\frac{1}{3}\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)^{-1}u_x=\frac{1}{3}\varphi_x,$$
$$K_1=\frac{2}{3}T^{-1}u_y=\frac{2}{3}\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)u_y=\frac{2}{3}\varphi_y,$$
$$K_2=T^{-1}(D^{-1}u_{yy}-u_{xxx}-6uu_x)$$
$$=\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)^{-1}u_t$$

$$=D^{-1}\varphi_{yy}-\varphi_{xxx}+6\varphi^2\varphi_x-2\sqrt{3}\,\varphi_x D^{-1}\varphi_y$$

……………………

$$\tau_0=\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)^{-1}\left(\frac{t}{3}u_x-\frac{1}{18}\right)$$

$$=tK_0-\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)^{-1}\frac{1}{18},$$

$$\tau_1=\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)^{-1}\left(\frac{2}{3}tu_y+\frac{y}{3}u_x\right)$$

$$=tK_1+yK_0-\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(D-2\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}D^{-1}D_y\right)^{-1}(x\varphi_x),$$

……………………

$$K_n=\frac{3}{n}[K_{n-1},\ \tau_3],\qquad n\geqslant 2,$$

$$\tau_n=\frac{3}{n-3}[\tau_{n-1},\ \tau_3],\ n\geqslant 4,$$

以及

$$[K_m,\ K_n]=0,$$

$$[K_m,\ \tau_n]=\frac{m+1}{3}K_{m+n-2},$$

$$[\tau_m,\ \tau_n]=\frac{m-n}{3}\tau_{m+n-2},$$

$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ K_i=0=\tau_i,$ 当 $i<0)$.

在这里我们碰到了一个技术性的困难，在 K_n 和 τ_n 的表达式中有时难于将 T^{-1} 用更好的形式表达出来，虽然我们已经制定了原则．

本节中定理的应用范围还可以进一步扩大．例如对未知量为向量函数的方程．

从流形论的观点来看对称，会有助于我们对它的理解．把 (x,t,u) 看作是“流形”上的坐标，给定演化方程的解 $u=u(x,t)$ 可以看作是流形上的一张“曲面”，对称 σ 则可以看作是使解曲面变成解曲面的无穷小变换，即一“向量场”，相应的单参数变换则是对应

于向量场的"流". 因此, 考虑对称的换位运算以及其李代数性质也就十分自然.

变换 $F: (\xi, \tau, v) \to (x, t, v)$ 可以理解为流形上的"坐标变换",或流形到流形的"变换", $T = F'$ 则是相应的切变换. 它"保持向量场以及李乘积", 这就是在本章§4中得到的有关结论. 强对称 Φ 作为作用于向量场上的线性变换, 它的变化规律自然就是经过 T 的相似变换. 这样,所有的结论便一目了然.

当然, 有关演化方程的研究也给几何理论提出新的课题. 科学研究也正是这样发展的①.

① 顾新身和刘启铭同志曾阅读本章书稿并提出了不少宝贵意见, 作者对他们表示感谢.

参考文献

[1] A. S. Fokas and B. Fuchssteiner, On the structure of sympletic operators and herditary symmetries, Lett, Nuovo Cimento, 28 (1980), 299~303.

[2] Tian Chou, Symmetries and a hierarchy of the general KdV equation, J. Phys, A. Math. Gen, 2 (1987), 309~366.

[3] H. H. Chen, Y. C. Lee and G. C. Zhu, Symmetries and Integrability of Cylinclrical KdV equation, Plasma Preprint, UMLPF, 1984, 85~107.

[4] 李翊神，朱国城，一个谱可变演化方程的对称，科学通报，19 (1986)，1449~1453.

[5] 李翊神，朱国城，可积方程新的对称、李代数及谱可变的演化方程(I)，中国科学.

[6] H. H. Chen and Y. C. lee, On a new hierarchy of Symmetries for the Kado mtsev-Petviashvilli Equation, Physica, 90 (1983), 439~445.

[7] B. Fuchssteiner, Mastersymmetries, Higher-Order time-dependent Symmetries and Conserved densities of nonlinear evolution equatrions, Prog, Theo. Phys, 70 (1983), 1508~1522.

[8] H. H. Chen, Y. C. Lee and G. C. Zhu, Symmetries and Lie algebra for the Kadomtsev-Petviashvilli equation, Plasma Preprint UMLPF, 1984, 85~106.

[9] D.Daviol, N. Kamran, D. levi and P. Winternitz, Symmetry reductrion for K-P equation using a Leep algebra, J. Math. Phys. 27 (1986), 1225~1237.

[10] P. M. Santiniand, A. S. Fokas, Symmetries and bi-hamiltonian structure of 2+1 dimensioanl Systems, Preprint, 1986.

[11] Li Yishen and Zhu Guocheng, New Set of Symmetries of the integrable equations, Lie algebra and Non-Isospectral evolution equations (II): AKNS System, J. Phys. A. Math. Gen, 19 (1986), 3713~3725.

[12] Cheng Yi and Li Yishen, Symmetries and Constants of motion for new AKNS hierarchies, Preprint, USTC, 1986.

[13] Cheng Yi and Li Yishen, Symmetrics and constants of motion for new hierarchy of the K-P equations, Preprint, USTC, 1986.

[14] A. S. Fokas, A symmetry approach to exactly soloable evolution equation, J. Math. Phyo, 21 (1980), 1318~1325.

[15] A. S. Fokas and R. A. Anderson, On the use of isospectral eigenvalue problem for obtaining hereditary symmetries for Hamiltonian systems, J.

Math. Phys, 22 (1982), 1066~1073.

[16] B. Fuchsstein r and A. S. Fokas, Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries, Physica, 40 (1981), 47~66.

[17] F. Gonzalez-Gascon, Notes on symmetries of systems of differential equations, J. Math. Phys, 18 (1977), 1763~1767.

[18] M. Lakshmann and K. M. Tamizhmani, Lie Bäcklund symmetries of certain nonlinear evolution equations under pertubation around their solution, J. Math, Phys, 26 (1985), 1189~1200.

[19] 李翊神,一类发展方程谱的变形,中国科学,15 (1985), 385~393.

[20] Li Yishen and Cheng Yi, Symmetries and constants of motion for new KdV hierarchies, Preprint, USTC, 1986.

[21] 李勇,胡星标,一些非线性演化方程的新的对称,同济大学, 1986.

[22] M. Leo, R. A. Leo, G. Soliani, L. Solobrino and G. Moucarella, Symmetry properties and bi-hamiltonion structures of the Todo Lattice, Lett. Math, Phys, 8 (1984), 267.~722

[23] W. Oevel and A. S. Fokas, Iafinitely many commuting symmetri s and construte of mation evolutions, J. Math. Phys, 24 (1984), 918~922.

[24] 田畴, Burger 方程的新的强对称,对称及其李代数,中国科技大学, 1986.

[25] 田畴,方程的变换和对称的变换,中国科技大学, 1987.

第六章

Kac-Moody 代数与可积系

屠规彰

§1 Lax 意义下的可积系

经典力学中著名的 Liouville 定理(见本章末[1])指出：一个自由度为 n 的 Hamilton 系，若具有 n 个互相对合的首次积分，则可写出系统运动轨迹，即解的明显表达式来. 对于无限维 Hamilton 系，情形复杂得多，无限多个彼此对合的首次积分之存在性，并不足以引出解的显式来，因此对无限维可积系，迄今没有一个确切的定义.

近二十年来，孤立子理论的兴起，对无限维 Hamilton 系的研究给予了极大的推动，一些具有广泛应用背景的非线性偏微分方程，及场论中的一些基本模型(前者如 KdV 方程，后者如自对偶杨—Mills 场)，已证明可以找到它们的一列无限多个互相对合的首次积分，并已找到了它们的一类丰富多采的称为孤立子的特解. 这类方程具有许多美妙的代数与几何性质，其中最根本的是它们可以写成一对线性问题

$$\psi_x = U\psi,\ \psi_t = V\psi \tag{6-1-1}$$

的可积条件 $\psi_{xt} = \psi_{tx}$，或即

$$U_t - V_x + [U,\ V] = 0, \tag{6-1-2}$$

其中$[U, V]=UV-VU$表示阵U和V的交换子. (6-1-1)式中方程$\psi_x=U\psi$常可改写成$L\psi=\lambda\psi$形式,其中L为某个线性算子,λ为谱参数. 此时,(6-1-1)式常记成

$$L\psi=\lambda\psi,\ \psi_t=A\psi. \tag{6-1-3}$$

它的可积条件在等谱(即$\lambda_t=0$)条件下为

$$L_t=[A,\ L]. \tag{6-1-4}$$

这一方程称为 Lax 方程或 Lax 表示. (6-1-2)与(6-1-4)乃非线性方程的两种不同表现形式. 基于孤立子理论的成功,我们称一个可以写成(6-1-2)或(6-1-4)形式的方程(或场论模型等)为 Lax 意义下的(完全)可积系.

由上述定义,可积系理论中的核心问题是: (i) 给定一个非线性方程,判断它是否可积,即寻求它的 Lax 表示(6-1-4)或(6-1-2); (ii) 找出尽可能多的可积系,亦即寻求尽可能多的U,V或L,A,使(6-1-2)或(6-1-4)表现为一个有意义的方程. 问题(i)的求解非常困难,迄今较为成功的是延拓结构法(见本章末[2]),应用时需作大量计算. 1985年,谷超豪,胡和生(见本章末[3])基于曲面论中的基本方程提出了一类方程的可积性准则,是这一方向上的一项重要进展. 问题(ii)的求解同样十分困难. 乍看之下,似乎随意选择一对U, V或L, A都可引出方程(6-1-2)或(6-1-4),其实不然. 因为(6-1-2)与(6-1-4)都是U, V (或L, A)中所含'位势'(即非线性方程的应变元)的一组超定方程,在很多情形下,或者无解,或者只有平凡解,即恒为零的解.

本文介绍如何以 Kac-Moody 代数为工具,系统地构造 Lax 方程(6-1-4)的方法,这一研究方向是1980年前后发展起来的,已引起了国内外学者的极大兴趣,有诱人的发展前景.

为了便于不熟悉李代数理论的读者阅读起见,我们在下面§1节中简要介绍 Kac-Moody 代数的要点,然后在§2及§3中分别介绍这一方向上的两项重要工作,即 Дринфельд 与 Соколов 的

广义 KdV 方程理论及 Sato, Date 等人发展的 τ- 函数方法. 在 §4 中, 简要介绍了这一方向上的其它工作, 特别是国内学者的工作.

本文并不纯粹是列述他人工作的综述文. 在 §3 节中加入了我们对可积系及其守恒量构成的一种方式所作的归纳(命题 4~7); 在 §4 中, 由于 Date 等人的原文晦涩难懂, 我们在引述时作了一些改变. 例如在引出关键的双线性等式(命题 6)时, 我们给出了引出这一等式的引理的组合学证明(命题 5), 舍弃了 Newell(见本章末[4])认为"很难理解"的原文以 δ-函数为工具给出的证明, 并给出了 τ 函数所满足的方程的明显形式(6-4-66), 等等.

§2 Kac-Moody 代数简介

2.1 单李代数 A_l

如所周知, 矩阵乘法是不可交换的: 当 A, B 为两个 n 阶矩阵时, 一般而言 $AB \neq BA$. 我们令

$$[A, B] = AB - BA, \tag{6-2-1}$$

称为阵 A 与 B 的交换子. 容易验证运算 $[,]$ 有次之性质:

(1)(反对称性) $[A, B] = -[B, A]$;

(2)(双线性) $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$ $a, b \in \boldsymbol{C}$ (此处及下面 $\boldsymbol{C}$ 表示复数域);

(3)(Jacobi 等式) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

将上述运算予以推广, 便引出次之定义:

定义 1 设 $\mathfrak{G}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上线性空间, 若对任两元 $x, y \in \mathfrak{G}$, 都有确定的元 $[x, y] \in \mathfrak{G}$ 与之对应, 使得运算 $[x, y]$ 具有上述三条性质, 则称 $\mathfrak{G}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的李代数, 并称 $[x, y]$ 为 x 与 y 的交换子. 李代数 $\mathfrak{G}$ 的基与维数, 即 $\mathfrak{G}$ 作为线性空间的基与维数, 若对任两元 x, y

$\in \mathfrak{G}$，均有$[x, y]=0$，则称 $\mathfrak{G}$ 为可交换的李代数。

对 $\mathfrak{G}$ 的两个线性子空间 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$，我们记

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{N}=\{x+y \mid x\in\mathfrak{M},\ y\in\mathfrak{N}\},$$

$$[\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}]=\{[x,\ y] \mid x\in\mathfrak{M},\ y\in\mathfrak{N}\}.$$

若 $\mathfrak{G}$ 的子空间 $\mathfrak{G}_1$，具有性质：$[\mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{G}_1]\subset\mathfrak{G}_1$，则称 $\mathfrak{G}_1$ 为 $\mathfrak{G}$ 的子代数；若$[\mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{G}]\subset\mathfrak{G}_1$，则称 $\mathfrak{G}_1$ 为 $\mathfrak{G}$ 的理想．若 $\mathfrak{G}$ 中不含非平凡不可交换的理想 $\mathfrak{G}_1$(即 $\mathfrak{G}_1\neq\{0\}$，$\mathfrak{G}$，且存在 $x,\ y\in\mathfrak{G}$ 有 $[x,\ y]\neq 0$)，则称 $\mathfrak{G}$ 为单李代数．若 $\mathfrak{G}$ 可分解成单李代数 $\mathfrak{G}_i$ 的直和 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{G}_n$，且每个 $\mathfrak{G}_i$ 为 $\mathfrak{G}$ 的理想，则称 $\mathfrak{G}$ 为半单李代数．

$\boldsymbol{C}$ 上单李代数的分类已获彻底的解决，计有 A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4 与 G_2 九种．下面以 A_l 为例作一说明。

$\boldsymbol{C}$ 上 n 阶阵全体关于交换子运算 (6-2-1) 构成李代数，记作 $gl(n,\boldsymbol{C})$．它的子代数称为矩阵李代数或线性李代数．这是李代数中最为重要的一类，从某种意义上说，它包括了所有有限维李代数．

李代数 A_1(又记作 $Sl(2,\ \boldsymbol{C})$)是最简单的一种线性李代数，也是孤立子理论中用到最多的一种．它由全体迹为零的二阶阵组成

$$A_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix} \middle| a,\ b,\ c\in\boldsymbol{C}\right\}.$$

它的一组基为

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

容易计算得它们间的交换子为

$$[E,\ F]=H,\ [H,\ E]=2E,\ [H,\ F]=-2F. \quad (6\text{-}2\text{-}2)$$

一般 A_l(又记作 $sl(l+1,\ \boldsymbol{C})$)定义为

$$A_l=\{X \mid X\in sl(l+1,\ \boldsymbol{C}),\ \mathrm{tr}X=0\}.$$

这里 $\mathrm{tr}X=\sum X_{ii}$ 表示阵 $X=(X_{ij})$ 的迹．易知，A_l 的维数为$(l+1)^2-1$，它的一组基为

$$E_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots, l+1, i\neq j), \tag{6-2-3}$$

$$H_1=E_{11}-E_{22}, H_2=E_{22}-E_{33}, \cdots, H_l=E_{ll}-E_{l+1,l+1}.$$

其中 $E_{ij}=(\delta_{ki}\delta_{lj})$ 即第 i 行, j 列上为 1 余为 0 的阵. 容易验证:

$$[E_{ij}, E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{li}E_{kj}. \tag{6-2-4}$$

因 $H_1, \cdots, H_l$ 均为对角阵, 故它们张成 A_l 中的一个 l 维可交换子代数 $\mathfrak{h}$, 它由迹为零的对角阵全体组成. 设 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$(作为线性空间)的对偶空间, 定义 $\varepsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ 如下

$$\langle\varepsilon_i, \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_{l+1})\rangle=a_i, \tag{6-2-5}$$

(此处及下面$\langle f, x\rangle$ 或 $\langle x, f\rangle$表示线性泛函$f\in\mathfrak{h}^*$在元$x\in\mathfrak{h}$上的取值$f(x)$). 进而令

$$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1} \quad (i=1, \cdots, l), \tag{6-2-6}$$

则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 构成 $\mathfrak{h}^*$ 中的一组基. 我们记阵

$$\mathring{A}=(\langle H_i, \alpha_j\rangle)_{i,j=1}^{l}. \tag{6-2-7}$$

由定义 $\langle\varepsilon_j, E_{ii}\rangle=\delta_{ij}$, 易见

$$\langle H_i, \alpha_j\rangle=\langle E_{ii}-E_{i+1,i+1}, \varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}\rangle=$$
$$=2\delta_{ij}-\delta_{i,j+1}-\delta_{i+1,j},$$

因此

$$\mathring{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6-2-8}$$

此阵 $\mathring{A}$ 称为李代数 A_l 的 Cartan 阵(当 $l=1$ 时, $\mathring{A}=(2)$). 由此可见, $\mathring{A}=(A_{ij})$具有次之性质:

(1) $A_{ii}=2$;

(2) A_{ij} $(i\neq j)$ 为非正整数;

(3) $A_{ij}=0\Rightarrow A_{ji}=0$.

此外，还可验证 A_l 的 Cartan 阵(6-2-8)的另一重要性质: $\mathring{A}$ 的每一主子式(包括 $\mathring{A}$ 自身)的行列式都大于零. 换言之，$\mathring{A}$ 为正定矩阵. 由此特别可见，$\mathring{A}$ 非奇，即 $\mathring{A}$ 的秩数等于 l(记号 A_l 的下标 l 即反映了这一事实).

引用 $\mathfrak{h}$, 可将 $\mathfrak{G}=A_l$ 作如下直和分解:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{h}\dotplus(\bigoplus_{i\neq j}\boldsymbol{C}E_{ij}) \tag{6-2-9}$$

这一分解相当于将迹为零的阵分解成对角阵与对角元为零的阵之和.

今记

$$E_i=E_{i,i+1},\ F_i=E_{i+1,i}\quad(i=1,\ \cdots,\ l), \tag{6-2-10}$$

则由(6-2-4)式有

$$[E_i,\ F_j]=[E_{i,i+1},\ E_{j+1,j}]=\delta_{ij}(E_{ii}-E_{i+1,i+1}),$$

由(6-2-3)即得

$$[E_i,\ F_j]=\delta_{ij}H_i. \tag{6-2-11}$$

此外，我们还有

$$(adE_i)^{1-A_{ij}}E_j=0,\ (adF_i)^{1-A_{ij}}F_j=0\quad(i\neq j). \tag{6-2-12}$$

这里 $(adA)B=[A,\ B]$. 实际上，当 $|j-i|\geqslant2$ 时，$A_{ij}=0$, 故

$$(adE_i)^{1-A_{ij}}E_j=(adE_i)E_j=[E_i,\ E_j]=[E_{i,i+1},\ E_{j,j+1}]=0;$$

而当 $|j-i|=1$ 时 $A_{ij}=-1$, 从而

$$(adE_i)^{1-A_{ij}}E_j=[E_i,\ [E_i,\ E_j]]=[E_i,\ [E_i,\ E_{i+1}]]=0.$$

容易验证，对 $H\in\mathfrak{h}$, $H=\mathrm{diag}(a_1,\ \cdots,\ a_{l+1})$ 有

$$[H,\ E_i]=\left[\sum_{j=1}^{l+1}a_jE_{jj},\quad E_{i,i+1}\right]=(a_i-a_{i+1})E_i,$$

由(6-2-6)即见

$$[H,\ E_i]=\langle H,\ \alpha_i\rangle E_i. \tag{6-2-13)$^+$}$$

相仿有

$$[H,\ F_i]=-\langle H,\ \alpha_i\rangle F_i \tag{6-2-13)$^-$}$$

一般容易验证$[H, E_{ij}]=(a_i-a_j)E_{ij}$，故

$$[H, E_{ij}]=\langle H, \alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1}\rangle E_{ij} \quad (i<j), \tag{6-2-14$^+$}$$

$$[H, E_{ij}]=-\langle H, \alpha_j+\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_{i-1}\rangle E_{ij} \quad (i>j). \tag{6-2-14$^-$}$$

我们称$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$为李代数$A_l$的素根，并记

$$\mathring{Q}=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{Z}\alpha_i, \quad \mathring{Q}_+=\sum_{i=1}^{l}\boldsymbol{Z}_+\alpha_i.$$

(此处及下面$\boldsymbol{Z}$表示整数集合，$\boldsymbol{Z}_+$表示非负整数集合)．对$\alpha=\sum k_i\alpha_i\in\mathring{Q}$，记

$$ht\alpha=\sum k_i,$$

称为α的高．又记

$$\mathring{\mathfrak{G}}_{\alpha}=\{x\in\mathring{\mathfrak{G}}\mid[H, X]=\langle H, \alpha\rangle X, \forall H\in\mathfrak{h}\}$$

称为附属于α的根空间．当$\mathring{\mathfrak{G}}_{\alpha}$含有非零元时，称$\alpha$为根．由(6-2-14)$^{\pm}$可见，

$\boldsymbol{C}E_{ij}$, $(i<j)$，为附属于$\alpha=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1}$的根空间，

$\boldsymbol{C}E_{ij}$, $(i>j)$，为附属于$\alpha=-(\alpha_j+\cdots+\alpha_{i-1})$的根空间．

并不是$\mathring{Q}$中任何元都是根．例如，可以证明$k\alpha_j(k\in\boldsymbol{Z}, k\neq\pm1)$必不是根，又如$\alpha=\alpha_1-\alpha_2$也不是根，亦即不难验证

$$[H, X]=\langle H, \alpha_1-\alpha_2\rangle X, \forall H\in\mathfrak{h}\Rightarrow X=0.$$

一般，可以证明根要么是正根$\alpha=\sum\boldsymbol{Z}_+\alpha_i$，要么是负根$\alpha=-\sum\boldsymbol{Z}_+\alpha_i$．由分解式(6-2-9)及$\boldsymbol{C}E_{ij}$为根空间这一事实，我们得到$\mathring{\mathfrak{G}}=A_l$的所谓 Cartan 分解

$$\mathring{\mathfrak{G}}=\mathfrak{h}\oplus\Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathring{\Delta}}\mathring{\mathfrak{G}}_{\alpha}\Big)=\mathfrak{h}\oplus\Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathring{\Delta}_+}\mathring{\mathfrak{G}}_{\alpha}\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathring{\Delta}_-}\mathring{\mathfrak{G}}_{\alpha}\Big), \tag{6-2-15}$$

其中$\mathring{\Delta}$, $\mathring{\Delta}_+$, $\mathring{\Delta}_-$分别表示根，正根及负根的全体．由(6-2-15)又可推知$\mathring{\Delta}$中最高(即$ht\alpha$最大)的根为

$$\theta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l, \tag{6-2-16}$$

它的根高为 $ht\theta=l$，相应的根空间为 $\boldsymbol{C}E_{1,l+1}$。

注意到
$$\mathring{n}_+\equiv\bigoplus_{\alpha\in\mathring{\Delta}_+}\mathring{\mathfrak{G}}_\alpha=\bigoplus_{i<j}\boldsymbol{C}E_{ij},$$
$$\mathring{n}_-=\bigoplus_{\alpha\in\mathring{\Delta}_-}\mathring{\mathfrak{G}}_\alpha=\bigoplus_{i>j}\boldsymbol{C}E_{ij},$$
分别为严格上三角与下三角阵全体，故分解式(6-2-15)无非是将阵 A 分解成对角阵，严格上三角与下三角阵之和的一种表述方式。

容易归纳证明
$$[E_i,\ E_{i+1},\ \cdots,\ E_j]=E_{i,j+1},\ [F_j,\ F_{j-1},\ \cdots,\ F_i]=F_{j+1,i},$$
(此处及下面简记 $[X_1,\ \cdots,\ X_j]=[X_1,\ [X_2,\ \cdots,\ [X_{j-1},\ X_j]\cdots]]$)，因此，任一 $E_{ij}(i\neq j)$ 可由 E_i 或 F_i（经由交换子运算）生成，于是整个李代数 A_l 由 $3l$ 个生成元 E_i，F_i 及 $H_i(i=1,\ \cdots,\ l)$ 生成．由(6-2-11)、(6-2-12)及(6-2-13)知，这些生成元间的交换子关系为
$$[H_i,\ H_j]=0,\ [E_i,\ F_j]=\delta_{ij}H_i,$$
$$[H_i,\ E_j]=A_{ij}E_j,\ [H_i,\ F_j]=-A_{ij}F_j,$$
$$(adE_i)^{1-A_{ij}}E_j=0,\ (adF_i)^{1-A_{ij}}F_j=0,\ (i\neq j),$$
其中 (A_{ij}) 为 A_l 的 Cartan 阵(6-2-8)．

在经典李代数理论中，证明了任一半单李代数中均可找到具有上述性质的一组生成元。Kac-Moody 代数正是从一组类似的生成元入手建立起来的．

李代数 $\mathring{\mathfrak{G}}=A_l$ 理论中还有一点需一提的是它的对称不变双线性形（称为 Killing-Cartan 形）：
$$(X\,|\,Y)\equiv\mathrm{tr}(XY),\ X,\ Y\in\mathring{\mathfrak{G}}=A_l.\qquad(6\text{-}2\text{-}17)$$
不难证明 $(X\,|\,Y)$ 具有性质：

(1)（对称性）　$(X\,|\,Y)=(Y\,|\,X)$；

(2)（双线性）　$(aX+bY\,|\,Z)=a(X\,|\,Z)+b(Y\,|\,Z)$，
$a,\ b\in\boldsymbol{C}$，

(3)（不变性）　$([X,\ Y]\,|\,Z)=(X\,|\,[Y,\ Z])$．

其中(2)是显然的，(1)与(3)是迹的性质 $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$ 的直接推论.

2.2 仿射李代数 $A_l^{(1)}$

本节我们着手将有限维线性李代数 $\mathring{\mathfrak{G}}=A_l$ 扩充成无限维仿射(affine)李代数 $\mathring{\mathfrak{G}}=A_l^{(1)}$.

扩充的进一步是构成圈(loop)代数 $L(\mathring{\mathfrak{G}})$.

$$L(\mathring{\mathfrak{G}})=L\otimes\mathring{\mathfrak{G}}, \tag{6-2-18}$$

其中
$$\begin{aligned}L&=\boldsymbol{C}(\lambda,\ \lambda^{-1})\\&=\{\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\lambda^k\,|\,c_k\in\boldsymbol{C},\ \text{仅有限多个}\ c_k\neq0\}\end{aligned}$$

为 $\boldsymbol{C}$ 上 λ 的 Laurent 多项式的全体. $L(\mathring{\mathfrak{G}})$ 是 $\lambda^m\otimes X\ (X\in\mathring{\mathfrak{G}})$ 线性组合

$$\begin{aligned}L(\mathring{\mathfrak{G}})&=\{X(\lambda)\,|\,X(\lambda)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}X_k\otimes\lambda^k,\ X_k\in\mathring{\mathfrak{G}},\ \text{仅有限多个}\ X_k\ \text{非零}\},\end{aligned}$$

$L(\mathring{\mathfrak{G}})$ 中元的交换子关系为

$$[\lambda^m\otimes X,\ \lambda^n\otimes Y]=\lambda^{m+n}\otimes[X,\ Y]. \tag{6-2-19}$$

实际上，$L(\mathring{\mathfrak{G}})$ 可以看成是分量为 λ 的 Laurent 多项式的 $\mathring{\mathfrak{G}}=A_l$ 中矩阵的全体. 在孤立子理论中，由谱问题 $\psi_x=U(x,\ \lambda)\psi$ 引出演化方程族时，阵 $U(x,\ \lambda)$ 实际上即取自 $L(\mathring{\mathfrak{G}})$，此时 λ 是作为谱参数出现的.

$\mathring{\mathfrak{G}}=A_l$ 上的对称不变双线性形可以扩充到 $L(\mathring{\mathfrak{G}})$ 上去,

$$(\lambda^mX\,|\,\lambda^nY)=\lambda^{m+n}(X\,|\,Y). \tag{6-2-20}$$

扩充的第二步是在 $L(\mathring{\mathfrak{G}})$ 中加入中心元(center) c 而扩充成 $\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$，这一步称作中心扩张

$$\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})=L(\mathring{\mathfrak{G}})\oplus\boldsymbol{C}c. \tag{6-2-21}$$

$\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$ 中元的交换子关系为

$$[\lambda^m\otimes X,\ \lambda^n\otimes Y]=\lambda^{m+n}[X,\ Y]+m\delta_{m+n,0}(X\,|\,Y)c, \tag{6-2-22}$$

(c 与 $\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$ 中所有元的交换子为零)．容易验证，上述定义的[,]满足 Jacobi 等式，且具有线性及反称性，故 $\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$ 关于(6-2-22)构成李代数．

为了构成一般的仿射李代数，我们还需作第三步扩张，即在 $\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$ 中加入导子 $d=\lambda d/d\lambda$ 而扩张成 $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$．但在§2、§3 中我们只用到 $\tilde{L}(\mathring{\mathfrak{G}})$，故在此不作细述．在§4 中，我们将回到这一步扩张中来，李代数 $\tilde{L}(A_l)$ 记作 $A_l^{(1)}$，称为仿射李代数．

今令

$$
\begin{gathered}
e_0=\lambda\otimes E_{l+1,1},\ f_0=\lambda^{-1}\otimes E_{1,l+1},\\
h_0=c-\sum_{i=1}^{l}h_i,\ h_i=1\otimes H_i,\ (i=1,\ \cdots,\ l),\qquad (6\text{-}2\text{-}23)\\
e_i=1\otimes E_i,\ f_i=1\otimes F_i,\quad (i=1,\ \cdots,\ l).
\end{gathered}
$$

并记

$$
\mathfrak{H}=\mathfrak{h}+Cc. \qquad (6\text{-}2\text{-}24)
$$

$\mathfrak{h}$ 上的线性泛函 α_i(见(6-2-6)式)可以扩充到 $\mathfrak{H}$ 上，只须补充定义

$$
\langle\alpha_i,\ c\rangle=0\quad (i=1,\ \cdots,\ l), \qquad (6\text{-}2\text{-}25)
$$

最后令

$$
\alpha_0=-\theta. \qquad (6\text{-}2\text{-}26)
$$

这样，便得到李代数 $\tilde{L}(A_l)$ 中的 $3(l+1)$ 个元 e_i, f_i, $h_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ l)$，及 $l+1$ 个线性泛函 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l$．与 A_l 中情形一样，我们称 $l+1$ 阶阵

$$
A=(\langle h_i,\ \alpha_j\rangle)_{i,j=0}^{l}
$$

为 $A_l^{(1)}$ 的(广义)Cartan 阵．由作法可见，它是从 A_l 的 Cartan 阵添上第 0 行与第 0 列而得．此时，

$$
\begin{aligned}
\langle h_0,\ \alpha_0\rangle&=\left\langle c-\sum_{i=1}^{l}H_i,\ -\sum_{j=1}^{l}\alpha_j\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{l}\langle H_i,\ \alpha_j\rangle\\
&=(\mathring{A}\text{ 中元之和})=2,
\end{aligned}
$$

相仿容易计算得当 $j>1$ 时，

$$
\langle h_0,\ \alpha_j\rangle=-\sum_{i=1}^{l}\langle H_i,\ \alpha_j\rangle=-(\mathring{A}\text{ 中第 } j\text{ 列元之和}),
$$

$$\langle h_j,\ \alpha_0\rangle = -\sum_{i=1}^{l}\langle H_j,\ \alpha_i\rangle = -(\mathring{A}\text{ 中第 } j \text{ 行元之和}),$$

由此推知 $A_l^{(1)}$ 的广义 Cartan 阵为

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},\quad l=1; \qquad (6\text{-}2\text{-}27)^+$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -1\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad -1 \\ -1 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathring{A} \\ 0 & \\ -1 & \end{bmatrix},\quad l>1. \qquad (6\text{-}2\text{-}27)^-$$

由作法可见，A 的第 0 行是其余各行之和反号，因此

$$\det A = 0. \qquad (6\text{-}2\text{-}28)$$

注意到 A 的 l 阶主子式 $\mathring{A}$ 非奇，因此 A 的秩数仍为 l. 不难证明，A 的任一真主子式大于零.

我们进而证明，$h_i,\ e_i,\ f_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ l)$ 间的交换子关系就如 $H_i,\ E_i$ 与 F_i，即成立

$$[h_i,\ h_j]=0,\ [e_i,\ f_j]=\delta_{ij}h_i, \qquad (6\text{-}2\text{-}29a)$$

$$[h_i,\ e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i,\ f_j]=-a_{ij}f_j, \qquad (6\text{-}2\text{-}29b)$$

$$(ade_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\ (adf_i)^{1-a_{ij}}f_j=0\quad (i\neq j). \qquad (6\text{-}2\text{-}29c)$$

上面诸式中 $i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ l$; $A=(a_{ij})$ 为广义 Cartan 阵. 注意到当 $i,\ j\geqslant 1$ 时(6-2-29)式即 $H_i,\ E_i,\ F_i$ 间关系式，故只须对 $i,\ j$

之一为 0 时验证(6-2-29)式即可。我们取两种情形为例验算如下:

$$\begin{aligned}[e_0, f_0] &= [\lambda\otimes E_{l+1,1}, \lambda^{-1}\otimes E_{1,l+1}] \\ &= 1\otimes[E_{l+1,1}, E_{1,l+1}] + (E_{l+1,1}|E_{1,l+1})c \\ &= 1\otimes(E_{l+1,l+1} - E_{11}) + \mathrm{tr}(E_{l+1,1}E_{1,l+1})c \\ &= -(h_1+\cdots+h_l) + c = h_0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ade_0)^{1-a_{01}}e_1 = (ade_0)^2 e_1 &= [e_0, [e_0, e_1]] \\ &= [\lambda\otimes E_{l+1,1}\lambda\otimes E_{l+1,2}] = 0.\end{aligned}$$

2.3 广义 Cartan 阵及其分类

基于上一节对 $A_l^{(1)}$ 的讨论,我们引入定义:

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵,若其元满足条件:

(1) $a_{ii}=2,\ i=1,\ \cdots,\ n$;

(2) a_{ij} 为非正整数, $i\neq j$;

(3) $a_{ij}=0\Rightarrow a_{ji}=0$,

则称 A 为广义 Cartan 阵. 又若存在 A 的行与列的同一次序的置换,使 A 在置换后形如 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = A_1\oplus A_2$, 其中 A_1, A_2 均为方阵,则称 A 为可分解的.

由定义可知,任一广义 Cartan 阵总可经行与列的同一次序之置换化至 $A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_k$ 的形式,其中每个 A_i 均为不可分解的广义 Cartan 阵. 这样,广义 Cartan 阵的分类归结为不可分解广义 Cartan 阵的分类. 对此,我们有

定理 若 A 为不可分解的广义 Cartan 阵,则 A 属于且只属于下述三种类型中的一种.

(i) FIN(有限)型: A 正定,即 A 的任一主子式大于零. 此时必存在 $u>0$, 使得 $Au>0$;

(ii) AFF(仿射)型: A 的所有真主子式大于零,但 $\det A=0$. 此时必存在 $u>0$, 使得 $Au=0$;

(iii) IND(不定)型: 存在 $u>0$, 使得 $Au<0$.

这里我们约定当向量 $v=(v_1, \cdots, v_n)$ 的每个分量 $v_i>0$ 时，记作 $v>0$. $v<0$ 的含义相仿. 在本节中我们提到 A 为 FIN, AFF, IND 型时，均已假设 A 为不可分解的.

关于此定理的证明，可见 Kac 的专著(见本章末[5])，但 Kac 给出的证明中引用了线性不等式论中的一条基本定理(Gordan 引理)，且有几处细节未交代清楚，最近，梁赣平(本章末[6])给出了这一分类定理初等而直接的证明.

设 A 为 FIN 或 AFF 型(广义)Cartan 阵，由于

$$A(i, j)=\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a_{ij} \\ a_{ji} & 2 \end{vmatrix}$$

为 A 的二阶主子式，故由设 $A(i, j)\geqslant 0$ 推知 $a_{ij}a_{ji}\leqslant 4$. 此时我们按下述方式构造 A 的 Dynkin 图 $S(A)$ 如下：

首先在纸上标出 n 个点 $v_1, \cdots, v_n$，其中 n 为阵 A 的阶数，然后在点 v_i 与 $v_j(i\neq j)$ 之间按如下规则连线，

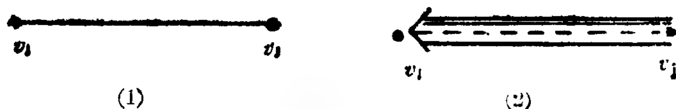


图 6-1

图6-1(1)，若 $|a_{ij}|=|a_{ji}|=1$;

图6-1(2)，若 $|a_{ij}|\geqslant|a_{ji}|$，且 $|a_{ij}|>1$，则由 $|a_{ij}|$ 根线连结 v_i 与 v_j，且画出箭头指向 v_i.

例　由 2.1 段知，李代数 A_l 的 Cartan 阵中 $|a_{i,i+1}|=|a_{i+1,i}|=1$, $a_{ij}=0(|i-j|>1)$，因此，在点 v_i 与 v_{i+1} 间连接一条线，

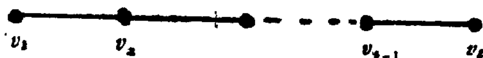
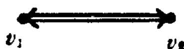


图 6-2

即得 A_l 的 Cartan 阵相应的 Dynkin 图(图6-2).

又如 $A_1^{(1)}$ 的 Cartan 阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. 此时 $|a_{12}|\geqslant|a_{21}|>$

1, 故应在点 v_1 与 v_2 之间画两条线, 箭头指向 v_1. 同样, 由 $|a_{21}|\geqslant|a_{12}|>1$, 又应画出箭头指向 v_2 的两条线, 因此相应的 Dynkin 图为



经过细致的讨论, 可以证明 FIN 型和 AFF 型 Cartan 阵的 Dynkin 图只能取下表中 FIN, AFF-1, AFF-2 及 AFF-3 中所列的几种. 这一事实的证明并不困难. 例如, 当 $n=2$ 时, 不可分解 FIN 型的 Cartan 阵须为 $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$, 此时由 $\det A=4-ab>0$, 知 $ab<4$. 当 $a=0$ 时 $b=0$, 此时 A 可分解, 故 a, $b\neq0$, 因此 a, b 的取值只能有下面三种可能:

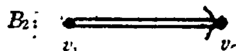
(1) $ab=1$, 即 $a=b=-1$, 此时,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

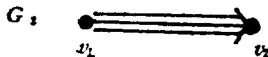
为单李代数 A_2 的 Cartan 阵, 它的 Dynkin 图由上述为



(2) $ab=2$, 即 $a=-1$, $b=-2$(或 $a=-2$, $b=-1$), 此时 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, 它对应于另一类单李代数 B_2, 其 Dynkin 图为



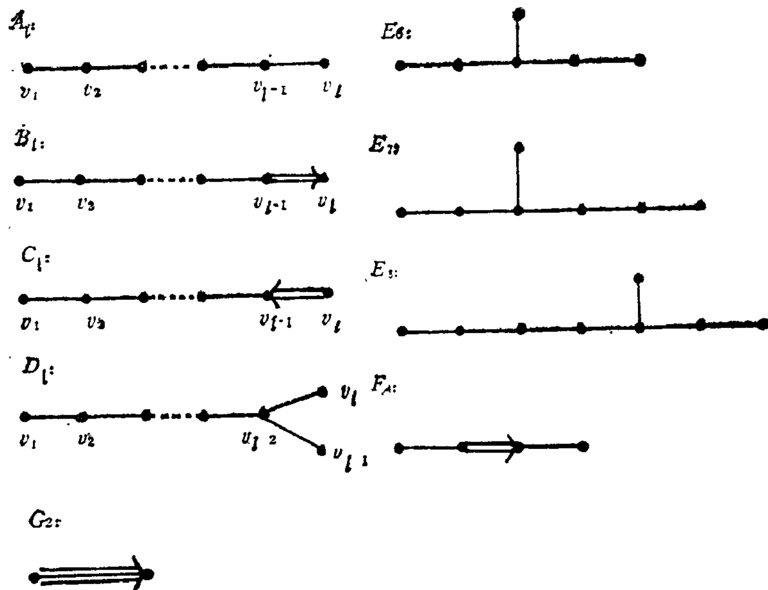
(3) $ab=3$, 即 $a=-1$, $b=-3$(或 $a=-3$, $b=-1$), 此时 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, 它对应于李代数 G_2, 其 Dynkin 图为



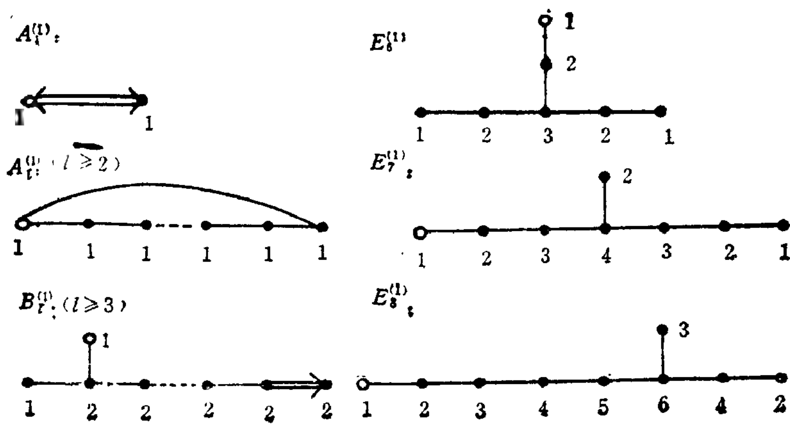
对于 $n=2$ 的 AFF 型 Cartan 阵 $A=\begin{pmatrix}2 & a\\ b & 2\end{pmatrix}$, 此时由 $\det A$

$=0$ 推知 $ab=4$，故有解 $a=b=-2$ 及 $a=-1, b=-4$（或 $a=-4$，$b=-1$），分别引出 $A_1^{(1)}$ 及 $A_2^{(2)}$ 型 Cartan 阵的 Dynkin 图如下：

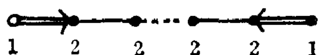
AFF-1 型



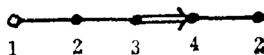
AFF-1 型



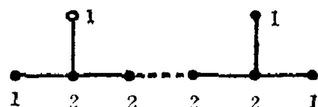
$C_l^{(1)}$: $(l\geqslant 2)$



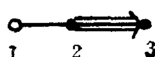
$E_4^{(1)}$:



$D_l^{(1)}$: $(l\geqslant 4)$



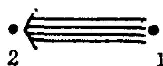
$G_2^{(1)}$:



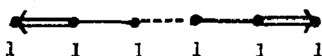
注：$A_l^{(1)}$, $B_l^{(1)}$, $C_l^{(1)}$, $D_l^{(1)}$ 图中均为 $l+1$ 个点

AFF-2 型

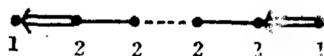
$A_2^{(2)}$:



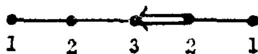
$D_{l+1}^{(2)}$: $(l\geqslant 2)$



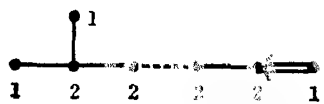
$A_{2l}^{(2)}$: $(l\geqslant 2)$



$E_6^{(2)}$:



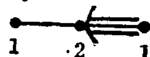
$A_{2l-1}^{(2)}$ $(l\geqslant 3)$



注：$A_{2l}^{(2)}$, $A_{2l-1}^{(2)}$, $D_{l+1}^{(2)}$ 图中均为 $l+1$ 个点

AFF-3 型

$D_4^{(3)}$:



我们对所列 Dynkin 图表作如下几点说明：

(1)　Cartan 阵与其 Dynkin 图一一对应．即给出 A 可唯一确定其 Dynkin 图 $S(A)$，反之亦然．例如，由 $D_4^{(3)}$ 的图可见有

$|a_{12}|=|a_{21}|=1$, $|a_{23}|=3$, $|a_{32}|=1$, 故 $D_4^{(3)}$ 型图对应的 Cartan 阵为

$$D_4^{(3)}:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6-2-30}$$

(2) AFF 型图中各顶点处的标数 a_i 即构成 $Au=0$ 的解 u, 如 $D_4^{(3)}$ 中各点的标数为 $(1, 2, 1)$, 相应的 Cartan 阵如上述为(6-2-30), 则有

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

容易验证, $(1, 2, 1)$ 正是此 Cartan 阵(6-2-30)中第一行诸元的代数余子式. 这些标数之和 $h=\sum_{i=0}^{l} a_i$ 称为 Coxeter 数.

(3) 不难证明, 若 A 为 AFF 型 Cartan 阵, 则其转置 ${}^tA$ 亦为 AFF 型 Cartan 阵, 与它们相应的 Dynkin 图 $S(A)$ 与 $S({}^tA)$ 称为互相对偶. 如 $G_2^{(1)}$ 与 $D_4^{(3)}$ 型 Cartan 阵互为转置. $S(A)$ 与 $S({}^tA)$ 的关系是: 将 $S(A)$ 中箭头的方向倒过来便得 $S({}^tA)$. 若 $S(A)$ 中点的标数为 a_i, 则 $S({}^tA)$ 中点的标数记为 $a_i^\vee$. 由此定义可见, $A^t(a_1, \cdots, a_n)=0$ 及 $(a_1^\vee, \cdots, a_n^\vee)A=0$.

(4) AFF 型 Dynkin 图的一个重要特征, 是从图中去掉任意一点(及相应的连线)即得一个或几个 FIN 型 Dynkin 图. 例如, 从图6-3

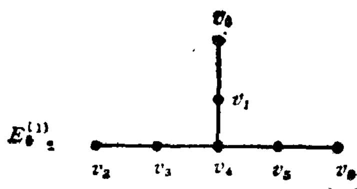


图 6-3

中分别除去点 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 后得到 E_6, A_5 与 A_1 之并, E_6, A_5 与 A_1 之并, 三个 A_2 之并.

我们在 AFF-1 型图中特别标出了顶点 v_0, 用 ∘ 表示 (其余各点用 · 表示), 去掉 v_0 即得相应的 FIN 型图. 如 $G_2^{(1)}$ 图中去掉点 ∘ 后即到 G_2 图. 因此, AFF-1 型 Dynkin 图可从 FIN 型图补入一点 v_0 得来. 但这种加入一点的方式不是随意的. 须使增补一点后的图中去掉任意一点都只引出 FIN 型图. 例如, 图 6-4 中的加入方式是不允许的, 因为此时去掉 E_6' 图中右侧端点后得到的不是FIN 型图.



图 6-4

有限型及仿射型 Cartan 阵 A 有一重要性质, 即可对称化. 确切地说, 即存在非奇对角阵 D, 使得 $A=DB$, 其中 B 为对称阵. 一般, 若 A 为仿射型 Cartan 阵, 相应的 Dynkin 图 $S(A)$ 及 $S({}^tA)$ 中点的标数分别为 a_i 及 $a_i^\vee$, 则分解式 $A=DB$ 中 D 可取为 $D=\operatorname{diag}(a_0/a_0^\vee,\ a_1/a_1^\vee,\ \cdots,\ a_l/a_l^\vee)$. 例如, 对 $C_2^{(1)}$ 型图相应的 Cartan 阵 A 成立.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & & \\ & \frac{2}{1} & \\ & & \frac{1}{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

其中 (1, 2, 1) 与 (1, 1, 1) 分别为图 $S(A)$ 及其对偶图 $S({}^tA)$ ($D_3^{(2)}$ 型图) 的标数. 因 C_2 型的 Cartan 阵是从 $C_2^{(1)}$ 阵中去掉第 0 行第 0 列得来, 于是又引出 C_2 型 Cartan 阵的分解

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

关于 FIN 及 AFF 型 Cartan 阵可对称化这一事实，Kac（本章末[5]）的书中的证明颇为费解，论文（见本章末[6]）给出了直接的证明．仿射型 Cartan 阵可对称化，是仿射李代数中存在对称不变双线性形的依据．

2.4 三类仿射李代数

定义 2 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶 FIN 或 AFF 型（广义）Cartan 阵，与之相应的 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{G}(A)$ 由 $3n$ 个生成元 e_i, f_i, h_i $(i=1, \cdots, n)$ 生成，生成元间的变换子关系为（参见(6-2-29)式）

$$[h_i, h_j]=0,\ [e_i, f_j]=\delta_{ij}h_i,$$
$$[h_i, e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i, f_j]=-a_{ij}f_j,$$
$$(ade_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\ (adf_i)^{1-a_{ij}}f_j=0 \quad (i\neq j),$$
$$(i, j=1, 2, \cdots, n)$$

尤其当 A 为仿射型（广义）Cartan 阵时，称 $\mathfrak{G}(A)$ 为仿射李代数（又称 Euclide 李代数）．

可以证明，当 A 为 FIN 型时，相应的 $\mathfrak{G}(A)$ 即经典的单李代数．

注意到定义 2 中的诸式作为一个整体在变换

$$\omega:\ e_i\leftrightarrow -f_i,\ h_i\rightarrow -h_i \quad (i=1, \cdots, n) \tag{6-2-31}$$

下不变（例如 $[h_i, e_j]=a_{ij}e_j$ 在 ω 变换下变至 $[h_i, f_j]=-a_{ij}f_j$，仍为定义中诸式之一），因此，由定义 2 导出的等式经变换 ω 后依然成立．ω 称为 Cartan 对合(involution)．

当 A 为 $n=l+1$ 阶 AFF 型 Cartan 阵时，为记号上方便起见，对 A 的行与列用 $0, 1, \cdots, l$ 编号，$\mathfrak{G}(A)$ 的 $3(l+1)$ 个生成元亦相应记作 $e_0, e_1, \cdots, e_l$; $f_0, \cdots, f_l$ 与 $h_0, \cdots, h_l$. 沿用上一节的记号，设 a_i 与 $a_i^{\vee}$ $(i=0, 1, \cdots, l)$ 分别为 Dynkin 图 $S(A)$ 与 $S(^tA)$ 中顶点 i 的标数，此时令

$$c=\sum_{i=0}^{l}a_i^{\vee}h_i, \tag{6-2-32}$$

则$[c, e_j]=\sum a_i^\vee a_{ij}=0$, $[c, f_j]=-\sum a_i^\vee a_{ij}=0$, 故 c 与 $\mathfrak{G}(A)$ 中任一元可交换，构成仿射李代数 $\mathfrak{G}(A)$ 的中心元(注意到当 $\mathfrak{G}(A)=A_l^{(1)}$ 时，$a_i^\vee=1$，(6-2-32)化作(6-2-23))．由上一节知 A 有对称化分解 $A=DB$，其中 $B=(b_{ij})$ 对称，$D=\mathrm{diag}(d_0, \cdots, d_l)$，$d_i=a_ia_i^{\vee-1}$．利用这一分解，我们可以在 $\mathfrak{H}$(由 $h_0, \cdots, h_l$ 张成)中引进对称双线形如下：

$$(h_i|h_j)=d_id_jb_{ij}(=a_ja_j^{\vee-1}a_{ij}). \tag{6-2-33}$$

容易证明，这一双线性形可以唯一地扩充成整个 $\mathfrak{G}(A)$ 上的不变对称双线性形．例如，为了计算 $(e_i|f_j)$ 可推演如下：$2(e_i|f_j)=([h_i, e_i]|f_j)$，由不变性要求$([X, Y]|Z)=(X|[Y, Z])$，上式必须等于$(h_i|[e_i, f_j])=\delta_{ij}(h_i|h_i)=2\delta_{ij}d_i$，因此$(e_i|f_j)=\delta_{ij}d_i$．

对于仿射李代数 $\mathfrak{G}(A)$，我们可以用与上面 2.2 段中相仿的方式定义其根系 Δ 及根子空间 $\mathfrak{G}_\alpha(\alpha\in\Delta)$．利用上面得到的双线性形，不难证明对 $x\in\mathfrak{G}_\alpha$, $y\in\mathfrak{G}_{-\alpha}$, $\alpha\in\Delta$，成立

$$[x, y]=(x|y)\nu^{-1}(\alpha), \tag{6-2-34}$$

其中映射 $\nu: \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}^*$ 定义为

$$\langle\nu(h), h'\rangle=(h|h'), \quad h, h'\in\mathfrak{H}.$$

例如取 $\alpha=\alpha_j$，此时$\langle d_j\alpha_j, h_i\rangle=d_ja_{ij}=(h_j|h_i)$，故

$$\nu(h_j)=d_j\alpha_j.$$

于是对 $x=e_j\in\mathfrak{G}_{\alpha_j}$, $y=f_j\in\mathfrak{G}_{-\alpha}$，有

$$\begin{aligned}(x|y)\nu^{-1}(\alpha)&=(e_i|f_j)\nu^{-1}(\alpha_j)=d_j\nu^{-1}(\alpha_j)\\&=h_j=[e_j, f_j]=[x, y].\end{aligned}$$

注意到当 A 为 A_l 型 Cartan 阵时，$a_j=a_j^\vee=1$，故

$$d_j=1, \quad b_{ij}=a_{ij}=2\delta_{ij}-\delta_{i+1,j}-\delta_{i,j+1},$$

此时由(6-2-33)即见

$$\begin{aligned}(h_i|h_j)=a_{ij}&=\mathrm{tr}((E_{ii}-E_{i+1,i+1})(E_{jj}-E_{j+1,j+1}))\\&=\mathrm{tr}(h_ih_j).\end{aligned}$$

从而由(6-2-33)定义并扩充而来的 A_l 中对称不变双线形，即

本节 2.1 段中给出的双线性形$(X|Y)=\mathrm{tr}(XY)$.

在上面 2.2 段中所构造的李代数 $A_l^{(1)}$，其生成元 $e_i, f_i, h_i(i=0,1,\cdots,l)$间的交换子关系(6-2-29)如本节定义 2 中所述，故本节 2.2 段中构造出来的 $A_l^{(1)}$ 正是本节定义 2 意义下的仿射李代数. 说得更确切一些，是定义 2 意义下抽象的李代数$A_l^{(1)}$ 的一种实现，即用我们所熟悉的矩阵与 Laurent 多项式来写出 e_i, f_i 与 h_i. $A_l^{(1)}$ 还可以有其它形式的实现，将在下一小段及 § 3 中提及.

一般，若字母 X 表示某个有限维单李代数(如 $X=A_l$)，则相应的仿射李代数 $X^{(1)}$ 均可由 X 出发经两步扩充而得，其扩充的方式完全与上面 2.2 段中所述的相同. 我们只须对 $X^{(1)}$ 的生成元之形式作如下补充说明.

设 X 的生成元为 $E_1, \cdots, E_l; F_1, \cdots, F_l; H_1, \cdots, H_l$, 其 Cartan 阵为 $\mathring{A}$, 即 $X=\mathfrak{G}(\mathring{A})=\mathring{\mathfrak{G}}$. 可以证明，$\mathring{\mathfrak{G}}$ 中的最高根为

$$\theta=\sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i.$$

在一维根空间 $\mathring{\mathfrak{G}}_\theta$ 中取非零元 $F_0\in\mathring{\mathfrak{G}}_\theta$, 使得

$$(F_0|\mathring{\omega}(F_0))=-1,$$

其中 $\mathring{\omega}$ 为 $\mathring{\mathfrak{G}}$ 中的 Cartan 对合(6-2-31)，并令

$$E_0=-\mathring{\omega}(F_0)\in\mathring{\mathfrak{G}}_{-\theta},$$

则由(6-2-34)

$$\begin{aligned}[E_0, F_0]&=-(E_0|F_0)\nu^{-1}(\theta)=-\nu^{-1}(\theta)\\&=-\nu^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i\Big)=-\sum_{i=1}^{l}a_i\nu^{-1}(\alpha_i)\\&=-\sum_{i=1}^{l}a_id_i^{-1}H_i=-\sum_{i=1}^{l}a_i^\vee H_i,\end{aligned}$$

即

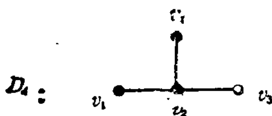
$$[E_0, F_0]=-\theta^\vee, \quad \Big(\theta^\vee=\sum_{i=1}^{l}a_i^\vee\Big). \tag{6-2-35}$$

然后令
$$e_0=\lambda\otimes E_0,\ f_0=\lambda^{-1}\otimes F_0,$$
$$e_i=1\otimes E_i,\ f_i=1\otimes F_i,\ h_i=1\otimes H_i\quad (i=1,\cdots l),$$

$$h_0 = c - 1 \otimes \theta^\vee, \quad \alpha_0 = -\theta,$$

则 $\mathfrak{G}(A) = X^{(1)}$ 由 $e_0, \cdots, e_l, f_0, \cdots, f_l, h_0, \cdots, h_l$ 生成.

$X^{(2)}$ 及 $X^{(3)}$ 型仿射李代数的实现较 $X^{(1)}$ 略为复杂，需要用到 X 的 Dynkin 图 $S(X)$ 的不变性. 仍以 $X = A_l$ 为例，它的 Dynkin 图在顶点的置换 $v_i \leftrightarrow v_{\bar{\mu}(i)}$ 下不变，其中 $\bar{\mu}(i) = l - i + 1$. 变换 $\bar{\mu}$ 显然满足条件 $\bar{\mu}^2 = 1$，于是我们说图 $S(A_l)$ 具有二阶自同构. 注意，A_{2l} 与 A_{2l-1} 的 Dynkin 图的上述自同构是有区别的，对于 A_{2l}, $\bar{\mu}(i) = 2l - i + 1$ 没有不动点；而对于 A_{2l-1}, $\bar{\mu}(i) = (2l-1) - i + 1$ 有不动点 $\bar{\mu}(l) = l$. 又如下图：



$S(D_4)$ 在顶点的变换 $v_i \to v_{\bar{\mu}(i)}$ 下不变，其中 $\bar{\mu}(1) = 4$, $\bar{\mu}(4) = 3$, $\bar{\mu}(3) = 1$, $\bar{\mu}(2) = 2$. 此时 $\bar{\mu}^3 = 1$，因此 $S(D_4)$ 具有三阶自同构. 不难验证，图 $S(A_l)$, $S(D_l)$, $S(E_6)$ 具有二阶自同构，$S(D_4)$ 具三阶自同构. 除此外，FIN 图中不再具有 $k > 1$ 阶的自同构. 由此即引出 $X^{(2)}$ 型李代数 $A_{2l-1}^{(2)}$, $A_{2l}^{(2)}$, $D_{l+1}^{(2)}$, $E_6^{(2)}$ 及唯一的一个 $X^{(3)}$ 型李代数 $D_4^{(3)}$. 下面我们简单地描述一下由单李代数 X 引出 $X^{(k)}(k = 2, 3)$ 的过程.

设 $\mathring{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}(\mathring{A})$ 为单李代数，生成元为 $H_i, E_i, F_i (i = 1, \cdots, l)$，并设 $\mathring{\mathfrak{G}}$ 的 Dynkin 图 $S(\mathring{A})$ 具有 $k(=2, 3)$ 阶自同构 $\bar{\mu}$. 由 $S(\mathring{A})$ 中顶点的置换 $v_i \to v_{\bar{\mu}(i)}$，可以引出 $\mathring{\mathfrak{G}}$ 的生成元之间的置换 μ:

$$\mu(E_i) = E_{\bar{\mu}(i)}, \quad \mu(F_i) = F_{\bar{\mu}(i)},$$
$$\mu(H_i) = H_{\bar{\mu}(i)} (i = 1, \cdots, l),$$

既然 $\mathring{\mathfrak{G}}$ 由 $\{E_i, F_i, H_i\}$ 生成，故它的生成元间的上述 k 阶自同构必将引出 $\mathring{\mathfrak{G}}$ 的 k 阶自同构 μ. 由作法 $\mu^k = 1$. 由此 μ 作为线性空间 $\mathring{\mathfrak{G}}$ 上的线性变换. 它的特征值必形如 $1, \omega, \cdots, \omega^{k-1}$，其中 $\omega =$

$\exp(2\pi i/k)$. 选取 $\mathfrak{G}$ 中的一组基 x_i, 使得 $\mu x_i=\omega^i x_i$, 此时成立分解式

$$\mathfrak{G}=\bigoplus_{j\in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}\mathfrak{G}_j,\ \mathfrak{G}_j=\{x\,|\,\mu x=\omega^j x\}.$$

与上一节 1.2 段中一样, 我们记

$$L(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}\otimes \boldsymbol{C}[\lambda,\ \lambda^{-1}],$$

并将自同构μ从 $\mathfrak{G}$ 扩充到 $L(\mathfrak{G})$ 上:

$$\tilde{\mu}(x\otimes\lambda^j)=\mu(x)\otimes\omega^{-j}\lambda^j.$$

我们将 $L(\mathfrak{G})$ 中变换 $\tilde{\mu}$ 的不动点记作

$$L(\mathfrak{G},\ \mu)=\{X(\lambda)\in L(\mathfrak{G})\,|\,\tilde{\mu}(X(\lambda))=X(\lambda)\}.$$

由此定义, 若 $x\otimes\lambda^j\in L(\mathfrak{G},\ \mu)$, 则

$$x\otimes\lambda^j\equiv X(\lambda)=\tilde{\mu}(X(\lambda))=\mu(X)\otimes\omega^{-j}\lambda^j,$$

故得

$$\mu(x)=\omega^j x,$$

即

$$x\in\mathfrak{G}_j.$$

因此 $L(\mathfrak{G},\ \mu)$ 也可写成

$$L(\mathfrak{G},\ \mu)=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}(\mathfrak{G}_{j\,\mathrm{mod}\,k}\otimes\lambda^j).$$

由 X 向 $X^{(k)}$ 的第一步扩充, 是由 $\mathfrak{G}$ 扩充成李代数 $L(\mathfrak{G},\ \mu)$. $L(\mathfrak{G},\ \mu)$ 中元的交换子关系与 $L(\mathfrak{G})$ 相同, 由(6-2-19)式给出. 第二步扩充则完全与 $X^{(1)}$ 情形一样, 为中心扩张, 构成

$$\tilde{L}(\mathfrak{G},\ \mu)=L(\mathfrak{G},\ \mu)+\boldsymbol{C}c,$$

其中 c 为中心元. $\sum(\mathfrak{G},\ \mu)$ 中元的交换子关系也如 $\tilde{L}(\mathfrak{G})$ 情形, 由(6-2-22)式确定. 这样得来的李代数, 即为与单李代数 X 相对应的仿射李代数 $X^{(k)}(k=2,3)$. 连同前面给出 $X^{(1)}$ 型李代数的实现可见, 与三类 AFF 型图相应的三类仿射李代数 $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, 均可由单李代数 X 经两步扩充而得.

2.5 顶点算子

在上一小段中, 我们从广义 Cartan 阵出发给出了仿射李代数的一般定义, 并指出这一定义下的抽象李代数, 可以用人们熟悉的

矩阵 Laurent 多项式具体构造出来. 本小段介绍仿射李代数的另一种重要的表现方式, 即用乘法及微分算子表现出来, 并由此引出顶点(vertex)算子, 它在 § 3 中将被用来生成 n- 孤立子解. 限于篇幅, 我们将只介绍 $A_1^{(1)}$ 的此种表示.

由上一节 1.2 段可知, $A_1^{(1)}$ 的一组基为

$$\{E(m),\ F(m),\ H(m),\ c\,|\,m\in \boldsymbol{Z}\}, \qquad (6\text{-}2\text{-}36)$$

其中 c 为中心元, $E,\ F,\ H\in A_1,\ X(m)=\lambda^m\otimes X$. 基元(6-2-36)之间的交换关系为

$$[X(m),\ Y(n)]=[X,\ Y](m+n)+m\delta_{m+n,0}\mathrm{tr}(XY)\cdot c,$$

其中 $E,\ F,\ H$ 之间的交换关系如(6-2-2)所示. 由此容易验证:

$$[E(m),\ E(n)]=[F(m),\ F(n)]=0,$$
$$[H(m),\ H(n)]=2m\delta_{m+n,0}c,$$
$$[E(m),\ H(n)]=-2E(m+n),$$
$$[F(m),\ H(n)]=2F(m+n),$$
$$[E(m),\ F(n)]=H(m+n)+m\delta_{m+n,0}c.$$

今将基(6-2-36)转换成另一组基

$$\{B_{2j+1},\ X_k,\ c\,|\,j,\ k\in \boldsymbol{Z}\}, \qquad (6\text{-}2\text{-}37)$$

其中 $$B_{2j+1}=E(j)+F(j+1),$$

$$X_{2j+1}=-E(j)+F(j+1),\ X_{2j}=H(j).$$

容易计算基元(6-2-37)之间的交换关系为

$$[B_k,\ X_j]=2X_{j+k},\ [B_j,\ B_k]=j\delta_{j+k,0}c, \qquad (6\text{-}2\text{-}38)^+$$

$$[X_j,\ X_k]=\begin{cases}2B_{j+k}, & j\text{ 奇}, k\text{ 偶};\\ (-1)^j\delta_{j+k,0}c, & j,\ k\text{ 同为奇或偶}.\end{cases}$$

$$(6\text{-}2\text{-}38)^-$$

例如, $$[X_1,\ X_4]=[-E(0)+F(1),\ H(2)]$$
$$=2F(2)+2F(3)=2B_5.$$

记 $Z\equiv \boldsymbol{C}[x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots]$ 为由无限多个变元 $x=(x_1,\ x_3,\ x_5,\ \cdots)$ 构成的形式幂级数全体构成的代数, 其一般元形如

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \ x^{\alpha} \equiv x_1^{\alpha(1)} x_3^{\alpha(3)} x_5^{\alpha(5)} \cdots, \ \alpha = (\alpha(1), \alpha(3), \cdots).$$

下面我们用 Z 中的乘法及微分算子来表出 B_{2j+1}, X_k 和 c. 为此，引入算子

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \bar{x}_j,$$

这里算子 $\bar{x}_j$ 表示"乘以变元 x_j", 即 $\bar{x}_j f = x_j f$. 下面为记号简单起见，将 $\bar{x}_j$ 简记成 x_j. 由此定义容易算得如下交换关系

$$[\partial_j, x_k^l] = \delta_{jk} l x_k^{l-1},$$

由此可以进而推出

$$(ad\partial_j)^m \left(\frac{x_k^l}{l!}\right) \equiv \underbrace{\left[\partial_j, \partial_j, \cdots, \left[\partial_j, \right.\right.}_{m\text{重}} \left.\left.\frac{x_k^l}{l!}\right] \cdots\right]$$

$$= \delta_{jk} \frac{x_k^{l-m}}{(l-m)!}. \tag{6-2-39}$$

今记 $\hat{B}_j = \frac{1}{2} j\partial_j \quad \hat{B}_{-j} = 2x_j$ （j—非负非奇整数),

$$\hat{c} = 1(\text{恒等算子}).$$

由(6-2-39)容易验证

$$[\hat{B}_j, \hat{B}_k] = j\delta_{j+k,0}\hat{c}.$$

这一交换关系式与前面得到的 B_j 与 B_k 之间的交换关系完全相同. 我们希望能进而找到与 X_j 相仿的 Z 中的线性算子 $\hat{X}_j$ 来，使得 $\hat{X}_j$ 与 $\hat{B}_j$ 之间的交换关系也如(6-2-38)$^{\pm}$所示，这样便可得到 $A_1^{(1)}$ 的一种实现. 可以证明，满足这一要求的算子 $\hat{X}_j$ 形如

$$\hat{X}_j = -\frac{1}{2} \sum_{\|\nu\| - \|\mu\| = j} \left\{\prod \left(\frac{4x_k}{k}\right)^{\mu(k)} \frac{1}{\mu(k)!}\right\} \left\{\prod (-\partial_k)^{\nu(k)} \frac{1}{\nu(k)!}\right\}, \tag{6-2-40}$$

其中 $\|\nu\| = \sum j\nu(j) = \nu(1) + 3\nu(3) + \cdots$. (6-2-40)的推导并不复杂. 首先假设 $\hat{X}_j$ 可用算子 $x^{\mu} D^{\mu}$ 的线性组合表示出来

$$\hat{X}_j = \sum_{\|\nu\| - \|\mu\| = j} d_j(\mu, \nu) \frac{x^{\mu}}{\mu!} \frac{D^{\nu}}{\nu!},$$

其中 d_j 为待定系数，$x^{\mu}=\prod x_k^{\mu(k)}$，$D^{\nu}=\prod\partial_k^{\nu(k)}$，$\mu!=\prod(\mu(k)!)$，然后利用(6-2-39)及相仿的等式

$$(adx_i)^k\frac{\partial_j^l}{l!}=(-1)^k\delta_{ij}\frac{\partial_j^{l-k}}{(l-k)!}$$

推出

$$(adD^{\alpha})\frac{x^{\mu}}{\mu!}=\frac{x^{\mu-\alpha}}{(\mu-\alpha)!},\qquad (6\text{-}2\text{-}41)^+$$

$$(adx^{\beta})\frac{D^{\nu}}{\nu!}=(-1)^{|\beta|}\frac{D^{\nu-\beta}}{(\nu-\beta)!},\qquad (6\text{-}2\text{-}41)^-$$

其中 $|\beta|=\sum\beta(k)$，$\mu-\alpha=(\mu(k)-\alpha(k))$．利用(6-2-41)$^{\pm}$，即易根据 $\hat{X}_j$ 应满足的交换子关系式，最后定出系数 d_j．其详细的推证过程可见本章末[7]．

今引入算子

$$\hat{X}=-\frac{1}{2}\exp\left(\sum\frac{4x_k}{k}\right)\exp\left(-\sum\partial_k\right),\qquad (6\text{-}2\text{-}42)$$

易见 $$\exp\left(-\sum\partial_k\right)=\sum_m\frac{(-1)^m}{m!}(\partial_1+\partial_3+\partial_5+\cdots)^m$$

$$=\sum_m\sum_{|\nu|=m}(-1)^{|\nu|}\left(\frac{\partial_1^{\nu(1)}}{\nu(1)!}\frac{\partial_3^{\nu(3)}}{\nu(3)!}\cdots\right)$$

$$=\sum_m\sum_{|\nu|=m}(-1)^{|\nu|}\frac{D^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\sum_{\nu}(-1)^{|\nu|}\frac{D^{\nu}}{\nu!},$$

相仿有 $$\exp\left(\sum\frac{4x_k}{k}\right)$$

$$=\sum_{\mu}\prod_k\left(\frac{4x_k}{k}\right)^{\mu(k)}\frac{1}{\mu(k)!}.$$

由此得即

$$\hat{X}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu}\prod\left(\frac{4x_k}{k}\right)^{\mu(k)}\frac{1}{\mu(k)!}\sum_{\nu}(-1)^{|\nu|}\frac{D^{\nu}}{\nu!}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\prod\left(\frac{4x_k}{k}\right)^{\mu(k)}\frac{1}{\mu(k)!}(-1)^{|\nu|}\frac{D^{\nu}}{\nu!}$$

$$=\sum_j \sum_{\|\nu\|-\|\mu\|=j}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4x_k}{k}\right)^{\mu(k)}\frac{1}{\mu(k)}\left(\frac{(-D)^\nu}{\nu!}\right),$$

将此式与(6-2-40)相比较便得

$$\hat{X}=\sum_j \hat{X}_j.$$

换言之，算子 $\hat{X}$ 可以看成是诸算子 $\hat{X}_j$ 的生成函数. 算子 $\hat{X}$ 称为顶点算子. 这一算子最初出现在“弦模型”的讨论中（见本章末[15]）.

对更一般仿射李代数的类似形式的表示，可见本章末[16].

§3 广义 KdV 方程族

3.1 半单李代数中的 AKNS 族

设 $\mathfrak{G}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上有限维线性李代数，对于 $A\in\mathfrak{G}$，记

$$\mathfrak{Z}=\mathrm{Ker}(adA)\equiv\{X\in\mathfrak{G}\,|\,[X,\ A]=0\}, \tag{6-3-1$^+$}$$

$$\mathfrak{Z}^\perp=\mathrm{Im}(adA)\equiv\{[A,\ X]\,|\,X\in\mathfrak{G}\}, \tag{6-3-1$^-$}$$

换言之，即 $[A,\ \mathfrak{Z}]=0$，$\mathfrak{Z}^\perp=[A,\ \mathfrak{G}]$. 这里记号 $\mathfrak{Z}^\perp$ 的由来是 $(\mathfrak{Z}|\mathfrak{Z}^\perp)=0$，其中 $(\cdot|\cdot)$ 为 $\mathfrak{G}$ 上对称不变双线性形. 事实上，$(\mathfrak{Z}|\mathfrak{Z}^\perp)=(\mathfrak{Z}|[A,\ \mathfrak{G}])=([\mathfrak{Z},\ A]|\mathfrak{G})=0$，故 $\mathfrak{Z}$ 与 $\mathfrak{Z}^\perp$ 关于双线形 $(\cdot|\cdot)$ 正交. 在上述记号下成立次之简单的命题.

命题 1 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^\perp$，即任一 $X\in\mathfrak{G}$ 可表示成

$$X=X_{\mathfrak{Z}}+X_{\mathfrak{Z}^\perp},$$

其中 $X_{\mathfrak{Z}}\in\mathfrak{Z}$，$X_{\mathfrak{Z}^\perp}\in\mathfrak{Z}^\perp$，且 $\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{Z}^\perp=\{0\}$，则有

(i) $[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}^\perp]\subset\mathfrak{Z}^\perp$，特别 $[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}^\perp]_{\mathfrak{Z}}=0$;

(ii) $[A,\ F]=0$，$F\in\mathfrak{Z}^\perp\Rightarrow F=0$;

(iii) $[A,\ \mathfrak{G}]_{\mathfrak{Z}}=0$;

(iv) $[A,\ \mathfrak{Z}^\perp]=\mathfrak{Z}^\perp=[A,\ \mathfrak{G}]$.

其证明十分简单:

$$[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}^\perp]=[\mathfrak{Z},\ [A,\ \mathfrak{G}]]$$

$$=[[\mathfrak{Z}, A], \mathfrak{G}]+[A, [\mathfrak{Z}, \mathfrak{G}]]$$
$$=[A, [\mathfrak{Z}, \mathfrak{G}]]\subset[A, \mathfrak{G}]$$
$$=\mathfrak{Z}^{\perp},$$

即得(i). (ii)与(iii)是$\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{Z}^{\perp}=\{0\}$之直接推论. 最后,

$$\mathfrak{Z}^{\perp}=[A, \mathfrak{G}]=[A, \mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^{\perp}]$$
$$=[A, \mathfrak{Z}]+[A, \mathfrak{Z}^{\perp}]$$
$$=[A, \mathfrak{Z}^{\perp}].$$

推论 对任一$F\in\mathfrak{Z}^{\perp}$,存在唯一的$\bar{F}\subset\mathfrak{Z}^{\perp}$,使得

$$F=[A, \bar{F}].$$

证明 唯一性由(ii)推知,存在性由(iv)推知.

今在$\mathfrak{G}$中考察算子

$$L=\partial-U, \ U=\lambda A+Q, \tag{6-3-2}$$

其中$\partial=\partial/\partial x$, $Q=Q(x, t)\in\mathfrak{Z}^{\perp}$, A为常数阵, 与之相应的$\mathfrak{Z}$与$\mathfrak{Z}^{\perp}$如(6-3-1)所示,记

$$Z_L=\{W\mid[L, W]=0\},$$

由(6-3-2), $W\in Z_L$当且仅当

$$W_x=[U, W]. \tag{6-3-3}$$

命题 2 若$\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^{\perp}$, 则方程(6-3-3)有如下之形式幂级数解(见章末[19])

$$W=\sum_{i=0}^{\infty}W_i\lambda^{-i}, \quad W_i\in\mathfrak{G}. \tag{6-3-4}$$

证明 将(6-3-4)代入(6-3-3), 并比较两边λ^{-i}前系数可得

$$[A, W_0]=0, \tag{6-3-5}$$

$$W_{ix}=[A, W_{i+1}]+[Q, W_i] \quad (i=0, 1, 2, \cdots). \tag{6-3-6}$$

注意到 $[A, W_{i+1}]_{\mathfrak{Z}}=0$ (由命题1(iii)),

$$[A, W_{i+1}]_{\mathfrak{Z}^{\perp}}\overset{\text{(iv)}}{=\!=}[A, W_{i+1\mathfrak{Z}^{\perp}}],$$

$$[Q, W_i]_{\mathfrak{Z}}=[Q, W_{i\mathfrak{Z}}]_{\mathfrak{Z}}+[Q, W_{i\mathfrak{Z}^{\perp}}]\overset{\text{(i)}}{=\!=}[Q, W_{i\mathfrak{Z}^{\perp}}]_{\mathfrak{Z}},$$

故将(6-3-6)式两边分别取 $\mathfrak{Z}$ 及 $\mathfrak{Z}^{\perp}$ 中分量得

$$W_{i\mathfrak{Z}x}=[Q,\ W_{i\mathfrak{Z}^{\perp}}]_{\mathfrak{Z}}, \tag{6-3-7}^{+}$$

$$W_{i\mathfrak{Z}^{\perp}x}-[Q,\ W_{i}]_{\mathfrak{Z}^{\perp}}=[A,\ W_{i+1\mathfrak{Z}^{\perp}}]. \tag{6-3-7}^{-}$$

今证由(6-3-5)、(6-3-7)$^{\pm}$可逐一解出 W_i 来. 实际上由(6-3-5)知 $W_0\in\mathfrak{Z}$, 故由(6-3-7)$^{+}$知 $W_{0x}=0$, 即 W_0 必须是 $\mathfrak{Z}$ 中的常数阵. 我们取

$$W_0=A, \tag{6-3-8}$$

由(6-3-7)$^{-}$得$[A,\ W_{1\mathfrak{Z}^{\perp}}]=-[Q,\ W_0]_{\mathfrak{Z}^{\perp}}$, 此时右边为已知的元, 根据推论, 可由此式唯一解出 $W_{1\mathfrak{Z}^{\perp}}$. 再由(6-3-7)$^{+}$即得出

$$W_{1\mathfrak{Z}}=I[Q,\ W_{1\mathfrak{Z}^{\perp}}]_{\mathfrak{Z}},$$

其中 I 为 ∂ 之逆, 积分常数取作零. 定出 $W_1=W_{1\mathfrak{Z}}+W_{1\mathfrak{Z}^{\perp}}$ 后, 再由(6-3-7)$^{-}$, (6-3-7)$^{+}$先后定出 $W_{2\mathfrak{Z}^{\perp}}$ 及 $W_{2\mathfrak{Z}}$. 如此反复, 即可逐一定出各个 W_i 来.

例 1 $\mathfrak{G}=A_{n-1}$,

$$A=\mathrm{diag}(a_1,\ \cdots,\ a_n),\ a_i\neq a_j\quad(i\neq j).$$

此时对 $B=(b_{ij})\in A_{n-1}$ 有$[A,\ B]=((a_i-a_j)b_{ij})$, 故由设 a_i 互异, 可见$[A,\ B]=0$ 当且仅当 $b_{ij}=0(i\neq j)$. 由此推知, 当 A 为对角元互异的对角阵时,

$\mathfrak{Z}$——A_{n-1} 中对角阵之全体,

$\mathfrak{Z}^{\perp}$——A_{n-1} 中对角元为零的阵之全体.

显然, $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^{\perp}$ 成立. 尤其当 $n=2$ 时, 算子(6-3-2)即

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-\left(\lambda\begin{pmatrix}a & \\ & -a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & q(x,\ t)\\ r(x,\ t) & 0\end{pmatrix}\right). \tag{6-3-9}$$

相应的谱问题 $L\psi=0$, 即孤立子理论中有名的广义 Захаров–шабат 谱问题(见本章末[17]).

一般, 对李代数 $\mathfrak{G}$ 中的非零元 $A\in\mathfrak{G}$, 记

$$\mathfrak{G}_0(A)=\{X\mid 存在\ k>0,\ 使得\ (adA)^kY=0\}, \tag{6-3-10}$$

$$n_A=\dim\mathfrak{G}_0(A),\quad n=\min_{A\in\mathfrak{G}}n_A,$$

若元 A 使得 $n_A=n$，即 $\mathfrak{G}_0(A)$ 的维数最小，则称 A 为正则元．在经典李代数理论中证明了如下命题：

命题 3（见本章末[18]）　设 $\mathfrak{G}$ 为半单李代数，A 为 $\mathfrak{G}$ 中正则元，则成立次之 Cartan 分解

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0\oplus(\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{G}_\alpha), \tag{6-3-11}$$

其中
$$\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}_0(A),$$

$$\mathfrak{G}_\alpha=\{x\mid[H,\ X]=\langle H,\ \alpha\rangle X,\ \forall H\in\mathfrak{G}_0\}. \tag{6-3-12}$$

又 Δ 为 $\mathfrak{G}$ 的根系（即 $\alpha\in\Delta$ 当且仅当 $\alpha\neq0$，$\alpha\in\mathfrak{G}_0^*$，且 $\dim\mathfrak{G}_\alpha>0$）．此外，$\mathfrak{G}_0(A)$ 可交换．

在命题 3 的条件下易见

$$\mathfrak{G}_0(A)=\{x\mid[A,\ X]=0\}. \tag{6-3-13}$$

事实上，将上式右端记作 $\overline{\mathfrak{G}}_0(A)$，则由 $\mathfrak{G}_0(A)$ 之定义(6-3-10)易见，$\overline{\mathfrak{G}}_0(A)\subseteq\mathfrak{G}_0(A)$．反之，由 $A\in\mathfrak{G}_0(A)$ 及 $\mathfrak{G}_0(A)$ 之可换性可见，

$$[A,\ \mathfrak{G}_0(A)]=0,$$

故
$$\mathfrak{G}_0(A)\subseteq\overline{\mathfrak{G}}_0(A).$$

因此，
$$\overline{\mathfrak{G}}_0(A)=\mathfrak{G}_0(A).$$

此外，注意到对 $\alpha\in\Delta$，必有 $\langle A,\ \alpha\rangle\neq0$．因若不然，由 $\alpha\in\Delta$ 知 $\dim\mathfrak{G}_\alpha>0$，故可取 $X\in\mathfrak{G}_\alpha$，$X\neq0$，对此有 $[A,\ X]=\langle A,\ \alpha\rangle X=0$，于是 $X\in\mathfrak{G}_0$，此与分解式(6-3-11)之直和性矛盾．由 $\langle A,\ \alpha\rangle\neq0$ 及(6-3-12)可见

$$X\in\mathfrak{G}_\alpha\Rightarrow X=\left[A,\ \frac{1}{\langle A,\ \alpha\rangle}X\right]. \tag{6-3-14}$$

由(6-3-13)、(6-3-14)两式即推知如下命题：

命题 4　若 A 为半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中的正则元，$\mathfrak{Z}$ 与 $\mathfrak{Z}^\perp$ 如(6-3-1)$^\pm$ 所示，则 $\mathfrak{Z}=\mathfrak{G}_0(A)$ 且

(i)　$\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^\perp$；(ii)　$\mathfrak{Z}$ 可交换．

因此，当 A 为半单李代数时，$\mathfrak{G}$ 中的正则元 A 提供了本节命题 2 所需的分解 $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^\perp$　$\mathfrak{Z}$ 的可交换性将在后面引出守恒量时

用到.

有了方程(6-3-3)的解 W 后，即可引出与谱问题

$$\psi_x = U\psi \tag{6-3-15}$$

相应的一族非线性演化方程. 为此取

$$V^{(n)} \equiv (\lambda^n W)_+ = \sum_{i=0}^{n} W_i \lambda^{n-i}.$$

(这里对形式 Laurent 级数 $P = \sum_{i\in \mathbf{Z}} P_i \lambda^i$, 记 $P_+ = \sum_{i\geq 0} P_i \lambda^i$, $P_- = P - P_+$). 此时线性问题

$$\psi_x = U\psi,\ \psi_t = V^{(n)}\psi$$

的可积条件

$$U_t - V_x^{(n)} + [U,\ V^{(n)}] = 0 \tag{6-3-16}$$

必与 λ 无关. 这是因为 $U_t = Q_t$ 与 λ 无关，而由 $W_x - [U,\ W] = 0$ 得出 $(\lambda^n W)_x - [U,\ (\lambda^n W)] = 0$，故由 $\lambda^n W = (\lambda^n W)_+ + (\lambda^n W)_-$ 得出

$$(\lambda^n W)_{+x} - [U,\ (\lambda^n W)_+] = -(\lambda^n W)_{-x} + [U,\ (\lambda^n W)_-],$$

但此等式的右边只与 $\lambda^j (j\leqslant 0)$ 有关，而左边却只与 $\lambda^j (j\leqslant 0)$ 有关，故两边与 λ 无关. 因此，$-V_x^{(n)} + [U,\ V^{(n)}]$ 与 λ 无关. 由此可见，方程(6-3-16)可以写作

$$\begin{aligned} 0 &= (U_t - V_x^{(n)} + [U,\ V])\big|_{\lambda=0} \\ &= Q_t - W_{nx} + [Q,\ W_n] \\ &= Q_t - [A,\ W_{n+1}], \end{aligned}$$

故引出一族方程 $Q_t = [A,\ W_{n+1}]$. 为了表明此方程的变元 t 对应于 $V^{(n)} = (\lambda^n W)_+$ 的特定选择，用变元 t_n 代替 t，而将所述方程写成

$$\frac{\partial Q}{\partial t_n} = [A,\ W_{n+1}] \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots), \tag{6-3-17}$$

尤当 $\mathfrak{G} = A$，从而算子 L 形如(6-3-9)时，(6-3-17)即孤立子理论中著名的 AKNS 族(见章末[17])，故我们称(6-3-17)为半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中的 AKNS 族.

设 $\mathfrak{G}$ 为有限维线性李代数，考察算子 $L = \partial - U$,

其中 $$U\in\mathfrak{G},\ \partial=\frac{\partial}{\partial x}.$$

若存在非奇阵 T，使得

$$T(\partial-U)T^{-1}=\partial-\widetilde{U}. \tag{6-3-18}$$

其中 $\widetilde{U}\in\mathfrak{G}$，则称算子 L 与 $\widetilde{L}=\partial-\widetilde{U}$ 规范等价．由(6-3-18)易推知

$$T_x=\widetilde{U}T-TU,\ S_x=US-S\widetilde{U}, \tag{6-3-19}$$

$$\widetilde{U}=TUS+T_xS,\ U=S\widetilde{U}T-ST_x. \tag{6-3-20}$$

式中 $S=T^{-1}$．容易验证，当 L 与 $\widetilde{L}$ 规范等价时，若 ψ 为谱问题 $\psi_x=U\psi$ 的解，则 $\widetilde{\psi}=T\psi$ 为 $\widetilde{\psi}_x=\widetilde{U}\psi$ 的解．

当 $\mathfrak{G}$ 为抽象李代数时，由于元之间乘法不再有定义，故需将规范等价的定义(6-3-18)用[,]运算表示出来．为此，应用公式(见本章末[20])

$$e^{adA}B=e^{A}Be^{-A},\ e^{adA}\partial=e^{A}\partial e^{-A},$$

即引出次之定义．若存在 $T\in\mathfrak{G}$，使得

$$\widetilde{L}=e^{adT}L, \tag{6-3-21}$$

则称算子 $\widetilde{L}=\partial-\widetilde{U}$ 与 $L=\partial-U$ 规范等价．

命题 5 设 A 为半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中的正则元，$\mathfrak{Z}$ 与 $\mathfrak{Z}^{\perp}$ 如(6-3-1)$^{\pm}$所示，并设算子 $L=\partial-U$ 与 $\widetilde{L}=\partial-\widetilde{U}$ 规范等价：$\widetilde{L}=e^{adT}L$，且 $\widetilde{U}\in\mathfrak{Z}$，则任取 $\mathfrak{Z}$ 中的常数阵 B，相应的 $W\equiv e^{-adT}B$ 必属于 Z_L，即(6-3-3)成立．

证明
$$\begin{aligned}[L,\ W]&=[e^{-adT}\widetilde{L},\ e^{-adT}B]\\&=e^{-adT}[\widetilde{L},\ B],\end{aligned}$$

但 $$[\widetilde{L},\ B]=B_x-[\widetilde{U},\ B],$$

由设 $B=\text{const}$，故 $B_x=0$．又由命题 4(ii)，$[\widetilde{U},\ B]=0$，

所以 $$[L,\ W]=0.$$

顺便指出命题 5 中引出的 $\widetilde{U}$ 为方程族

$$[\partial-U,\ \partial_t-V^{(n)}]\equiv U_t-V_x^{(n)}+[U,\ V^{(n)}]=0 \tag{6-3-22}$$

的守恒密度，其中 $\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$，$V^{(n)}=(\lambda^n W)_+$ 如前．实际上，

记 $$\widetilde{M}=\partial_t-\widetilde{V}=e^{-\mathrm{ad}T}M,\ M=\partial_t-V^{(n)},$$

则由 $$[L,\ M]=0$$

得 $$[\widetilde{L},\ \widetilde{M}]=[e^{-\mathrm{ad}T}L,\ e^{-\mathrm{ad}T}M]=e^{-\mathrm{ad}T}[L,\ M]=0,$$

于是

$$\widetilde{U}_t-\widetilde{V}_x+[\widetilde{U},\ \widetilde{V}]=0. \tag{6-3-23}$$

注意到在命题 5 条件下，

$$[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{G}]_{\mathfrak{Z}}=[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}]_{\mathfrak{Z}}+[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}^{\perp}]_{\mathfrak{Z}}=0. \tag{6-3-24}$$

此因 $\mathfrak{Z}$ 可交换，故 $[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}]=0$，又由命题 1(i)，$[\mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}^{\perp}]_{\mathfrak{Z}}=0$．由 (6-3-24) 尤可推知 $[\widetilde{U},\ \widetilde{V}]_{\mathfrak{Z}}=0$，故将 (6-3-23) 式两边在 $\mathfrak{Z}$ 中投影，注意到 $\widetilde{U}_{\mathfrak{Z}}=\widetilde{U}$，即得

$$\widetilde{U}_t=(\widetilde{V}_{\mathfrak{Z}})_x. \tag{6-3-25}$$

此即 $\widetilde{U}$ 为方程族 $[L,\ M]=0$ 的公共守恒密度的表达形式．因此我们有

命题 6 命题 5 中构造的 $\widetilde{U}$，是方程族 (6-3-22) 的公共守恒密度．

例 2

$\mathfrak{G}=A_{n-1}$，$A=\mathrm{diag}(a_1,\ \cdots,\ a_n)$，$a_i\neq a_j\quad(i\neq j)$，$\sum a_i=0$．

考察谱问题 $\psi_x=U\psi$，$U=(U_{ij}(x,\ \tau,\ \lambda))\in\mathfrak{G}$．

令 $$Y=(Y_{ij}),\quad Y_{ij}=\frac{\psi_i}{\psi_j},$$

则由 $\psi_{ix}=\sum U_{ij}\psi_j$ 易推知

$$Y_x=UY-Y\widetilde{U}, \tag{6-3-26}$$

其中 $\widetilde{U}=(UY)_{\mathfrak{Z}}=\mathrm{diag}(h_1,\ \cdots,\ h_n)$，$h_j=\sum\limits_k U_{jk}Y_{kj}$．

比较 (6-3-26) 与 (6-3-19) 可见，

$$T(\partial-U)T^{-1}=\partial-\widetilde{U}, \tag{6-3-27}$$

其中 $T=Y^{-1}$，故由命题 6 推知

命题 7 $h_j=\sum_k U_{jk}Y_{kj}$, $(j=1, \cdots, n)$ 为与谱问题 $\psi_x=U\psi$, $U\in A_{n-1}$ 相应的方程族的公共守恒密度.

这一事实系由 Alberty 等人首先发现的(见本章末[21]), 他们以外微分形为工具给出了这一事实的证明, 与我们在上面给出的代数推理不同.

把上述构造方式归纳一下, 即可得出在半单李代数 $\mathfrak{G}$ 中引出与谱问题 $\psi_x=U\psi$, $U\in\mathfrak{G}$ 相应的方程族, 及其公共守恒密度的一般方法如下:

(1) 找出 $\mathfrak{G}$ 中的一个正则元 $A\in\mathfrak{G}$;

(2) 求规范变换, 使 $L=\partial-U$ 与 $\tilde{L}=\partial-\tilde{U}$ 规范等价:

$$\tilde{L}=e^{\mathrm{ad}T}L,$$

且
$$\tilde{U}\in\mathfrak{Z}=\mathrm{Ker\,ad}A;$$

(3) 任取常数元 $B\in\mathfrak{Z}$, 令 $W=e^{-\mathrm{ad}T}B$.

则
$$W\in \boldsymbol{Z}_L=\{W\mid[L, W]=0\},$$

当 $U=\lambda A+Q$, $Q\in\mathfrak{Z}'$ 时, 令 $V^{(n)}=(\lambda^n W)_+$, 将引出方程族

$$U_t-V_x^{(n)}+[U, V^{(n)}]=0,$$

此时 $\tilde{U}$ 为此方程族的公共守恒密度. 在 U 为 λ 的多项式的一般情形可作相仿讨论, 此处不再细述.

3.2 仿射李代数的正则阶化与标准阶化

设 $\mathfrak{G}$ 为由 $3(l+1)$ 个生成元 e_i, f_i, $h_i(i=0, 1, \cdots, l)$ 生成的仿射李代数, 在本小段讨论中不需要用到中心元 c, 故可认为 $c=0$, 此时 h_i 间有关系式

$$a_0^\vee h_0+a_1^\vee h_1+\cdots+a_l^\vee h_l=0,$$

其中 $a_i^\vee$ 为 $\mathfrak{G}$ 的对偶 Dynkin 图的标数(见上节 2.3). 我们引进 $\mathfrak{G}$ 的下述子空间:

G^0——由 $h_0, h_1, \cdots, h_l$ 生成;

G^n——由所有 $[e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]\equiv[e_{i_1}, [e_{i_2}, \cdots, [e_{i_{n-1}}, e_{i_n}]\cdots]$ 生

成；

G^{-n}——由所有$[f_{i_1}, \cdots, f_{i_n}]$生成.

由生成元的交换子关系式$[e_i, f_j]=\delta_{ij}h_j$，易见诸如$[e_1, e_2, f_1, f_2]$等"混合型"的交换子均可由$G^0$，$G^n$，$G^{-n}$中元的线性组合表出，故

$$\mathfrak{G}=G^0\oplus(\bigoplus_{n>0}G^n)\oplus(\bigoplus_{n>0}G^{-n}). \qquad (6\text{-}3\text{-}28)$$

由这一分解式引出$\mathfrak{G}$中的元的一个阶化，即定义

$$\deg x=i,\ \forall x\in G^i,\ (i\in \mathbf{Z}), \qquad (6\text{-}3\text{-}29)$$

$$\deg[x, y]\equiv\deg x+\deg y.$$

例如$\deg e_i=1=-\deg f_i$，$\deg[e_1, e_2, e_3]=3$等，由(6-3-29)给出的阶化，称为正则阶化.

设$S(\mathfrak{G})$为$\mathfrak{G}$的Dynkin图，对应于图S中的一个顶点v_m，还可给出$\mathfrak{G}$的另一种阶化，称为相应于顶点v_m的标准阶化，其作法如次，令

G_1——由e_m生成，

G_{-1}——由f_m生成，

G_0——由其余生成元生成.

由此引出$\mathfrak{G}$的另一种分解

$$\mathfrak{G}=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}G_j, \qquad (6\text{-}3\text{-}30)$$

其中 G_n——由形如$[e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}]$元生成，其中$m$在$j_1, \cdots, j_k$中出现$n$次；

G_{-n}——由形如$[f_{j_1}, \cdots, f_{j_k}]$元生成，其中$m$在$j_1, \cdots, j_k$中出现$n$次；

G_0——由h_j，$[e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}]$及$[f_{j_1}, \cdots, f_{j_k}]$生成，其中$j_s\neq m$，$s=1, \cdots, k$.

分解式(6-3-30)引出$\mathfrak{G}$中元的另一种阶化

$$\mathrm{Deg}\,x=i,\ \forall x\in G_i,\ (i\in\mathbf{Z}). \qquad (6\text{-}3\text{-}31)$$

容易证明如下命题：

命题 8 (见本章末[22]) 对于 $\mathfrak{G}$ 的上述两种阶化，成立

(i) $G_i \subset \bigoplus_{j>0} G^j \quad (i>0)$;

(ii) $G_i \subset \bigoplus_{j<0} G^j \quad (i<0)$;

(iii) G_0 是生成元为 $e_i, f_i, h_i \quad (i=0, 1, \cdots, l, i\neq m)$ 生成的半单李代数;

(iv) $G_0 \cap \bigoplus_{j>0} G^j$ 由 $e_i (i\neq m)$ 生成;

(v) $G_0 \cap \bigoplus_{i<0} G^i$ 由 $f_i (i\neq m)$ 生成.

证明 (i), (ii), (iv), (v) 易由前述 G_i 的构成方式导出. 结论(iii)是因 h_m 可由其余 h_i 表出, 又 G_0 的 Dynkin 图乃由 $\mathfrak{G}$ 的 Dynkin 图去掉点 v_m 而来, 故必为有限型 Dynkin 图之并, 故 G_0 为半单李代数.

3.3 广义 KdV, MKdV 方程族

沿用上一小段的记号, 为书写方便起见, 令 $m=0$. 记

$$\mathfrak{B}=G_0\cap \bigoplus_{i\leqslant 0} G^i, \quad \mathfrak{N}=G_0\cap \bigoplus_{i<0} G^i.$$

考察算子

$$L=\partial-(q+\Lambda),$$
$$q\in C^\infty(\boldsymbol{R}, \mathfrak{B}), \quad \Lambda=\sum_{i=0}^{l} e_i. \tag{6-3-32}$$

这里 $C^\infty(\boldsymbol{R}, \mathfrak{A})$ 表示实域 $\boldsymbol{R}\to\mathfrak{A}$ 的光滑函数全体, $\mathfrak{A}$ 理解为 $\mathfrak{G}$ 的一个矩阵 Laurent 多项式实现的一个子空间, 于是映射 $\boldsymbol{R}\to\mathfrak{A}$ 之光滑性即实变函数常义下的光滑性. 记

$$I=\Lambda-e_0=e_1+\cdots+e_l, \tag{6-3-33}$$

Kac 证明了:

命题 9(见本章末[23]) 对于(6-3-32)确定的元 $\Lambda\in\mathfrak{G}$ 成立:

(i) $\mathfrak{G}=\mathfrak{Z}\oplus\mathfrak{Z}^\perp$; (ii) $\mathfrak{Z}$ 可交换, 其中如前

$$\mathfrak{Z}=\operatorname{Ker}\operatorname{ad}\Lambda, \quad \mathfrak{Z}^\perp=\operatorname{Im}\operatorname{ad}\Lambda.$$

记 $\mathfrak{Z}^j=\mathfrak{Z}\cap G^j$, 可以证明如下命题:

命题 10（见本章末[22]） 对算子 L 存在 $T=\bigoplus_{i=1}^{\infty}T_i$, $T_i\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, G^{-i})$，使得算子 $L_0=e^{adT}L$形如

$$L_0=\partial-(A+H),$$

其中 $H=\bigoplus_{i=0}^{\infty}H_i$, $H_i\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{Z}^{-i})$.

命题 11（见本章末[22]） 记

$$Z_L=\{X\mid X\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{G}), [L, X]=0\},$$

则

$$Z_L=e^{-adT}(\mathfrak{Z}),$$

其中 T 如命题 10 所示.

对 $\mathfrak{G}$ 中的任一元 X，设对应于两种阶化(6-3-28)及(6-3-30)的分解为

$$X=\sum X^i=\sum X_i,\ X^i\in G^i,\ X_i\in G_i,$$

此时记

$$X_+=\sum_{i>0}X_i,\quad X_-=\sum_{i<0}X_i,$$

$$X^+=\sum_{i>0}X^i,\quad X^-=\sum_{i<0}X^i.$$

命题 12（见本章末[22]） 设 $W\in Z_L$，则$[W_+, L]$与$[W^+, L]$属于$C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{B})$.

由此命题注意到 $\dfrac{\partial L}{\partial t}=-\dfrac{\partial q}{\partial t}\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{B})$,

即引出次之演化方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[\varphi(B)^+, L] \tag{6-3-34}$$

及

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[\varphi(B)_+, L], \tag{6-3-35}$$

其中 $B\in\mathfrak{Z}$, $\varphi(B)=e^{-adT}(B)$. 由命题 11，$\varphi(B)\in Z_L$，故(6-3-34)及(6-3-35)两边同属 $C^{\infty}(\boldsymbol{R}, \mathfrak{B})$. 方程(6-3-34)及(6-3-35)称为广义 KdV 方程.

命题 13（见章末[22]） 命题 10 给出的 H 乃广义 KdV 方

程(6-3-34)或(6-3-35)的公共守恒密度.

命题 9～13 的证明并不很复杂,因篇幅所限此处不再引述.命题 9、11 及 13 可以分别看作是 3.1 段中命题 4、5 及 6 在仿射李代数情形的一种推广;命题 10 可看作是 $\mathfrak{G}=A_{n-1}$ 时的规范等价式(6-3-27)的推广. 此外,注意到半单李代数中的 AKNS 方程族(6-3-16)可写作

$$L_t=[(\lambda^n W)_+,\ L],$$

比较此式与(6-3-34)或(6-3-35)可见,广义 KdV 方程与半单李代数中的 AKNS 族具有相仿的形式. 所不同的是在 AKNS 族的情形,我们对圈代数 $\mathfrak{G}\otimes\mathbf{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ 采用的阶化是 $\deg(x\otimes\lambda^i)=i$. 这种阶化在一定程度上相当于标准阶化(因在 $X^{(1)}$ 型仿射李代数的实现中诸生成元 e_i, f_i 中只有 e_0 与 f_0 带有 λ 的幂次). 在引出广义 KdV 方程时之所以采用两种阶化,其原因之一是为了使"位势" q 所在的空间 $\mathfrak{B}=G_0\cap\bigoplus\limits_{i<0}G^i$ 的维数尽可能地小:

$$\dim\mathfrak{B}<\dim G_0(<\infty).$$

例 3 取 $\mathfrak{G}=A_1^{(1)}$, $m=0$. 由 2.2 段知 $\mathfrak{G}$ 的生成元为 e_0, e_1, f_0, f_1 及 h_1(注意到 $h_0=-h_1$),其中

$$e_0=\lambda E_{21},\quad e_1=E_{12}.$$

又 G^0 由 $h_1=H\equiv E_{11}-E_{22}$ 生成, G_0 由 $h_1=H$, $e_1=E\equiv E_{12}$, $f_1=F=E_{21}$ 生成,即 $G_0=A_1$. 由命题 8(v), $G_0\cap\bigoplus\limits_{i<0}G^i$ 由 $f_1=F$ 生成,故 $\mathfrak{B}=G_0\cap\bigoplus\limits_{i<0}G^i$ 由 F 及 H 生成,

即
$$\mathfrak{B}=\begin{pmatrix} a & 0\\ c & -a\end{pmatrix}.$$

由此可见,在此情形算子(6-3-32)形如

$$L=\partial-U,\ U=q+\Lambda=\begin{pmatrix} q_0 & 1\\ \lambda+q_1 & -q_0\end{pmatrix}.$$

容易证明,由此引出的方程族具有简约 $q_0=0$,

此时
$$U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda+q_1 & 0\end{pmatrix},$$
相应的谱问题为
$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda+q_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$
或 $\psi_{1x}=\psi_2$, $\psi_{2x}=(\lambda+q_1)\psi_1$, 令 $y=\psi_1$, 即得
$$y_{xx}-(\lambda+q_1)y=0. \tag{6-3-36}$$
这一谱问题正是孤立子理论中引出著名的 KdV 方程族的谱问题(见章末[4]). 由于 $\mathfrak{G}=A_1^{(1)}$ 的这一特例, 我们称 (6-3-34) 或 (6-3-35) 为广义 KdV 方程族.

命题 14(见章末[22]) 广义 KdV 方程(6-3-34)具有简约
$$L=\partial-(q+A),$$
其中
$$q\in C^\infty(\boldsymbol{R},\ G^0).$$
当$q\in C^\infty(\boldsymbol{R},\ G^0)$, $B\in \mathfrak{Z}^+=\bigoplus_{i\geq 0}\mathfrak{Z}^i$ 时, 相应的方程(6-3-34)称为广义 MKdV 方程.

例 4 $\mathfrak{G}=A_1^{(1)}$, 此时 G^0 由 $H=E_{11}-E_{22}$ 生成, 故
$$U=q+A=\begin{pmatrix}+u & 1\\ \zeta^2 & -u\end{pmatrix},$$
这里为方便见记 $\lambda=\zeta^2$. 容易验证
$$\begin{pmatrix}\zeta & 1\\ -\zeta & 1\end{pmatrix}\left(\partial-\begin{pmatrix}+u & 1\\ \zeta^2 & -u\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\zeta & 1\\ -\zeta & 1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\partial-\begin{pmatrix}\zeta & -u\\ -u & -\zeta\end{pmatrix},$$
因此, 此时相应的谱问题 $\psi_x=U\psi$ 与谱问题
$$\psi_x=\begin{pmatrix}\zeta & -u\\ -u & -\zeta\end{pmatrix}\psi$$
等价, 后者正是孤立子理论中引出 MKdV 方程族的谱问题(见章末[4]), 这也是前面广义 MKdV 方程名称的由来.

Дринфельд 与 Соколов（见章末 [22, 24]）进而证明广义KdV与广义 MKdV 族间存在着广义 Miura 变换，此变换当 $\mathfrak{G}=A_1^{(1)}$时即化至周知的 KdV 与 MKdV 方程间的 Miura 变换（见章末[4]）．他们还进而研究了广义两维 Toda 格子．对仿射李代数$\mathfrak{G}$，设 $A=(a_{ij})$为 $\mathfrak{G}$ 的广义 Cartan 阵，则称方程

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x\partial y}=\exp\Big(\sum_{j=0}^{l} a_{ji}u_j,\Big),\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ l,$$

为两维广义 Toda 格子方程．Дринфельд 与 Соколов 导出了两维广义 Toda 格子方程与广义 MKdV 方程之间的关系，即若 $v(x, y, t)$ 对每一固定的 y 是广义 MKdV 方程的解，$v(x, y, 0)$ 是两维 Toda 格子方程的解，则对任意的 t，$v(x, y, t)$ 也为同一格子方程的解．

选择不同的仿射李代数 $\mathfrak{G}$，由广义 KdV 方程族可以引出一大类新的及文献上先前用各种不同方式导出的方程族．例如 Wilson（见章末[36]）指出，当 $\mathfrak{G}=C_2^{(1)}$ 时，广义 KdV 方程即耦合 KdV(CKdV)方程

$$u_t=u_{xxx}+6uu_x-12vv_x,\ v_t=-2(v_{xxx}+3uv_x).\quad (6\text{-}3\text{-}36)$$

这一方程是 Hirota 与 Satsuma（见本章末[8]）首先运用双线性算子法（见 § 4 节）提出来的，一开始并没有证明它是可积的，即存在 Lax 表示．(6-3-36) 还可以从 K-P 方程族引出，这正是下一节的主题．

§ 4 τ 函数和 K-P 方程族

本节内容取自章末[9]、[10]，但很多地方作了改写，以求陈述更为明了．

4.1 Fock 空间及 Fock 表示

设 $\mathfrak{A}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的一个不可交换的结合代数，由 1（单位元），ψ_n 及 ψ_n^*($n\in \boldsymbol{Z}$)生成，生成元间的交换关系为

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \ [\psi_m, \psi_n^*]_+ = \delta_{mn}. \quad (6-4-1)$$

此处及下面$[a, b]_\pm = ab \pm ba$, $[a, b]_-$简记为$[a, b]$. 由基本交换关系式(6-4-1)出发利用等式

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c] = [a, b]_+c - b[a, c]_+, \quad (6-4-2)^+$$

$$[a, bc]_+ = [a, b]c + b[a, c]_+ = [a, b]_+c - b[a, c]. \quad (6-4-2)^-$$

可以进而写出 $\mathfrak{G}$ 中元间的交换子$[a, b]$或反交换子$[a, b]_+$. 特别,

$$[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*] = \psi_i[\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*] + [\psi_i, \psi_k\psi_l^*]\psi_j^*$$
$$= \psi_i[\psi_j^*, \psi_k]_+\psi_l^* - \psi_k[\psi_i, \psi_l^*]_+\psi_j^*,$$

即得次之重要的交换关系式

命题 1 $[\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*] = \delta_{jk}\psi_i\psi_l^* - \delta_{il}\psi_k\psi_j^*.$

比较此命题与(6-2-4)式可见 $\psi_i\psi_j^*$ 与矩阵 E_{ij} 相似, 正是这种相似性, 下面将由 $\psi_m\psi_n^*$ 出发引出无限维李代数 $gl(\infty)$ 及其仿射李代数, 从而给出仿射李代数的又一种实现方式.

考察 $\mathfrak{A}$ 的一个左模 $\mathfrak{F}$, 它由向量$|0\rangle$生成

$$\mathfrak{F} = \{a|0\rangle \mid a \in \mathfrak{A}\},$$

(所谓代数 $\mathfrak{A}$ 的一个左模 V 乃指线性空间 V 及运算 $a\in\mathfrak{A}$, $v\in V \mapsto av \in V$, 此运算满足等式

$$(a+b)v = av + bv, \ a(v_1+v_2) = av_1 + av_2.$$

所谓左模 V 由 $v\in V$ 生成, 是指 V 中任一元均可表示成 av, 其中 $a\in\mathfrak{A}$. 相仿理解右模, 此时运算为 $a\in\mathfrak{A}$, $v\in V \mapsto va \in V$).

其中向量$|0\rangle$满足条件

$$\psi_n|0\rangle = 0 \quad (n<0); \quad \psi_n^*|0\rangle = 0 \quad (n\geqslant 0). \quad (6-4-3)^+$$

另外引入 $\mathfrak{A}$ 的一个右模 $\mathfrak{F}^*$, 它由向量$\langle 0|$生成.

$$\mathfrak{F}^* = \{\langle 0|a \mid a \in \mathfrak{A}\},$$

其中$\langle 0|$满足条件

$$\langle 0|\psi_n=0\quad (n\geqslant 0);\quad \langle 0|\psi_n^*=0\quad (n<0)\qquad (6\text{-}4\text{-}3)^-$$

(若将 ψ_n 与 ψ_n^*, $|0\rangle$与$\langle 0|$设想为互为转置的向量，则(6-4-3)$^-$即(6-4-3)$^+$的转置)

称 $\mathfrak{F}$ 与 $\mathfrak{F}^*$ 为 Fock 空间．这一概念源自量子场论(见章末[11])，$|0\rangle$与$\langle 0|$即真空向量而 ψ_n 与 ψ_n^* 即自由费米算子．有趣的是 Date 等人运用这种量子场论的语言与工具，引出的却是经典的结果．利用(6-4-1)及(6-4-2)$^\pm$，可以将 $\mathfrak{A}$ 中任一元 a 写成标准形式

$$a=\sum C\psi_+\psi_-^*\psi_-\psi_+^*+\langle a\rangle,\qquad (6\text{-}4\text{-}4)^+$$

其中 ψ_+ 泛指元 $\psi_i(i\geqslant 0)$之积即 $\psi_+=\psi_{i_1},\cdots,\psi_{i_k}\ (i_r\geqslant 0)$，相仿理解 ψ_-^*, ψ_- 及 ψ_+^*, $\psi_+\psi_-^*\psi_-\psi_+^*$ 中的四项积 ψ_+, ψ_-^*, ψ_-, ψ_+^* 不必全出现，但至少出现一种．又$\langle a\rangle$表示此种标准形式中的常数加项．

例如，$\qquad \psi_{-1}^*\psi_1=-\psi_1\psi_{-1}^*,\quad \psi_2^*\psi_2=-\psi_2\psi_2^*+1,$

$$\psi_{-1}\psi_2^*\psi_2\psi_{-1}^*=\psi_2\psi_{-1}^*\psi_{-1}\psi_2^*-\psi_{-1}^*\psi_{-1}-\psi_2\psi_2^*+1.$$

于是，$\qquad \langle\psi_{-1}^*\psi_1\rangle=0,\ \langle\psi_2^*\psi_2\rangle=1,\ \langle\psi_{-1}\psi_2^*\psi_2\psi_{-1}^*\rangle=1.$

我们将(6-4-4)$^+$之右端非常数项部分记作$:a:$，即

$$a=:a:+\langle a\rangle.\qquad (6\text{-}4\text{-}4)^-$$

由此定义易知，

$$\langle 1\rangle=1,\ \langle\psi_i\psi_j\rangle=\langle\psi_i^*\psi_j^*\rangle=0,\qquad (6\text{-}4\text{-}5a)$$

$$\langle\psi_i\psi_j^*\rangle=1\quad (i=j<0),\ =0\quad (\text{其它情形}),\qquad (6\text{-}4\text{-}5b)$$

$$\langle\psi_i^*\psi_j\rangle=1\quad (i=j\geqslant 0),\ =0\quad (\text{其它情形}).\qquad (6\text{-}4\text{-}5c)$$

一般可以证明

命题 2(Wick 定理，见章末[12])　设 $a_i=\psi_{n_i}$ 或 $\psi_{n_i}^*$,

则有 $\qquad \langle a_1a_2\cdots a_{2r+1}\rangle=0,$

$$\langle a_1\cdots a_{2r}\rangle=\sum(-1)^\sigma\langle a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\rangle\cdots\langle a_{\sigma(2r-1)}a_{\sigma(2r)}\rangle,$$

其中和式遍及满足 $\sigma(1)<\sigma(2)$, $\cdots$, $\sigma(2r-1)<\sigma(2r)$ 及 $\sigma(1)<\sigma(3)<\cdots<\sigma(2r-1)$ 的所有 $1, 2, \cdots, 2r$ 的排列

$$(\sigma(1),\cdots,\sigma(2r)).$$

例如，$\langle a_1a_2a_3a_4\rangle$

$$=\langle a_1a_2\rangle\langle a_3a_4\rangle-\langle a_1a_3\rangle\langle a_2a_4\rangle+\langle a_1a_4\rangle\langle a_2a_3\rangle.$$

于是，$\langle\psi_{-1}\psi_2^*\psi_2\psi_{-1}^*\rangle=\langle\psi_{-1}\psi_{-1}^*\rangle\langle\psi_2^*\psi_2\rangle=1.$

今引入

$$H_l=\sum_{n\in\mathbf{Z}}:\psi_n\psi_{n+l}^*:,\ H(x)=\sum_{l=1}^{\infty}x_lH_l,\tag{6-4-6}^+$$

其中 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots)$ 为一列无限多个变元 x_l. 注意到

$$\langle\psi_n\psi_{n+l}^*\rangle=0(l>0),$$

故当 $l>0$ 时 $H_l=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi_n\psi_{n+l}^*$，即

$$H(x)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbf{Z}}x_l\psi_n\psi_{n+l}^*.\tag{6-4-6}^-$$

容易验证

$$H_l|0\rangle=0\quad(l=1,\ 2,\ \cdots).\tag{6-4-7}$$

实际上，当 $n+l\geqslant0$ 时

$$\psi_n\psi_{n+l}^*|0\rangle=\psi_n(\psi_{n+l}^*|0\rangle)=0,$$

而当 $n+l<0$ 时 $n<-l<0$，从而

$$\psi_n\psi_{n+l}^*|0\rangle=-\psi_{n+l}^*(\psi_n|0\rangle)=0.$$

由(6-4-7)推知

$$H(x)|0\rangle=0.\tag{6-4-8}$$

由此特别可以推知

$$e^{H(x)}|0\rangle\equiv\left(1+H(x)+\frac{1}{2!}H(x)^2+\cdots\right)|0\rangle=|0\rangle.\tag{6-4-9}$$

对 $a\in\mathfrak{A}$，记 $\quad a(x)=e^{H(x)}ae^{-H(x)}=e^{\mathrm{ad}H(x)}a.$

注意由此定义有 $e^{H(x)}abe^{-H(x)}=a(x)b(x)$，故由(6-4-9)得

$$\begin{aligned}\langle0|e^Ha_1\cdots a_n|0\rangle&=\langle0|e^Ha_1\cdots a_ne^{-H}|0\rangle\\&=\langle0|a_1(x)\cdots a_n(x)|0\rangle.\end{aligned}\tag{6-4-10}$$

映射

$$\rho:a|0\rangle\in\mathfrak{F}\mapsto\rho(a|0\rangle)\equiv\langle0|e^Ha|0\rangle\tag{6-4-11}$$

将 Fock 空间中元 $a|0\rangle$ 映为 $\boldsymbol{C}$ 上 x_i 的多项式 $\rho(a|0\rangle)\in\boldsymbol{C}[x_1, x_2, \cdots]$，因 $\mathfrak{A}$ 中的元可视为 $\mathfrak{F}$ 中的线性算子：$a(b|0\rangle)=(ab)|0\rangle$，故在映射(6-4-11)下算子 a 映为 $\boldsymbol{C}[x_1, x_2\cdots]$ 中的算子，由此将引出 Fock 表示．为了具体定出这种表示的形式，我们须首先计算 $\langle 0|e^H a|0\rangle$．为此目的，我们引入次之多项式 $p_l(x)$．

$$e^{\xi(x,k)}=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)k^n, \quad \left(\xi(x, k)=\sum_{l=1}^{\infty}x_l k^l\right), \qquad (6\text{-}4\text{-}12)$$

将上式左边按 ξ 展开，再将 k^l 的幂次合并，容易得到 $p_l(x)$ 的表示式

$$p_n(x)=\sum_{\|\alpha\|=n}\frac{x^\alpha}{\alpha!}, \qquad (6\text{-}4\text{-}13)$$

其中 $\alpha=(\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \cdots)$，$\|\alpha\|$，$\alpha!$，$x^\alpha$ 如 2.5 段所示，即 $\quad \|\alpha\|=\sum i\alpha(i)$，$\alpha!=\prod\alpha(i)!$，$x^\alpha=\prod x_i^{\alpha(i)}$．

例如 $n=3$ 的分析为 $3=1+1+1=1+2=3$，或写作 1^3，$1^1 2^1$，3^1，

于是
$$p_3(x)=\frac{x_1^3}{3!}+\frac{x_1^1x_2^1}{1!1!}+\frac{x_3^1}{1!}$$
$$=\frac{x_1^3}{6}+x_1x_2+x_3.$$

利用 $p_n(x)$ 的生成函数(6-4-12)可以导出 p_n 间的一些恒等式．

例如由
$$1=e^{-\xi(x,k)}e^{\xi(x,k)}$$
$$=\left(\sum_l p_l(-x)k^l\right)\left(\sum_r p_r(x)k^r\right)$$
$$=\sum_l\left(\sum_{i+j=l}p_i(-x)p_j(x)\right)k^l,$$

推知

$$\sum_{j=0}^{l} p_{l-j}(-x)p_j(x)=\delta_{l0}. \qquad (6\text{-}4\text{-}14)$$

注意到
$$[H(x), \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\psi_k]$$
$$=\sum_{l,n,k} x_l a_k[\psi_n\psi_{n+l}^*, \psi_k]$$
$$=\sum x_l a_k\psi_n[\psi_{n+l}^*, \psi_k]_+$$
$$=\sum_n\left(\sum_{l\geq 1,k} x_l a_k\delta_{n+l,k}\right)\psi_n.$$

由上式可见，若让 $\sum a_k\psi_k$ 与无限维列向量 $(a_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ 对应，则 $(adH)(\sum a_k\psi_k)$ 对应于向量 $(\sum x_l\Lambda^l)(a_k)$，其中 $\Lambda=(\delta_{m+1,n})_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 为无穷阶阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\ddots & \ddots & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

对此易见 $\Lambda^l=(\delta_{i+l,j})$，从而

$$K\equiv\sum_{l=1}^{\infty}x_l\Lambda^l$$

$$=\begin{bmatrix}\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ & & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ & & & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

由此，

$$e^K=e^{\sum_{l=1}^{\infty}x_l\Lambda^l}=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(x)\Lambda^l$$

$$=1+\sum_{l=1}^{\infty}p_l(x)\Lambda^l$$

$$=\begin{bmatrix}\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & 1 & p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & & \\ & & 1 & p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & \\ & & & 1 & p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}.$$

既然 $(adH)(\sum a_k\psi_k)$ 对应于向量 $K(a_k)$，因此 $e^{adH}(\sum a_k\psi_k)$ 对应于向量 $e^K(a_k)$，亦即

$$e^{\mathrm{ad}H}\sum a_k\psi_k=(\cdots\psi_k\psi_{k+1}\cdots)e^K\begin{bmatrix}\vdots\\ a_k\\ a_{k+1}\\ \vdots\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i,j\in\mathbf{Z}}p_l(x)\delta_{i+l,j}\psi_i a_j$$

$$=\sum_{l,i}p_l(x)\psi_i a_{i+l}. \tag{6-4-15}$$

特别有

$$\psi_n(x)\equiv e^H\psi_n e^{-H}$$

$$=e^{\mathrm{ad}H}\sum_k\delta_{kn}\psi_k$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(x)\psi_{n-l}, \tag{6-4-16$^+$}$$

相仿成立

$$\psi_n^*(x)\equiv e^H\psi_n^*e^{-H}=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(-x)\psi_{n+l}^*. \tag{6-4-16$^-$}$$

我们记

$$\psi(k)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi_n k^n,\quad \psi^*(k)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\psi_n^*k^{-n}, \tag{6-4-17}$$

由此定义及(6-4-16)$^\pm$推知

$$e^{H(x)}\psi(k)e^{-H(x)}=\sum(e^H\psi_i e^{-H})k^i$$

$$=\sum(\psi_{i-j}p_j)k^i$$

$$=\sum\psi_l k^l p_j k^j$$

$$=(\sum p_j k^j)\psi(k),$$

因此

$$e^{H(x)}\psi(k)e^{-H(x)}=e^{\xi(x,k)}\psi(k). \tag{6-4-18$^+$}$$

相仿有

$$e^{H(x)}\psi^*(k)e^{-H(x)}=e^{-\xi(x,k)}\psi^*(k). \tag{6-4-18$^-$}$$

对 $\psi(k)$ 和 $\psi^*(k)$ 及 $a\in\mathfrak{A}$ 还成立如下命题.

命题 3(见章末[9, 10])

$$\langle m|\psi(k)e^{H(x)}a|0\rangle=k^{m-1}\langle m-1|e^{H(x-\varepsilon(k))}a|0\rangle, \tag{6-4-19$^+$}$$

$$\langle m|\psi^*(k)e^{H(x)}a|0\rangle=k^{-m}\langle m+1|e^{H(x+\varepsilon(k))}a|0\rangle, \tag{6-4-19$^-$}$$

其中

$$\varepsilon(k)=\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{2k^2},\ \frac{1}{3k^3},\ \cdots\right),\tag{6-4-20}$$

$$\langle m|=\begin{Bmatrix}\langle 0|\psi_{-1}\cdots\psi_m, & (m<0), & \psi_m^*\cdots\psi_{-1}^*|0\rangle\\ \langle 0|, & (m=0), & |0\rangle\\ \langle 0|\psi_0^*\cdots\psi_{m-1}^*, & (m>0), & \psi_{m-1}\cdots\psi_0|0\rangle\end{Bmatrix}=|m\rangle.$$

下面就 $m=1$, $a=\psi(p)\psi^*(q)$ 为例证明(6-4-19)$^+$如下.

$$\begin{aligned}&\langle 1|\psi(k)e^H\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle\\ &\overset{(6-4-9)}{=\!=\!=}\langle 0|\psi_0^*\psi(k)(e^H\psi(p)e^{-H})(e^H\psi^*(q)e^{-H})|0\rangle\\ &\overset{(6-4-18)^+}{=\!=\!=}e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)}\langle 0|\psi_0^*\psi(k)\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle.\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}&\langle 0|\psi_0^*\psi(k)\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle\\ &=\sum\langle\psi_0^*\psi_i\psi_j\psi_k^*\rangle k^ip^jq^{-k}\\ &=\sum(\langle\psi_0^*\psi_i\rangle\langle\psi_j\psi_k^*\rangle-\langle\psi_0^*\psi_j\rangle\langle\psi_i\psi_k^*\rangle)k^ip^jq^{-k}\\ &=\Big(\sum_{\substack{i=0\\ j=k<0}}-\sum_{\substack{j=0\\ i=k<0}}\Big)k^ip^jq^{-k}\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^j-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{q}{k}\right)^i\\ &=\left(\frac{q}{p-q}-\frac{q}{k-q}\right)\\ &=\frac{q(k-p)}{(p-q)(k-q)},\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\langle 1|\psi(k)e^H\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle\\ &=e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)}\frac{q(k-p)}{(p-q)(k-q)}.\end{aligned}\tag{6-4-21}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\langle 0|e^{H(x-\varepsilon(k))}\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle\\ &=\langle 0|(e^{H(x-\varepsilon)}\psi(p)e^{-H(x-\varepsilon)})(e^{H(x-\varepsilon)}\psi^*(q)e^{-H(x-\varepsilon)})e^{H(x-\varepsilon)}|0\rangle\\ &\overset{(6-4-18)^+}{=\!=\!=}e^{\xi(x-\varepsilon,p)-\xi(x-\varepsilon,q)}\langle\psi(p)\psi^*(q)\rangle.\end{aligned}\tag{6-4-22}$$

经由与(6-4-21)式相仿之推导易得

$$\langle \psi(p)\psi^*(q)\rangle=\frac{q}{p-q}. \tag{6-4-23}$$

又

$$\begin{aligned}e^{\xi(x-\varepsilon,p)}&=e^{\xi(x,p)}e^{\xi(-\varepsilon,p)}\\&=e^{\xi(x,p)}\exp\left(-\sum_l\frac{1}{l}\left(\frac{p}{k}\right)^l\right)\\&=e^{\xi(x,p)}\exp\left(\ln\left(1-\frac{p}{k}\right)\right)\\&=e^{\xi(x,p)}\left(1-\frac{p}{k}\right).\end{aligned}$$

因此由(6-4-22)得

$$\begin{aligned}&\langle 0|e^{H(x-\varepsilon(k))}\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle\\&=e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)}\frac{q}{(p-q)}\frac{1-\frac{p}{k}}{1-\frac{q}{k}}\\&=e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)}\frac{q(k-p)}{(p-q)(k-q)}\\&\overset{(6\text{-}4\text{-}21)}{=\!=}\langle 1|\psi(k)e^{H}\psi(p)\psi^*(q)|0\rangle.\end{aligned}$$

一般情形下的(6-4-19)$^\pm$可用 Wick 定理(本节命题2)经由相仿的推理得出。

今引入与(3-2-42)相仿的顶点算子

$$X(k)=e^{\xi(x,k)}e^{-\xi(\tilde{\partial},k^{-1})}, \tag{6-4-24a}$$

$$X^*(k)=e^{-\xi(x,k)}e^{\xi(\tilde{\partial},k^{-1})}, \tag{6-4-24b}$$

$$\left(\tilde{\partial}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3},\ \cdots\right)\right), \tag{6-4-24c}$$

则由(6-4-19)$^\pm$我们有

$$\begin{aligned}&k^{m-1}X(k)\langle m-1|e^{H(x)}a|0\rangle\\&=k^{m-1}e^{\xi(x,k)}\langle m-1|e^{-\xi(\tilde{\partial},k^{-1})}e^{H(x)}a|0\rangle\\&=k^{m-1}e^{\xi(x,k)}\langle m-1|e^{H(x-\varepsilon(k))}a|0\rangle\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(6\text{-}4\text{-}19)^+} e^{\xi(x,k)}\langle m|\psi(k)e^{H(x)}a|0\rangle$$
$$\xrightarrow{(6\text{-}4\text{-}18)^+} \langle m|e^{H(x)}\psi(k)a|0\rangle.$$

因此，

$$\langle m|e^{H(x)}\psi(k)a|0\rangle=k^{m-1}X(k)\langle m-1|e^{H(x)}a|0\rangle. \tag{6-4-25$^+$}$$

相仿有

$$\langle m|e^{H(x)}\psi^*(k)a|0\rangle=k^{-m}X^*(k)\langle m+1|e^{H(x)}a|0\rangle. \tag{6-4-25$^-$}$$

有了上述准备后我们可以着手引出 Fock 表示. 首先将 $\mathfrak{A}$ 中形如

$$\psi^*_{m_1}\cdots\psi^*_{m_k}\psi_{n_k},\ \cdots\psi_{m}$$

的元之全体记作 $\mathfrak{A}(0)$. 由 $|0\rangle$ 之定义(6-4-3)$^+$ 易见 $\mathfrak{F}$ 的子空间 $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{A}(0)|0\rangle$ 的一组基底为

$$\psi^*_{m_1}\cdots\psi^*_{m_k}\psi_{n_k}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle,\ m_1,\ \cdots,\ m_k<0\leqslant n_1,\ \cdots,\ n_k.$$

这是因为当 $m_i\geqslant 0$ 时，$\psi^*_{m_i}$ 可与 ψ_{n_j} 交换直至与 $|0\rangle$ 相遇化归为零，而每交换一次，要么变号，要么 $\psi^*_{m_i}$ 与 ψ_{m_i} 互相湮灭，如

$$\begin{aligned}\psi^*_{-2}\psi^*_1\psi_3\psi_1|0\rangle&=-\psi^*_{-2}\psi_3\psi^*_1\psi_1|0\rangle\\&=-\psi^*_{-2}\psi_3(1-\psi_1\psi^*_1)|0\rangle\\&=-\psi^*_{-2}\psi_3|0\rangle.\end{aligned}$$

又当 $n_i<0$ 时，ψ_{n_i} 可与右边的 ψ_{n_j} 交换，直至与 $|0\rangle$ 相遇化归为零.

利用映射 ρ(6-4-11)，$\mathfrak{F}_0$ 中的这组基底映至 $\boldsymbol{C}[x]\equiv\boldsymbol{C}[x_1,\ x_2,\ \cdots]$ 中的一组元

$$\psi^*_{m_1}\cdots\psi^*_{m_k}\psi_{n_k}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle\xrightarrow{\ \rho\ }\langle 0|e^H\psi^*_{m_1}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle. \tag{6-4-26}$$

我们将说明 $\langle 0|e^H\psi^*_{m_1}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle$ 构成 $\boldsymbol{C}[x_1,\ x_2,\ \cdots]$ 的一组基，由此将推知 $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{A}(0)|0\rangle$ 与 $\boldsymbol{C}[x_1,\ x_2,\ \cdots]$ 同构. 为此我们引入 Young 盘，对于一组非增的正整数列 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_s$，如下图(图6-5)：

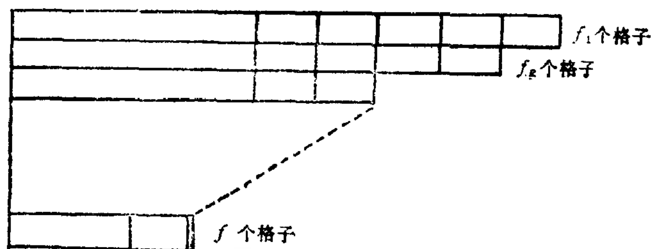


图 6-5

称为标号为 $(f_1, \cdots, f_s)$ 的 Young 盘．一个 Young 盘也可以用一组整数 $m_1, \cdots, m_k, n_1, \cdots, n_k$ 来表示，其中 $m_i<0\leqslant n_j$（图6-6）：

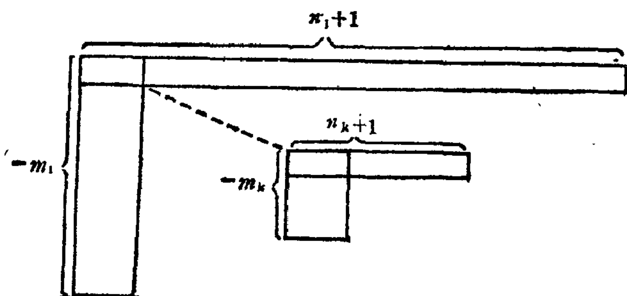


图 6-6

不妨将这种表示形式的 Young 盘记作 $Y[m_1, \cdots, m_k; n_1, \cdots, n_k]$．例如（图6-7），



$Y(5, 4, 4, 2)$　　　　$Y[-4, -3, -1; 4, 2, 1]$

图 6-7

今对 Young 盘 $Y=Y(n+1, \underbrace{1, \cdots, 1}_{-m-1})=Y[-m, n]$ 定义

$$\chi_Y(x)\equiv\chi_{mn}(x)\equiv(-1)^m\langle 0|\psi_m^*(x)\psi_n(x)|0\rangle\quad(m<0\leqslant n),\tag{6-4-27}$$

对此我们有 $\langle\psi_m^*(x)\psi_n(x)\rangle$

$$\xlongequal{(6\text{-}4\text{-}16)'}\sum_{l,s}p_l(-x)p_s(x)\langle\psi_{m+l}^*\psi_{n-s}\rangle$$

$$=\sum_{l,s}p_{l-m}(-x)p_{n-s}(x)\langle\psi_l^*\psi_s\rangle$$

$$=\sum_{l=0}^{n}p_{l-m}(-x)p_{n-l}(x).$$

故由(6-4-14)得

$$\langle\psi_m^*(x)\psi_n(x)\rangle=\sum_{l=0}^{n}p_{l-m}(-x)p_{n-l}(x)$$

$$=-\sum_{l=-1}^{m}p_{l-m}(-x)p_{n-l}(x).\tag{6-4-28}$$

因此，当 $Y=Y[-m,n]$ $(m<0\leqslant n)$ 时，

$$\chi_y(x)\equiv\chi_{mn}(x)=(-1)^m\sum_{l<0}p_{l-m}(x)p_{n-l}(x)$$

$$=(-1)^{m+1}\sum_{l\geq 0}p_{l-m}(x)p_{n-l}(x).\tag{6-4-29}$$

一般，对 Young 盘 $Y[m_1,\cdots,m_k;n_1,\cdots,n_k]$ $(m_i<0\leqslant n_i)$，我们定义

$$\chi_y(x)=\det(\chi_{mn}(x))_{\substack{m=m_1,\cdots,m_k,\\ n=n_1,\cdots,n_k}}\tag{6-4-30}$$

称之为 Schur 函数(有些作者也称 $p_i(x)$ 为 Schur 函数或 Schur 多项式等)．$\chi_y(x)$ 的一个等价表示式为

$$\chi_y(x)=\det(p_{f_i-i+j}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant s},$$

其中 $Y=Y(f_1,\cdots,f_s)$．Schur 函数的例子如

$$\chi_{\underbrace{\square\square\square\square\square}_{n}}=\chi_{-1;n+1}=p_n(x),$$

$$\chi_{\text{(column of } m \text{ boxes)}}=\chi_{-m,0}=(-1)^{-m}p_m(-x),$$

于是有

$$\chi_{\square}=p_1(x)=x_1,$$
$$\chi_{\square\square}=p_2(x)=x_2+\frac{1}{2}x_1^2,$$
$$\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}=p_2(-x)=-x_2+\frac{1}{2}x_1^2,$$
$$\chi_{\square\square\square}=p_3(x)=x_3+x_1x_2+\frac{1}{6}x_1^3,$$
$$\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}=-p_3(-x)=x_3-x_1x_2+\frac{1}{6}x_1^3,$$
$$\chi_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}=\chi_{-2,1}=p_3(-x)+p_2(-x)p_2(-x)p_1(x)=-x_3+\frac{1}{3}x_1^3,$$
$$\cdots$$

Schur 函数的一个重要性质如下命题所述.

命题 4(见章末[12]) 当 Y 遍及所有可能的 Young 盘时, $\chi_Y(x)$ 构成 $\mathbf{C}[x_1, x_2, \cdots]$ 的一组基. 也就是说, 所有 x_i 的多项式均可表示成 $\chi_Y(x)$ 的线性组合.

例如 $x_1=\chi_{\square}$ $x_1^2=\chi_{\square\square}+\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$, $x_2=\chi_{\square\square}-\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$,

$$x_1x_2=\frac{1}{2}(\chi_{\square\square\square}-\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}),$$

$$x_3=\chi_{\square\square\square}+\chi_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}-\chi_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}},$$

等等.

Schur 函数(6-4-30)可以表示成如下形式

$$\chi_Y(x)=(-1)^{m_1+\cdots+m_k}\langle 0|e^{H(x)}\psi_{m_1}^*\cdots\psi_{m_k}^*\psi_{n_k}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle. \quad (m_i<0\leqslant n_i) \tag{6-4-31}$$

实际上由 Wick 定理易得

$$\begin{aligned}&(-1)^{m_1+\cdots+m_k}\langle 0|e^{H(x)}\psi_{m_1}^*\cdots\psi_{m_k}^*\psi_{n_k}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle\\&=(-1)^{m_1+\cdots+m_k}\det(\langle\psi_{m_i}^*\psi_{n_j}(x)\rangle)\\&\overset{(6\text{-}4\text{-}27)}{=\!=\!=}\det(\chi_{m_in_j}(x))\overset{(6\text{-}4\text{-}30)}{=\!=\!=}\chi_Y(x).\end{aligned}$$

故由命题 4 及(6-4-26)可见，

$$\rho(\psi_{m_1}^*\cdots\psi_{m_k}^*\psi_{n_k}\cdots\psi_{n_1}|0\rangle)\quad(m_i<0\leqslant n_i)$$

的全体构成 $C[x]$ 的基. 因此，ρ 是 $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{A}(0)|0\rangle$ 与 $C[x]$ 的同构映射.

现在来考察算子 $\psi_m^*\psi_n\in\mathfrak{A}(0)\quad(m<0\leqslant n)$，在此同构下的象. 为此我们计算如下($a\in\mathfrak{A}(0)$).

$$\begin{aligned}\rho(\psi(p)\psi^*(q)a|0\rangle)&\xlongequal{(6\text{-}4\text{-}26)}\langle 0|e^{H(x)}\psi(p)\psi^*(q)a|0\rangle\\&\xlongequal{(6\text{-}4\text{-}25)^+,\ (m=0)}p^{-1}X(p)\langle -1|e^H\psi^*(q)a|0\rangle\\&\xlongequal{(6\text{-}4\text{-}25)^-,\ (m=-1)}p^{-1}X(p)qX^*(q)\langle 0|e^Ha|0\rangle\\&=(q/p)X(p)X^*(q)\rho(a|0\rangle).\end{aligned}$$

由此可见，$b\in\mathfrak{A}(0)$ 的象 $\rho(b)$: $\rho(b)\rho(a|0\rangle)\equiv\rho(ba|0\rangle)$ 为

$$\rho(\psi(p)\psi^*(q))=\left(\frac{q}{p}\right)X(p)X^*(q).\qquad(6\text{-}4\text{-}32)$$

注意到对任意的 $f(x)$ 有

$$\begin{aligned}&e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})}e^{-\xi(x,q)}f(x)\\&=e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})}(e^{-\xi(x,q)}f(x))=(e^{-\xi(x-\varepsilon(p),q)}f(x-\varepsilon(p))\\&=e^{-\xi(x,q)}e^{-\xi(-\varepsilon(p),q)}e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})}f(x)\\&=e^{-\xi(x,q)}\left(1-\frac{q}{p}\right)^{-1}e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})}f(x),\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})}e^{-\xi(x,q)}\\&=\left(1-\frac{q}{p}\right)^{-1}e^{-\xi(x,q)}e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})},\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}X(p)X^*(q)&=(e^{\xi(x,p)}e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})})(e^{-\xi(x,q)}e^{\xi(\tilde\partial,q^{-1})})\\&=\left(1-\frac{q}{p}\right)^{-1}X(p,q),\end{aligned}\qquad(6\text{-}4\text{-}33)$$

其中，

$$X(p,q)=e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)}e^{-\xi(\tilde\partial,p^{-1})+\xi(\tilde\partial,q^{-1})}.\qquad(6\text{-}4\text{-}34)$$

由(6-4-32)即得

$$\rho(\psi(p)\psi^*(q))=\frac{q}{(p-q)}X(p,\ q). \qquad (6\text{-}4\text{-}35)$$

今由(6-4-4b)

$$:\psi_n\psi_m^*:=\psi_n\psi_m^*-\langle\psi_n\psi_m^*\rangle, \qquad (6\text{-}4\text{-}36)$$

于是，

$$:\psi(p)\psi^*(q):=\psi(p)\psi^*(q)-\langle\psi(p)\psi^*(q)\rangle$$

$$\xlongequal{(6\text{-}4\text{-}\ )}\psi(p)\psi^*(q)-\frac{q}{(p-q)}.$$

由此式及(6-4-35)式可见，

$$\rho(:\psi(p)\psi^*(q):)=\frac{q}{(p-q)}(X(p,\ q)-1). \qquad (6\text{-}4\text{-}37)$$

我们将(6-4-37)右边按 p, q 展开，

$$\frac{q}{(p-q)}(X(p,\ q)-1)=\sum_{m,n}Z_{mn}p^m q^{-n}. \qquad (6\text{-}4\text{-}38)$$

由 $\psi(p)$, $\psi^*(q)$ 的定义(6-4-17)，Z_{mn} 是 $:\psi_m\psi_n^*:$ 的象：

$$Z_{mn}=\rho(:\psi_m\psi_n^*:). \qquad (6\text{-}4\text{-}39)$$

可以证明(本章末[9]、[10]) Z_{mn} 的一般表示式为

$$Z_{m,n}=\sum_{i,j\geq 0}\langle\psi_{m+i}(x)\psi_{n-j}^*(x)\rangle\, p_i(\tilde{\partial})p_j(\tilde{\partial})-\langle\psi_m\psi_n^*\rangle.$$

由(6-4-16)$^\pm$及(6-4-28)知上式中

$$\langle\psi_i(x)\psi_j^*(x)\rangle=\begin{cases}0 & (j\geqslant 0),\\ \delta_{ij} & (i<0),\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{-j-1}p_l(-x)p_{i-j-l}(x) & (i\geqslant 0,\ j<0).\end{cases}$$

例

$$Z_{-1,0}=\partial_1+(-x_1)\partial_1^2+(-x_2)\partial_1\partial_2+\frac{1}{2}x_1^2\partial_1^3+\cdots,$$

$$Z_{0,-1}=x_1+(-x_1^2)\partial_1+(-x_1x_2)\partial_2+\frac{1}{2}x_1^3\partial_1^2+\cdots.$$

与算子(6-4-35)相比，(6-4-37)在 $p=q$ 处无奇性. 为此，我们注意到对任一 $f(x)$ 有

$$\lim_{q\to p}\frac{q}{(p-q)}(X(p,\ q)-1)f(x)$$

$$=\lim_{q\to p} q(e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)}f(x-\varepsilon(p)+\varepsilon(q))-f(x))$$

$$=p\left(\xi'_p(x,\ p)f(x)+\sum\left(\frac{1}{-lp^l}\right)'_p\frac{\partial}{\partial x_l}f(x)\right)$$

$$=\left(\sum_{l\geq 1}(lx_l)p^l+\sum_{l\geq 1}p^{-l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)f(x).$$

另一方面，$\lim_{q\to p}\frac{q}{p-q}(X(p,\ q)-1)=\sum_{m,n}Z_{mn}p^{m-n}$

$$=\sum_l p^l\sum_{m-n=l}Z_{mn},$$

故得 $\rho(H_l)=\rho(\sum_n:\psi_n\psi^*_{n+l}:)=\sum_n Z_{n,n+l}$

$$=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_l} & l>0,\\ 0 & l=0,\\ (-l)x_{(-l)} & l<0.\end{cases}\tag{6-4-40}$$

这样，$\sum_n Z_{n,n+l}$ 给出了我们在 2.5 段讨论顶点算子时引入的“生成算子”x_l 与“湮灭算子”$\frac{\partial}{\partial x_l}$ 的一个统一的表达式.

(6-4-39)式正是我们寻求的 Fock 表示. 由于

$$\rho(a,\ b)=\rho(a)\rho(b),$$

故更一般的 $a\in\mathfrak{A}(0)$ 的表示可由算子 Z_{mn} 的积形式表出.

4.2 τ 函数

我们在 3.3 段中曾提到，KdV 方程族是从谱问题 $\psi_{xx}+v\psi=\lambda\psi$ 引出的，1976 年 Гельфанд 与 Дикий 讨论了更一般的谱问题(见章末[13])

$$D\psi\equiv(\partial^n+v_{n-2}\partial^{n-2}+\cdots+v_1\partial+v_0)\psi=\lambda\psi,\tag{6-4-41}$$

其中 $\partial=\partial/\partial x_1$. 他们成功地运用分数幂算子 $L=D^{1/n}$ 给出了与谱问题(6-4-41)相关的方程族. L 的形式如

$$L=\partial+u_1+u_2\partial^{-1}+u_3\partial^{-2}+\cdots,\tag{6-4-42}$$

是拟微分算子. 拟微分算子的一般形式为

$$P=\sum_{i=-\infty}^{s} a_i\partial^i.$$

对此，我们约记 P_+, P^* 为 P 的微分算子部分及其形式共轭，即

$$P_+=\sum_{i=0}a_i\partial^i,\quad P^*=\sum_{i=-\infty}^{s}(-\partial)^i a_i.$$

Гельфанд 与 Дикий 引出的方程族形如 $D_t=[(D^{\frac{k}{n}})_+,\ D]$，即

$$(L^n)_t=[(L^k)_+,\ L^n]. \tag{6-4-43}$$

今记

$$B_k=(L^k)_+\quad(k=1,\ 2,\ \cdots), \tag{6-4-44}$$

于是方程族(6-4-43)即次之线性问题

$$B_n\psi=\lambda\psi,\quad \psi_t=B_k\psi \tag{6-4-45}$$

的可积条件．KdV 方程 $v_t=\frac{1}{4}(v_{xxx}+6vv_x)$ 即(6-4-45)在 $n=2$, $k=3$ 时的特例，此时

$$D=\partial^2+v,\quad B_3=(D^{\frac{3}{2}})_+=\partial^3+\frac{3}{2}v\partial+\frac{3}{4}v_x.$$

看来，Date 等人的工作(见章末[9]、[10])是受了 Гельфанд 与 Дикий 工作的启发．他们直接从拟微分算子(6-4-42)出发，并认定诸系数 $u_i=u_i(x)$ 为无穷多个变元

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots)$$

的函数．此时，不必如上述方程族那样有 $L^n=(L^n)_+$．Date 等人考察了次之线性问题族

$$\frac{\partial}{\partial x_n}w(x,\ k)=B_n(x,\ \partial)w(x,\ k), \tag{6-4-46}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

并称(6-4-46)的相容条件

$$\frac{\partial B_m}{\partial x_n}-\frac{\partial B_n}{\partial x_m}=[B_n,\ B_m] \tag{6-4-47}$$

为 K-P 方程族．例如当 $m=3$, $n=2$ 时，(6-4-47)将引出 u_2 与 u_3 满足的一对方程($u_1\equiv0$)，从中消去 u_3 可得

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3}-\frac{3}{2}u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}.$$

若改记 $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=t$, $u_2=u$, 上述方程即

$$\left(u_t-\frac{1}{4}u_{xxx}-\frac{3}{2}uu_x\right)=\frac{3}{4}u_{yy}.$$

此方程称为 K–P 方程，又称两维 KdV 方程，当 u 与 y 无关时，即化至 KdV 方程. K–P 方程最初出现在两维流体运动的研究中.

我们先给出拟微分算子的以下公式

$$\partial^n a=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}a^{(i)}\partial^{n-i},\quad n\in \boldsymbol{Z} \tag{6-4-48}$$

这里 $a^{(i)}=\dfrac{\partial^i a}{\partial x_1^i}$，二项式系数 $\dbinom{n}{i}$ 定义为

$$\binom{n}{i}=\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!},\quad \binom{0}{i}=\delta_{0i}.$$

由此定义易见

$$\binom{-n}{i}=(-1)^i\binom{n+i-1}{i},\quad n>0.$$

注意(6-4-48)是一个算子等式: $(\partial^n a)f\equiv\partial^n(af)$. 等式(6-4-48)当 $n\geq 0$ 时即为 Leibniz 法则. 尤其当 $n=1$ 时有 $\partial a=a^{(1)}+a\partial$，由此式两边施以 ∂^{-1} 得 $\partial^{-1}a=a\partial^{-1}-\partial^{-1}a^{(1)}\partial^{-1}$，对式中 $\partial^{-1}a^{(1)}$ 再运用此式得 $\partial^{-1}a=a\partial^{-1}-(a^{(1)}\partial^{-1}-\partial^{-1}a^{(2)}\partial^{-1})\partial^{-1}=a\partial^{-1}-a^{(1)}\partial^{-2}+(\partial^{-1}a^{(2)}\partial^{-2})$，如此反复即得

$$\partial^{-1}a=a\partial^{-1}-a^{(1)}\partial^{-2}+a^{(2)}\partial^{-3}-\cdots.$$

此即(6-4-48)在 $n=-1$ 的特例，因此时 $\dbinom{-1}{i}=(-1)^i$. 由上式经归纳法即可证明(6-4-48)对 $n<0$ 亦真.

今证

命题 5 设 $P=\sum_{i\geq 0}a_i\partial^{-i}$, $Q=\sum_{j\geq 0}(-1)^j b_j\partial^{-j}$, $\left(\partial=\dfrac{\partial}{\partial x},\quad a_i=\right.$

$a_i(x_1)$, $b_i=b_i(x_1)$)，为两个拟微分算子，则

(i) $$\operatorname*{Res}_k (P(x_1', \partial')e^{x_1' k}\cdot Q(x_1, \partial)e^{-x_1 k})=0 \qquad (6\text{-}4\text{-}49)$$

当且仅当

$$\sum_{l,i}\binom{m}{l} a_i^{(l)} b_{m-i-l+1}=0 \quad (m=0,\ 1,\ \cdots), \qquad (6\text{-}4\text{-}50)$$

其中 $$\partial'=\frac{\partial}{\partial x_1'},\quad \operatorname*{Res}_k\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i k^i\Big)\equiv f_{-1},$$

并约定当 $l>m\geqslant 0$ 时 $\binom{m}{l}=0$，及当 $i<0$ 时 $b_i=0$；

(ii) 若 $a_0=b_0=1$，则(6-4-49)成立当且仅当 $PQ^*=1$；

(iii) 若 $a_0=0$, $b_0=1$，则(6-4-49)成立当且仅当 $P=0$.

证明 (i) 记 $\delta\equiv x_1'-x_1$, $a_i'=a_i(x_1')$. 若无特别说明，下面诸式中求和指标均为从 0 到 $+\infty$. 我们有

$$S\equiv \operatorname*{Res}_k (P(x_1', \partial')e^{x_1' k}\cdot Q(x_1, \partial)e^{-x_1 k})$$

$$=\operatorname{Res}\Big(\sum_{i,j} a_i' b_j k^{-(i+j)} e^{\delta k}\Big)=\sum_{i,n}\frac{\delta^n}{n!} a_i(x_1') b_{n+1-i}(x_1)$$

$$=\sum_{n,i,l}\frac{\delta^n}{n!}\frac{\delta^l}{l!} a_i^{(l)} b_{n+1-i}=\sum_m \frac{\delta^m}{m!}\left(\sum_{l,i}\binom{m}{l} a_i^{(l)} b_{m-i-l+1}\right).$$

由 δ 之任意性即知(i)之结论为真.

(ii) 当 $a_0=b_0=1$ 时，我们有

$$QP^*=\Big(\sum_j(-1)^j b_j\partial^{-j}\Big)\Big(\sum_i(-1)^i\partial^{-i}a_i\Big)$$

$$=\sum_{i,j}(-1)^{i+j} b_j\partial^{-(i+j)}a_i=1+\sum_{i,r}(-1)^{r+1} b_{r+1-i}\partial^{-(r+1)}a_i$$

$$\xlongequal{(6\text{-}4\text{-}48)} 1+\sum_{l,i,r}(-1)^{r+1} b_{r+1-i}(-1)^l\binom{l+r}{l} a_i^{(l)}\partial^{-(l+r+1)}$$

$$=1+\sum_m(-1)^{m+1}\left(\sum_{i,l}\binom{m}{l} a_i^{(l)} b_{m-l-i+1}\right)\partial^{-(m+1)}.$$

比较(6-4-50)式即知结论为真.

(iii) 当 $P=0$ 时当有(6-4-49)式，故只须证明当 $a_0=0$ 时可

由(6-4-50)式推知所有 $a_i=0$. 我们归纳假设$a_0=a_1=\cdots=a_r=0$, 则由(6-4-50)式有

$$0=\sum_{l,i}\binom{r}{l}a_i^{(l)}b_{r-i-l+1}$$

$$=a_{r+1}b_0+\sum_{i\leqslant r}a_ib_{r-i+1}+\sum_{l\geqslant 1,i}\binom{r}{l}a_i^{(l)}b_{r-i-l+1}.$$

注意到最后一个和式中应有 $r-i-l+1\geqslant 0$, 即 $i\leqslant r-l+1\leqslant r$, 故由归纳假设上式右端两个和式均为零, 从而 $a_{r+1}=0$, 归纳证毕.

今设

$$P=1+w_1\partial^{-1}+w_2\partial^{-2}+\cdots,\ Q=1-w_1^*\partial^{-1}+w_2^*\partial^{-2}-w_3^*\partial^{-3}+\cdots,$$
$$(w_i=w_i(x),\ w_i^*=w_i^*(x)) \tag{6-4-51a}$$

$$w(x,\ k)=Pe^{\xi(x,k)}=(1+w_1k^{-1}+w_2k^{-2}+\cdots)e^{\xi(x,k)}, \tag{6-4-51b}$$

$$w^*(x,\ k)=Qe^{-\xi(x,k)}=(1+w_1^*k^{-1}+w_2^*k^{-2}+\cdots)e^{-\xi(x,k)}, \tag{6-4-51c}$$

$$L=P\partial P^{-1},\ B_n=(L^n)_+. \tag{6-4-52}$$

命题 6(双线性等式, 见章末[9]、[10]) 在上述记号下,

$$\operatorname*{Res}_k\,(w(x',\ k)w^*(x,\ k))=0 \tag{6-4-53}$$

当且仅当 $PQ^*=1$ 及

$$\frac{\partial w}{\partial x_n}=B_nw. \tag{6-4-54}$$

证明 充分性. 设 $PQ^*=1$ 及 (6-4-54)成立, 则由命题 5 知

$$\operatorname{Res}(w(x_1',\ x_2,\ \cdots,\ k)w^*(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ k))=0. \tag{6-4-55}$$

将式中 $w(x_1')$ 按 $\delta=x_1'-x_1$ 展开可见

$$\operatorname{Res}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}w(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ k)\cdot w^*(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ k)\right)=0.$$

由设(6-4-54)可见 $\partial w/\partial x_n$ 可表为 $(\partial/\partial x_1)^iw$ 的线性组合, 故由上式推知

$$\operatorname{Res}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n} w(x, k)\cdot w^*(x, k)\right)=0.$$

由此即推知(6-4-53)为真.

必要性. 设(6-4-53)式为真,则有(6-4-55)式,故由命题5知 $PQ^*=1$, 此外又有

$$\operatorname{Res}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_n}-B_n\right)w(x, k)\cdot w^*(x', k_1)\right.$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_n}-B_n\right)\operatorname{Res}(w(x, k)\cdot w^*(x', k)=0. \qquad (6\text{-}4\text{-}56)$$

另一方面注意到 $L^n=P\partial^n P^{-1}$, 从而 $P\partial^n=L^n P$, 故有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}-B_n\right)w(x, k)$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x_n}e^\xi+P\frac{\partial e^\xi}{\partial x_n}\right)-B_nPe^\xi$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x_n}+k^nP-B_nP\right)e^\xi$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x_n}+P\partial^n-B_nP\right)e^\xi$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x_n}+L^nP-B_nP\right)e^\xi$$
$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x_n}+(L^n)_-P\right)e^\xi. \qquad (6\text{-}4\text{-}57)$$

这里我们对拟微分算子 P, 记

$$P_-=P-P_+. \qquad (6\text{-}4\text{-}58)$$

显然, $\dfrac{\partial P}{\partial x_n}+(L^n)_-P$ 中所含的 ∂^i 的阶 $i<0$, 故由(6-4-56)及(6-4-57)式,结合命题5(iii)知(6-4-54)式为真.

由命题6及(6-4-46)式可知:

推论 设 w, w^* 如(6-4-51b, c)所示,则 w 为K-P方程族相应线性问题族(6-4-46)的解当且仅当双线性等式(6-4-53)式成立

下面我们运用上一小节所发展的方法来构造满足双线性等式

的解. 为此, 在 $\mathfrak{A}$ 中取出子集

$$G(V, V^*)=\{g\in\mathfrak{A}\,|\,\exists g^{-1}\text{ 使得 } gVg^{-1}=V,\ gV^*g^{-1}=V^*\}\tag{6-4-59}$$

式中条件 $gVg^{-1}=V$, $gV^*g^{-1}=V^*$, 意即存在无穷阶可逆阵(a_{mn}), 使得

$$g\psi_n=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\psi_m g a_{mn},\quad \psi_n^* g=\sum_{m\in\mathbf{Z}} g\psi_m^* a_{nm}.\tag{6-4-60}$$

也就是说, $g\psi_n$ 与 $\psi_n g$, $\psi_n^* g$ 与 $g\psi_n^*$ 可(经由同一阵)互相表出. 这样元 g 的例子如

$$g=1-(\psi_i^*+\psi_j^*)(\psi_i+\psi_j).$$

此时易验证,

$$g^{-1}=-1+(\psi_i+\psi_j)(\psi_i^*+\psi_j^*),$$

$$a_{mn}=\delta_{mn}-(\delta_{im}+\delta_{jm})(\delta_{in}+\delta_{jn}).$$

注意由定义 $G(V, V^*)$关于 $\mathfrak{A}$ 中乘法构成一个群.

定义　对任一 $g\in G(V, V^*)$, $v\equiv g|0\rangle$, 称

$$\tau(x, v)=\langle 0|g(x)|0\rangle\equiv\langle 0|e^{H(x)}g|0\rangle\tag{6-4-61}$$

为 τ 函数.

对于给定的 τ 函数 $\tau(x)=\tau(x, v)$ 定义波函数为

$$w(x, k)=(X(k)\tau(x))/\tau(x),\qquad (6\text{-}4\text{-}62)^+$$

$$w^*(x, k)=(X^*(k)\tau(x))/\tau(x),\qquad (6\text{-}4\text{-}62)^-$$

其中 $X(k)$, $X^*(k)$如(6-4-24a, b)所示.

命题 7(见章末[9][10])　由$(6\text{-}4\text{-}62)^\pm$所确定的$w$与 w^* 满足双线性等式(6-4-53).

证明　由(6-4-61), $(6\text{-}4\text{-}25)^\pm$, 我们有

$$w(x, k)=\frac{X(k)\langle 0|e^H g|0\rangle}{\tau(x)}=\frac{\langle 1|e^H\psi(k)g|0\rangle}{\tau(x)},$$

$$w^*(x, k)=\frac{X^*(k)\langle 0|e^H g|0\rangle}{\tau(x)}=\frac{\frac{1}{k}\langle -1|e^H\psi^*(k)|0\rangle}{\tau(x)}.$$

因此,

$$\mathrm{Res}(w(x, k)w^*(x', k))$$

$$=\frac{1}{\tau(x)\tau(x')}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{k}\langle 1|e^{H}\psi(k)g|0\rangle\langle -1|e^{H'}\psi^*(k)g|0\rangle\right).$$

由此式中代入 $\psi(k)$ 与 $\psi^*(k)$ 的展开式(6-4-17)知

$$\operatorname{Res}(w(x,k)w^*(x',k))$$

$$=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{\langle 1|e^{H(x)}\psi_n g|0\rangle}{\tau(x)}\frac{\langle -1|e^{H(x')}\psi_n^* g|0\rangle}{\tau(x')}$$

$$\overset{(6-4-60)}{=\!=\!=}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{\langle 1|e^{H(x)}g\psi_n|0\rangle}{\tau(x)}\frac{\langle -1|e^{H(x')}g\psi_n^*|0\rangle}{\tau(x')}.$$

注意到 $m\geqslant 0$ 时 $\psi_n^*|0\rangle=0$; $n<0$ 时 $\psi_n|0\rangle=0$, 故上式为零, 即证得双线性等式.

由双线性等式可进而推出 τ 函数本身所满足的方程. 为此推演如下

$$0=\operatorname{Res}(X(k)\tau(x)\cdot X^*(k)\tau(x'))$$

$$=\operatorname{Res}\left(\tau\left(x_1-\frac{1}{k},\ x_2-\frac{1}{2k^2},\ \cdots\right)\cdot\tau\left(x_1'+\frac{1}{k},\ x_2'+\frac{1}{2k^2},\ \cdots\right)e^{\xi(x-x',k)}\right).$$

在上式中作变元代换 $x\to x-y,\ x'\to x+y$, 得

$$0=\operatorname{Res}\left(\tau\left(x_1-y_1-\frac{1}{k},\ x_2-y_2-\frac{1}{2k^2},\ \cdots\right)\cdot\tau\left(x_1+y_1+\frac{1}{k},\ x_2+y_2+\frac{1}{2k^2},\ \cdots\right)e^{-2\xi(y,k)}\right)$$

$$\overset{(6-4-24c)}{=\!=\!=}\operatorname{Res}(e^{\xi(\tilde{\partial}_y,k^{-1})}(\tau(x+y)\tau(x-y))\cdot e^{-2\xi(y,k)}),$$

$$\overset{(6-4-12)}{=\!=\!=}\operatorname{Res}(\sum k^{-j}p_j(\tilde{\partial}_y))(\tau(x+y)\tau(x-y))\cdot(\sum k^l p_l(-2y)))$$

$$=\sum_j p_j(-2y)p_{j+1}(\tilde{\partial}_y)\tau(x+y)\tau(x-y)$$

$$=\sum_j p_j(-2y)p_{j+1}(\tilde{\partial}_z)\left(\exp\sum_{l=1}^{\infty}y_l\frac{\partial}{\partial z_l}\right)\tau(x+z)\tau(x-z)\big|_{z=0}. \tag{6-4-63}$$

今定义双线性算子(Hirota, 见章末[14])

$$P(D_x)f(x)\cdot g(x)$$

$$=P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_1'}\right),\ \left(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_2'}\right),\ \cdots\right)f(x)g(x')\big|_{x=x'}$$

$$=P(\partial_y)(f(x+y)g(x-y))\big|_{y=0}, \qquad (6\text{-}4\text{-}64)$$

则由(6-4-63)有

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_j(-2y)p_{j+1}(\tilde{D}_x)e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}y_lD_l}\tau(x)\cdot\tau(x)=0, \qquad (6\text{-}4\text{-}65)$$

其中 $\tilde{D}_x=\left(D_1,\ \frac{1}{2}D_2,\ \frac{1}{3}D_3,\ \cdots\right)$.

(6-4-65)式即 τ 函数所满足的方程，亦即 K-P 方程族的双线性形式. 在本文撰写过程中，我们将这一方程写成了更明显的形式，为此推导如下：

$$\sum_j p_j(-2y)p_{j+1}(\tilde{D})e^{\Sigma y_lD_l}$$

$$\overset{(6\text{-}4\text{-}13)}{=\!=\!=}\sum_j\left(\sum_{|\alpha|=j}\frac{(-2y)^\alpha}{\alpha!}p_{j+1}(\tilde{D})\right)\sum_\beta\frac{y^\beta}{\beta!}D^\beta$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}\frac{(-2y)^\alpha}{\alpha!}p_{\|\alpha\|+1}(\tilde{D})\frac{y^\beta}{\beta!}D^\beta$$

$$=\sum_\gamma y^\gamma\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha!\beta!}p_{\|\alpha\|+1}(\tilde{D})D^\beta\right).$$

因此，对于每一重指标 $\gamma=(\gamma(1),\ \gamma(2),\ \cdots)$，都对应一个 τ 函数满足的方程

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\frac{(-2)^{|\alpha|}}{\alpha!\beta!}p_{\|\alpha\|+1}(\tilde{D})D^\beta\tau\cdot\tau=0. \qquad (6\text{-}4\text{-}66)$$

顺便指出，当 $|\alpha|$ = 奇数时，

$$D^\alpha\tau\cdot\tau\equiv(D_1^{\alpha(1)}D_2^{\alpha(2)}\cdots)\tau\cdot\tau=0. \qquad (6\text{-}4\text{-}67)$$

实际上记 $\partial'=\partial/\partial x'$, $\tau'=\tau(x')$，于是有

$$D^\alpha\tau\cdot\tau=\prod(\partial_i-\partial_i')^{\alpha(i)}\tau\cdot\tau'\big|_{x=x'}$$

$$=\sum_\beta\binom{\alpha}{\beta}(-1)^{|\beta|}\partial'^\beta\partial^{\alpha-\beta}\tau\cdot\tau'\big|_{x=x'}$$

$$=\sum_\beta\binom{\alpha}{\beta}(-1)^\beta\tau^{(\beta)}\tau^{(\alpha-\beta)}. \qquad (6\text{-}4\text{-}68)$$

这里与 3.5 段相仿记

$$\binom{\alpha}{\beta}=\prod\binom{\alpha(i)}{\beta(i)},$$

$$\partial^{\alpha}=\prod\partial_i^{\alpha(i)},\ (-1)^{\beta}=\prod(-1)^{\beta(i)}=(-1)^{|\beta|}.$$

于是由(6-4-68)式得

$$2D^{\alpha}\tau\cdot\tau=\sum_{\beta}\binom{\alpha}{\beta}((-1)^{\beta}+(-1)^{\alpha-\beta})\tau^{(\alpha-\beta)}\tau^{(\beta)}$$

$$=(1+(-1)^{\alpha})D^{\alpha}\tau\cdot\tau=0.$$

(6-2-67)的例子如

$$D_n\tau\cdot\tau=0,\ (|\alpha|=1),\ D_1^2D_2\tau\cdot\tau=0,\ (|\alpha|=2+1=3).$$

作为(6-4-66)的特例，取 $\gamma=(3,0,0,\cdots)$，注意到

$$3=3+0=2+1=1+2=0+3,$$

即得相应的双线性算子

$$P=p_1(\tilde{D})\frac{D_1^3}{3!}-2p_2(\tilde{D})\frac{D_1^2}{2!}$$

$$+\frac{(-2)^2}{2!}p_3(\tilde{D})D_1+\frac{(-2)^3}{3!}p_4(\tilde{D})$$

$$=-\frac{1}{18}(D_1^4-3D_1^2D_2-4D_1D_3+3D_2^2+6D_4),$$

注意到(6-4-67)式，即得方程 $P\tau\cdot\tau=0$ 为

$$(D_1^4-4D_1D_3+3D_2^2)\tau\cdot\tau=0.$$

令 $u=2(\log\tau)_{x_1x_1}$，此方程即化至 K-P 方程

$$3u_{x_2x_2}+(-4u_{x_3}+6uu_{x_1}+u_{x_1x_1x_1})_{x_1}=0.$$

由双线性等式不难证明，当 $\tau(x)$ 是 K-P 方程族的 τ 函数时，$e^{aX(p,q)}\tau(x)$ $(a=\text{const})$ 也是 τ 函数，此处 $X(p,q)$ 如(6-4-34)式所定义。显然 1 是平凡的 τ 函数，从而

$$\tau(x;a_1,p_1,q_1;\cdots;a_N,p_N,q_N)=\left(\exp\sum_{j=1}^{N}a_jX(p_j,q_j)\right)1$$

给出 K-P 方程族的一个 τ 函数。

不难验证

$$X(p,\ q)e^{\Sigma(\xi(x,p_j)-\xi(x,q_j))}$$

$$=\prod_j \frac{(p-p_j)(q-q_j)}{(p-q_j)(q-p_j)}e^{\xi(x,p)-\xi(x,q)+\Sigma(\xi(x,p_j)-\xi(x,q_j))}.$$

由此推知 $X(p,\ q)^2e^{\Sigma(\xi(x,p_j)-\xi(x,q_j))}=0$，故得

$$\tau(x;\ a_1,\ p_1,\ q_1;\ \cdots;\ a_N,\ p_N,\ p_N)$$

$$=1+\sum_{j=1}^{N}a_je^{\xi_j}+\sum_{1<i<j<N}c_{ij}a_ia_je^{\xi_i+\xi_j}$$

$$+\sum_{1<i<j<k<N}a_ia_ja_k(c_{ij}+c_{jk}+c_{ik})e^{\xi_i+\xi_j+\xi_k}+\cdots,$$

(6-4-69)

其中 $\xi_j\equiv\xi(x,\ p_j)-\xi(x,\ q_j)$，及

$$c_{jk}=\frac{(p_j-p_k)(q_j-q_k)}{(p_j-q_k)(q_j-p_k)}.$$

(6-4-69)称为 K-P 方程族的 N- 孤立子解．容易验证

$$e^{aX(p,q)}\tau(x;\ a_1,\ p_1,\ q_1;\ \cdots;\ a_N,\ p_N,\ q_N)$$

$$=\tau(x;\ a_1,\ p_1,\ q_1;\ \cdots;\ a_N,\ p_N,\ q_N;\ a,\ p,\ q),$$

故顶点算子 $X(p,\ q)$ 相当于加入一个孤立子的无穷小 Bäcklund 变换．

4.3 李代数 $gl(\infty)$ 及其仿射子代数

李代数 $gl(\infty)$ 的定义如下

$$gl(\infty)=\{\sum_{i,j\in Z}a_{ij}:\psi_i\psi_j^*:\}\oplus C1,$$

其中 $\psi_i\psi_j^*$:如(6-4-36)所定义，并设阵(a_{ij})满足

$$a_{ij}=0,\ \forall_{i,j},\ |i-j|>N. \qquad (6\text{-}4\text{-}70)$$

(N 为某正整数，不同的阵 N 可以不同)．

注意到 $\qquad [:\psi_i\psi_j^*:,\ :\psi_k\psi_l^*:]=[\psi_i\psi_j^*,\ \psi_k\psi_l^*],$

即可由本节命题 1 推知

$$[\sum a_{ij}:\psi_i\psi_j^*:,\ \sum b_{kl}:\psi_k\psi_l^*:]=\sum c_{ij}:\psi_i\psi_j^*:+c1,$$

(6-4-71a)

其中

$$c_{ij}=\sum_k(a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj}), \tag{6-4-71b}$$

$$c=\Big(\sum_{i<0,k\geq 0}-\sum_{k<0,i\geq 0}\Big)a_{ik}b_{ki}. \tag{6-4-71c}$$

易见，当(a_{ij})，(b_{ij})满足(6-4-70)时，(c_{ij})亦然，故$gl(\infty)$关于交换子运算(6-4-71a)构成带中心项的李代数.

今在$gl(\infty)$中引入由如下元生成的子代数

$$e_j=\sum_{n\equiv j(\mathrm{mod}2)}\psi_{n-1}\psi_n^*,\quad f_j=\sum_{n\equiv j(\mathrm{mod}2)}\psi_n\psi_{n-1}^*,$$

$$h_j=\sum_{n\equiv j(\mathrm{mod}2)}(:\psi_{n-1}\psi_{n-1}^*:-:\psi_n\psi_n^*:)+\delta_{j0}\quad(j=0,\ 1), \tag{6-4-72}$$

(注意到：$\psi_{n-1}\psi_n^*:=\psi_{n-1}\psi_n^*$，故$e_j\in gl(\infty)$．同样，$f_j\in gl(\infty)$．容易验证，这些生成元之间的交换关系为

$$[e_i,\ f_j]=\delta_{ij}h_j,\ [h_i,\ h_j]=0,$$

$$[h_i,\ e_j]=a_{ij}e_j,\ [h_i,\ f_j]=-a_{ij}f_j,$$

$$(\mathrm{ad}e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\ (\mathrm{ad}f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0\quad(i\neq j).$$

其中(a_{ij})为$A_1^{(1)}$型广义 Cartan 阵(见 2.2 段)：

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}.$$

比较仿射李代数$A_1^{(1)}$的生成元关系式，可见由上述生成元(6-4-72)生成的$gl(\infty)$的子代数正是$A_1^{(1)}$.可以验证，当取$g=e^{X_1}\cdots e^{X_k}$，$X_1,\ \cdots,\ X_k\in A_1^{(1)}$时，相应的$\tau$函数$\tau(x;\ g)=\langle 0|e^{H(x)}g|0\rangle$具有性质

$$\partial\tau(x)/\partial x_{2j}=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots).$$

这时，K-P 方程族(6-4-66)中应略去所有偶阶双线性算子D_2, D_4 $\cdots$．此时，K-P 方程即化为众所周知的 KdV 方程族.如由前面的 K-P 方程$(D_1^4+3D_2^2-4D_1D_3)\tau\cdot\tau=0$引出

$$(D_1^4-4D_1D_3)\tau\cdot\tau=0,$$

令$u=2(\log\tau)_{x_1x_1}$即得 KdV 方程

$$4u_{x_3}=u_{x_1x_1x_1}+6uu_{x_1}.$$

Date 等人证明了一系列文献中业已出现的许多孤立子方程都可经由 K-P 方程族的简约而来，而每一种简约都对应于一类仿射李代数．例如 Boussinesq 方程

$$(D_1^4+3D_2^2)f\cdot f=0 \quad (f=\tau),$$

$$3v_{x_2x_2}+v_{x_1x_1x_1x_1}+6uu_{x_1x_1}+6(u_{x_1})^2=0, \quad u=2(\log f)_{x_1x_1},$$

对应于仿射李代数 $A_2^{(1)}$．又如 CKdV 方程

$$\begin{cases}(D_1^4-4D_1D_3)f\cdot f-6g^2=0, & f=\tau|_{x_2=x_4=\cdots=0},\\ (D_1^3+2D_3)f\cdot g=0, & g=(\partial\tau/\partial x_2)|_{x_2=x_4=\cdots=0},\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4u_{x_3}+12uu_{x_1}+u_{x_1x_1x_1}-6vv_{x_1}=0, & u=(\log)_{x_1x_1},\\ 2v_{x_3}+6uv_{x_1}+v_{x_1x_1x_1}=0, & v=g/f.\end{cases}$$

对应于仿射李代数 $C_2^{(1)}$．又如仿射李代数 $D_3^{(2)}$ 引出所谓 Ito 方程

$$u_{x_1x_3}+2(u_{x_1x_1x_1}+3u_{x_1}v_{x_1})_{x_1}=0, \quad u=(\log f)_{x_1},$$

$$f=\tau|_{x_2=x_4=\cdots=0},$$

等等．Date 等人的方法还可以用于研究主手征场，Heisenberg 铁磁链，及两维 Toda 格子等，在此不再细述．值得注意的是，Date 等人的方法与上一小节中介绍的 Дринфельд 与 Соколов 的方法在仿射李代数 $A_1^{(1)}$ 与 $C_2^{(1)}$ 等都引出同一孤立子方程，这表明这两种方法间存在着内在联系，更深入地研讨这两种由仿射李代数引出可积系的方法将是件很有意义的事．

§5 对称，圈代数与 Virasoro 代数

一个偏微分方程 $H(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots)=0$ 若在无穷小变换 $u\to u+\varepsilon\eta$ 下形式不变，则称 $\eta=\eta(u, u_x, u_y, \cdots)$ 为此方程的对称（更确切地说，η 是方程 $H=0$ 的不变变换群的生成元）．一系列研究表明对称具有李代数结构．下面我们以主手征场模型和非等谱 AKNS 方程为例作一简单说明．

设 G 为一线性李群，$\mathfrak{G}$ 为其李代数(亦即 G 为由矩阵关于矩阵乘法构成的群，$\mathfrak{G}$ 与 G 的关系大致如 $A\in\mathfrak{G}\to e^A\in G$)。

设 $g=g(\xi,\eta)\in G$，

$$A_\xi\equiv g^{-1}g_{,\xi},\quad A_\eta\equiv g^{-1}g_{,\eta} \tag{6-5-1$^+$}$$

($g_{,\eta}=\partial g/\partial\eta$ 等)。所谓主手征场模型是指方程

$$A_{\eta,\xi}+A_{\xi,\eta}=0. \tag{6-5-1$^-$}$$

容易验证此方程为次之线性问题对的可积条件：

$$\psi_{,\xi}=\left(\frac{-\lambda}{1+\lambda}\right)A_\xi\psi,\quad \psi_{,\eta}=\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)A_\eta\psi. \tag{6-5-2}$$

故主手征场方程(6-5-1)$^-$为§1所述 Lax 意义下的可积系，又易验证方程(6-5-1)$^-$为变分问题的 Euler 方程，相应的 Lagrange 密度 $\mathfrak{L}$ 为

$$\mathfrak{L}=-\mathrm{tr}(A_\xi A_\eta). \tag{6-5-3}$$

考察无穷小变换(见本章末[25])

$$g\to g+\delta g,\ \delta g=-g\psi T\psi^{-1}, \tag{6-5-4}$$

其中 $T=\sum\alpha_iT_i$，α_i 为无穷小参数，$\{T_i\}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的一组基．不难证明，$\mathfrak{L}$ 在此无穷小变换下的改变量可以表示成散度形式

$$\delta\mathfrak{L}=(\mathrm{tr}(B_\eta T))_{,\xi}+(\mathrm{tr}(B_\xi T))_{,\eta},$$

$$(B_\xi=\psi^{-1}A_\xi\psi,\ B_\eta=\psi^{-1}A_\eta\psi),$$

故与 $\mathfrak{L}$ 相应的 Euler 方程在无穷小变换(6-5-4)下不变．δg 即方程(6-5-1b)之对称．今记

$$\delta_\alpha g\equiv-g\psi T_\alpha\psi^{-1},\ T_\alpha=\sum\alpha_iT_i,\ \psi=\psi(\lambda,g),$$

$$\delta'_\beta g\equiv-g\psi' T_\beta\psi'^{-1},\ T_\beta=\sum\beta_iT_i,\ \psi'=\psi(\lambda',g).$$

章末[26]中证明了 $\delta_\alpha g$ 与 $\delta'_\beta g$ 的次之交换关系式

$$[\delta_\alpha,\delta'_\beta]g\equiv(\delta_\alpha(g+\delta'_\beta g)-\delta_\alpha g)-(\delta'_\beta(g+\delta_\alpha g)-\delta'_\beta g)$$

$$=-g\,\frac{\lambda[S_\alpha,S_\beta]-\lambda'[S'_\alpha,S'_\beta]}{\lambda-\lambda'}, \tag{6-5-5}$$

其中 $S_\alpha=\psi T_\alpha\psi^{-1}$．将 $\delta_\alpha g=-gS_\alpha$ 等按 λ 与 λ' 展开：

$$\delta_\alpha g=\sum_{n\geq 0}\lambda^n\delta_\alpha^{(n)}g,\quad \delta_\alpha^{(n)}g\equiv\sum\alpha_i\delta_i^{(n)}g,$$

即可由(6-5-5)引出

$$[\delta_i^{(n)},\ \delta_j^{(m)}]g=\sum_k c_{ij}^k\delta_k^{(n+m)}g,\tag{6-5-6}$$

其中 C_{ij}^k 为 $\mathfrak{G}$ 的结构常数，即 $[T_i,\ T_j]=\sum_k c_{ij}^k T_k$. 将此式与圈代数 $\tilde{\mathfrak{G}}$(2.4 段) 中基 $T_k^{(n)}\equiv T_k\otimes\lambda^n$ 的交换子关系比较即见 $\delta_i^{(n)}$ 具有圈代数结构. 其后的研究又表明，在考察了场论模型中的反常项后，这些"隐藏对称"对应的无穷维李代数将出现中心项，其详情可见章末[27].

主手征场隐对称的上述圈代数结构是 Dolan 首先发现的，之后引出了一系列的工作(见章末[28]). 许多两维场论模型，如自对偶杨—Mills 场，对称空间中的轴对称定态 Einstein 方程等，都存在类似的圈代数结构. 葛墨林(见章末[38])在这些工作的基础上用无穷小 Riemann-Hilbert 变换方法证明了任意可积系都存在上述圈代数结构.

在 2.2 段中，我们由 $\mathfrak{G}=A_l$ 出发经两步扩张引出 $A_n^{(1)}$ 时曾说明，更一般的 $A_n^{(1)}$ 还应在第二步扩张之后加入导子 $d=\lambda\dfrac{d}{d\lambda}$.

一般令
$$d_n=\lambda^{n+1}\frac{d}{d\lambda},$$

则
$$[d_n,\ d_m]=\left(\lambda^{n+1}\frac{d(\lambda^{m+1})}{d\lambda}-\lambda^{m+1}\frac{d(\lambda^{n+1})}{d\lambda}\right)\frac{d}{d\lambda}$$
$$=(m-n)\lambda^{m+n+1}\frac{d}{d\lambda}=(m-n)d_{m+n}.$$

一般，若李代数 $\mathfrak{G}$ 的一组基$\{a_n\}$之交换子关系为

$$[a_n,\ a_m]=(m-n)a_{n+m},$$

我们称 $\mathfrak{G}$ 为(不带中心元的) Virasoro 代数. $\mathfrak{G}$ 一般可进而加入中心元 c 而扩张成 $\mathfrak{G}$，此时其元的交换关系为

$$[c,\ a_n]=0,\ [a_n,\ a_m]=(m-n)a_{n+m}+\alpha_{nm}c.$$

由 Jacobi 等式 $[[a_i, a_j], a_k]+\mathrm{cycle}=0$，易见常数 α_{nm} 应满足等式

$$(j-i)\alpha_{i+j,k}+(k-j)\alpha_{j+k,i}+(i-k)\alpha_{k+i,j}=0. \qquad (6\text{-}5\text{-}7)$$

容易验证

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{12}(j^3-j)\delta_{i+j,0}$$

为(6-5-7)的解. 此时,

$$[a_n, a_m]=(m-n)a_{n+m}+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{n+m,0}c. \qquad (6\text{-}5\text{-}8)$$

于是，我们称基元满足交换关系(6-5-8)的李代数 $\mathfrak{G}$ 为 Virasoro 代数. 这类代数与 Kac-Moody 代数关系密切，近年来这两类代数在场论模型的研究中已获得越来越多的应用(见章末[27]).

下面简要说明非等谱 AKNS 族之对称具有上述(不带中心元的) Virasoro 型代数结构.

考察线性问题

$$\psi_x=U\psi,\ \psi_t=V^{(n)}\psi. \qquad (6\text{-}5\text{-}9)$$

其中

$$U=V_0\lambda+V_1,\ V^{(n)}=(\lambda^n W)_+,$$

$$V_0=(\delta_{ij}\alpha_i)_{N\times N},\ \alpha_i\neq\alpha_j\ (i\neq j),$$

$$V_1=((1-\delta_{ij})u_{ij})_{N\times N},\ u_{ij}=u_{ij}(x,\ t),$$

$$W=\sum_{i=0}^{\infty}W_i\lambda^{-i},\ W_x=[U,\ W],$$

$$(\lambda^n W)_+=\sum_{i=0}^{n}W_i\lambda^{n-i}.$$

(6-5-9)的可积条件引出 A_{N-1} 中的 AKNS 族(参见(6-3-16))

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,\ V^{(n)}]=0. \qquad (6\text{-}5\text{-}10)$$

在§3中，我们是在等谱(即谱 λ 不随时间变化: $\lambda_t=0$)条件下引出 AKNS 系的，此时 $U_t=V_{1t}$. 在非等谱条件 $\lambda_t=\lambda^n$ 下，由(6-5-10)引出的方程族称为非等谱 AKNS 族. 今令

$$\lambda_t=a\lambda^n, \qquad (6\text{-}5\text{-}11)$$

其中 $a=0$ 或 1，由此引出的方程族包括了等谱($a=0$)与非等谱($a=1$)两种情形. 此时,(6-5-10)化至

$$V_{1t}+a\lambda^n V_0-V_x^{(n)}+[U, V^{(n)}]=0.$$

为表明方程族与 a 之相关性，我们改用 W^a 及 $W^{a(n)}$ 来代替 W 与 $V^{(n)}$. 此时方程族为

$$V_{1t}+a\lambda^n V_0-[W_x^{a(n)}+[U, W^{a(n)}]=0, \qquad (6\text{-}5\text{-}12)$$

其中 $W^{a(n)}=(\lambda^n W^a)_+$，而 W^a 满足方程

$$aV_0-W_x^a+[U, W^a]=0. \qquad (6\text{-}5\text{-}13)$$

不难证明(见章末[29])，此种非等谱 AKNS 方程族形如

$$dV_1/dt_n^a=[V_0, W_{n+1}^a], \qquad (6\text{-}5\text{-}14)$$

其中 $t=t_n^a$ 表示时间变元，冠以上下标 a 与 n，是为了表示此方程与 W_{n+1}^a 相关(可与方程(6-3-17)相比较).

注意，若我们依然认定 $\lambda_t=0$，则(6-5-13)可写作

$$\widetilde{W}_x^a=[U, \widetilde{W}^a],$$

其中 $\widetilde{W}^a=W^a-a\dfrac{d}{d\lambda}$. 故非等谱 AKNS 族可以看作为在带导子 $d=\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ 的李代数 $\hat{A}_{N-1}=A_{N-1}\otimes C[\lambda, \lambda^{-1}]\oplus Cd$ 中考察线性问题

$$\psi_x=U\psi, \ \psi_t=\widetilde{W}^{(n)a}\psi$$

的可积条件引出的，其中 $\widetilde{W}^{(n)a}=(\lambda^n\widetilde{W}^a)_+$.

对于非等谱 AKNS 族(6-5-14)，我们证明了(见章末[29])：

命题 设 a, b 为取值 0 或 1 的指标，则有

(i) $$\frac{dW_0^a}{dt_m^b}=0, \quad \frac{dw_k^a}{dt_n^b}=F_{b,n}^{a,k} \quad (k>0),$$

其中 $$F_{b,n}^{a,k}=a(k-1)W_{n+k-1}^b+\sum_{s=0}^{k-1}[W_s^a, W_{n+k-s}^b];$$

(ii) $$\sum_{s=0}^{k}[W_s^a, W_{k-s}^b]=(b-a)(k-1)V_{k-1} \quad (k\geqslant 1),$$

其中 $$V_k=W_k^0.$$

利用此命题我们证明了下面交换关系式

$$[F_{a,m}^{c,l}, F_{b,n}^{c,l}]=(mb-na)F_{ab,m+n-1}^{c,l}, \qquad (6\text{-}5\text{-}15)$$

其中 a, b, $c=0$ 或 1. 可以证明，$F_{a,m}^{c,l}$ 是非等谱 AKNS 族的对称，

(6-5-15)即给出了这种对称的无穷维李代数结构. (6-5-15)当 $a=b=c=0$, $N=2$ 时给出了 $N=2$ 的等谱 AKNS 族的李代数结构,是[30]中首先运用遗传对称的方法得出的.

值得一提的是, (6-5-15)提示我们一种与 Virasoro 代数相仿的李代数的结构. 即设李代数 $\mathfrak{G}$ 的基为

$$\{X_n^{(a)} \mid a=0,\ 1;\ n\in \mathbf{Z}\},$$

其交换关系为　$[X_m^a,\ X_n^b]=(an-bm)X_{m+n-1}^{ab}$.

容易验证 Jacobi 等式

$$[[X_m^a,\ X_{-n}^b],\ X_1^c]+\text{cycle}=0$$

满足, 故 $\mathfrak{G}$ 确为一类无穷维李代数. 当 $a=b=1$, $\overline{X}_m\equiv X_{m+1}$ 时, $\{\overline{X}_m\}$即为(不带中心元的) Virasoro 代数的一组基.

近年来,有关仿射李代数与可积系的关系之研究日趋活跃,本文介绍了其中较有代表性的工作, 有关的其它工作还有 (见章末[32]～[37]),限于篇幅不再引述了. 深入研究可积系的李代数结构,是一个有十分诱人前景的方向,必将有助于可积系的一些基本问题的解决, 即寻求一个非线性问题可写成线性问题可积条件的判别法则与寻求线性问题的可行的算法①.

① 本章内容曾在 1986 年 11 月复旦大学孤立子讨论会及 1987 年 1 月南开大学可积动力系统讨论会上报告过,作者谨在此向谷超豪、胡和生、何国柱先生表示衷心的感谢,感谢他们给予的热诚指导和支持。

参考文献

[1] V. I. Arnold, Mathematical method of classical mechanics, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[2] H. D. Wahlquist and F. B. Estabrook, J. Math. Phys., 16(1975), 1~7.

[3] Gu Chaohao and Hu Hesheng, Scientia Sinica, 29(1986), 704~719.

[4] A. C. Newell, Solitons in mathematics and physics, SIAM, Philadelphia Pennsylvania, 1985.

[5] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Birkhauser, Boston, 1983.

[6] 梁赣平,广义 Cartan 矩阵的分类,1986.

[7] J. Lepowsky and R. L. Wilson, Commun. Math. Phys., 62(1978), 43~53.

[8] R. Hirota and J. Satsuma, Phys. Lett., 85A(1981), 407~408.

[9] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa, in'Proc. RIMS Symp. on Nonlinear Integrable Systems, 1981', eds. M. Jimbo and T. Miwa, World Sci. Pub., Singapore, 1983, 39~119.

[10] M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 19(1983), 943~1001

[11] N. N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, Theory of quantized fields, 3rd Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1980.

[12] D. E. Littlewood, The theory of group characters, Oxford, 1950.

[13] I. M.Gel'fand and L. A. Dikii, Functional Anal., Appl.,10(1976), 13~29.

[14] R. Hirota, in 'Solitons', ed. R. K. Bullough and P. J. Caudrey, Springer, 1980.

[15] J. Lepowsky et al(eds), Vertex operators in mathematics and physics, Springer, 1984.

[16] I. B. Frenkel and V. G. Kac, Invent. Math., 62(1980), 23~65.

[17] M. J. Ablowitz et al, Stud. Appl. Math., 53(1974), 249~315.

[18] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, New York, 1962.

[19] G. Wilson, Ergod. Th. Dynam. Sys., 1(1981), 361~380.

[20] Tu Guizhang, Sci. Exploration, 5(1985), 103~106.

[21] J. Alberty et al Physica 5D(1982), 43~65.

[22] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, Lie algebras and equations of KdV type, preprint, 1983, 148pp.

[23] V. G. Kac, Izv. Akad. Nauk SSSR, 32(1968)No. 6, 1323~1367.

[24] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 258(1981) No. 1, 11~16.

[25] Hou Boyu et al, Phys. Rev., 24D(1981), 2238.

[26] Ge Molin and Wu Yongshi, Phys. Lett., 108B(1982), 411~415.

[27] P. Goddard and D. Olive, J. Mod. Phys.,1(1986), 303~414.

[28] L. Dolan, Phys. Report, 109(1984), No. 1.

[29] Tu Guizhang, A Lie algebraic structure of N×N Nonisospectral AKNS hierachy, Acta Math. Appl. Sinica(Englsh Series) 4 (1988) No. 1,81~92.

[30] Li Yishen and Zhu Gocheng, J. Phys., 19A(1986), to appear.

[31] M. Adler and P. van Moerbeke, Advances in Math., 38(1980), 267~317.

[32] A. N. Leznov et al, Theor. Math. Phys., 48(1981), 3~12.

[33] A. V. Mikhailov et al, Commun. Math. Phys., 79(1981), 473~488.

[34] A. G. Reiman et al, Invent. Math., 54(1979), 81~100.

[35] A. G. Reiman, in'Differential geometry, Lie groups and mechanics', 3(1980), 3~54.

[36] G. Wilson, Phys. Lett., 89A(1982), 332~334.

[37] H. Flaschka et al, Physica D, 9(1983), 300~331;

[38] Ge Molin, Scientia Sinica, No. 3(1986), 301.

第七章

孤立子理论与微分几何学

胡和生

经典微分几何学中出现过许多很有意义的偏微分方程，著名的sine-Gordon方程就是首先在微分几何中出现的.

19世纪出现了非欧几何学. 接着又知道，欧氏空间的负常曲率曲面能够局部地实现非欧几何(即非欧平面的几何). 因而，对负常曲率曲面的研究很受重视，在研究中出现了 sine-Gordon 方程及其 Bäcklund 变换(见章末[2]). 一个负常曲率曲面对应于sine-Gordon方程的一个非零解，而 Bäcklund 变换恰对应于伪球线汇(定义见后文)中两个焦曲面(具有相同的负常曲率)之间的变换，同时 Bäcklund 变换也是 sine-Gordon 方程的解之间的变换，这些都是很有兴趣的结果(见章末[2]、[5]).

虽然，sine-Gordon 方程及其 Bäcklund 变换是在微分几何学的研究中发现的，人们在那时只是把这些研究成果看作为微分几何中的定理，日子一久，对此也逐渐不太予以重视了. 直到sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换在孤立子理论中起了重要作用，人们才逐步认识到微分几何学在孤立子理论中的意义与作用.

其后，许多作者注意运用微分几何中所出现的方法于孤立子理论，例如，Darboux 变换，Cartan 的延拓系统理论，jet 丛等，在制作多种类型的孤子方程的 Bäcklund 变换中，产生很大的作用. 人

们又发现，孤立子方程可以作为线性可积系统的可积条件，而可积条件本身则是纤维丛上联络的零曲率条件(见章末[1]、[24]). 此外，人们也认识到孤立子方程与调和映照及曲面论的基本定理均有密切联系，这就提供了从孤立子方程的解，构造出相应的调和映照及曲面的方法(见[6]～[9]，[11]，[12]). 更进一步，我们在章末[9]文中还指出，容有 $SO(3)$ 与 $SO(2,1)$ 线性可积系统的偏微分方程，实际上是 R^3 及 $R^{2,1}$ 中各种球面在各种不同标架下的 Gauss 方程. 从此出发，我们给出了一个一般方法，来判别一个已给的非线性偏微分方程 $\mathfrak{F}=0$ 是否容有 $SO(3)$ 或 $SO(2,1)$ 的线性可积系统，使得 $\mathfrak{F}=0$ 就是这个线性系统的可积条件.

在高维孤立子理论中，将会用到更多的微分几何，这将促进孤立子理论的研究与微分几何学的研究的发展，这是值得进一步探讨的课题，在章末 [22]、[23] 已得出古典的 Bäcklund 线汇在高维空间情形的一种推广. 限于篇幅，在下面只选择了部分材料，有关 Bäcklund 变换的 Darboux 阵方法，本书中已有专门一章讨论. 在本章中我们首先介绍曲面论的基本事项作为预备知识；接着是负常曲率曲面与 sine-Gordon 方程 (见章末 [5])；特殊孤立子方程与调和映照(见章末[6]～[8]、[11]～[14])；容有线性可积系统的非线性偏微分方程的决定与构造(见章末[9])；最后介绍孤立子曲面的一些结果，见章末[19]～[21].

§1　曲面论的基本事项

在 3 维欧氏空间 R^3 中，我们用 $\vec{r}$ 来表示点 $P(x, y, z)$ 的位置向量，$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 曲面的参数表示是 $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$，$\vec{e}_\alpha=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^\alpha}$ $(\alpha=1, 2)$构成切平面的一组基，$\vec{n}=\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}$ 是曲面的法向量，$\{\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$构成以 P 点为原点的标架. 因为 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 是由曲

面的参数表示自然地产生的，所以这种标架称为联系于参数表示(u^1, u^2)的自然标架，简称自然标架．对$\vec{r}$, $\vec{e}_a$, $\vec{n}$进行微分，然后再把它们写成$\vec{e}_a$, $\vec{n}$的线性组合，就得到曲面的基本方程

$$\begin{aligned} &d\vec{r} = du^a \vec{e}_a, \\ &d\vec{e}_a = \omega_a^b \vec{e}_b + \omega_a^3 \vec{n} \quad (a,\ b = 1,\ 2,\text{这里和式符号省略}), \\ &d\vec{n} = \omega_3^b \vec{e}_b, \end{aligned} \tag{7-1-1}$$

式中ω_a^b, ω_a^3, ω_3^b都是u^1, u^2的一次微分形式．

曲面的第一基本形式是

$$\mathrm{I} = ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{ab} du^a du^b, \tag{7-1-2}$$

式中

$$g_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = g_{ba}. \tag{7-1-3}$$

由于

$$\vec{n} \cdot d\vec{e}_a + \vec{e}_a \cdot d\vec{n} = 0,$$

所以ω_3^b和ω_a^3之间有下述关系

$$\omega_a^3 = -g_{ab}\omega_3^b. \tag{7-1-4}$$

记

$$\omega_a^3 = b_{ab} du^b, \tag{7-1-5}$$

由$d^2\vec{r} = 0$还可以得出$\omega_a^3 \wedge du^a = 0$，所以$b_{ab} = b_{ba}$，我们称

$$\mathrm{II} = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = -g_{ab}\omega_3^b du^a = b_{ab} du^a du^b \tag{7-1-6}$$

为曲面的第二基本形式，其系数

$$b_{ab} = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^b} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^a \partial u^b} \cdot \vec{n}.$$

ω_a^b可写成

$$\omega_a^b = \Gamma_{ac}^b du^c, \tag{7-1-7}$$

Γ_{ac}^b是曲面的 Christoffel 记号，又称为 Christoffel 联络系数．事实上，容易看出Γ_{ac}^b满足

$$\begin{cases} \Gamma_{ac}^b = \Gamma_{ca}^b, \\ dg_{ab} - g_{ac}\omega_b^c - g_{cb}\omega_a^c = 0. \end{cases} \tag{7-1-8}$$

由这里可知：Γ_{ac}^b由g_{ab}及其导数所决定，其具体表达式为

$$\Gamma^c_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{ad}}{\partial u^b}+\frac{\partial g_{bd}}{\partial u^a}-\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^d}\right). \qquad (7\text{-}1\text{-}9)$$

把基本方程(7-1-1)进行外微分，就得到(7-1-1)的可积条件.利用 $d^2\vec{r}=0$，从(7-1-1)的第二式及第三式的外微分，得到

$$d\,\omega_a^b+\omega_c^b\wedge\omega_a^c=\omega_a^3\wedge\omega_3^b, \qquad (7\text{-}1\text{-}10)$$

$$d\omega_a^3+\omega_b^3\wedge\omega_a^b=0. \qquad (7\text{-}1\text{-}11)$$

(7-1-10)与(7-1-11)分别称为曲面的 Gauss 方程和 Codazzi 方程，(7-1-10)的左方常记为

$$d\,\omega_a^b+\omega_c^b\wedge\omega_a^c=\frac{1}{2}R^b_{acd}du^c\wedge du^d, \qquad (7\text{-}1\text{-}12)$$

式中

$$R^b_{acd}=\frac{\partial\Gamma^b_{ad}}{\partial u^c}-\frac{\partial\Gamma^b_{ac}}{\partial u^d}+\Gamma^b_{ec}\Gamma^e_{ad}-\Gamma^b_{ed}\Gamma^e_{ac} \qquad (7\text{-}1\text{-}13)$$

称为黎曼曲率张量，它是由第一基本形式系数 g_{ab} 及其到二阶为止的导数所确定的几何量.

由(7-1-10)利用(7-1-4)及(7-1-5)，得出

$$\frac{1}{2}R^b_{acd}\,du^c\wedge du^d=-b_{ac}\,du^c\wedge g^{be}b_{ed}\,du^d, \qquad (7\text{-}1\text{-}14)$$

因而

$$R^b_{acd}=-g^{be}(b_{ac}b_{ed}-b_{ad}b_{ec}). \qquad (7\text{-}1\text{-}15)$$

如记

$$R_{bacd}=g_{be}R^e_{acd}, \qquad (7\text{-}1\text{-}16)$$

因而

$$R_{bacd}=b_{bc}b_{ad}-b_{ac}b_{bd}, \qquad (7\text{-}1\text{-}17)$$

式中 $a,\ b,\ c,\ d$ 取值 1, 2. (7-1-17) 实质上只有下述一个式子. 即

$$R_{1212}=b_{11}b_{22}-b_{12}^2. \qquad (7\text{-}1\text{-}18)$$

这是 Gauss 方程的另一种写法，它还可以写成

$$\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=K. \qquad (7\text{-}1\text{-}19)$$

K 称为曲面的总曲率或 Gauss 曲率. 在 Gauss 以前, K 是由第一基本形式和第二基本形式的系数所确定的(见(7-1-19)的第二等号), 而 Gauss 方程则表示, K 实际上可由第一基本形式完全确定(见(7-1-19)的第一等号), 这便是有名的 Gauss 定理.

外微分(7-1-1)的第三式, 所得出的只是 Godazzi 方程的另一种形式, 并不是新的方程.

因而, 对于给定的一个曲面 S, 它的第一、第二基本形式必定满足 Gauss-Codazzi 方程. 反之, 如果已给两个二次微分形式 $\mathrm{I}=g_{ab}du^a du^b$ $(a, b=1, 2, g_{ab}$ 为正定), $\mathrm{II}=b_{ab}du^a du^b$, 并且 Gauss-Codazzi 方程成立, 那末必定存在一曲面, 它以 I 和 II 为第一基本形式和第二基本形式. 这种曲面在局部意义下除一等长变换外是唯一确定的. 这就是曲面的基本定理. 事实上, 这曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ 是从解线性方程组(7-1-1)而确定的, 但由于(7-1-1)的可积条件就是 Gauss-Codazzi 方程, 所以(7-1-1)为完全可积, 因而成立上述基本定理.

注意: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 有时可以用它们的线性组合来代替. 如果取 $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ 为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的线性组合, 且 $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ 是相互正交的单位向量, 那末 $\{p, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{n}\}$ 构成曲面的正交标架(通常 $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ 也记作 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, 当然, 事先要说明它们的正交性). 这时, 曲面的基本方程可写为

$$d\vec{r}=\omega^a\vec{f}_a,$$

$$d\vec{f}_a=\omega_a^b\vec{f}_b+\omega_a^3\vec{n},$$

$$d\vec{n}=\omega_3^a\vec{f}_a.$$

ω^a 和 ω_a^b 之间还应有下述关系式

$$d\omega^a+\omega_b^a\wedge\omega^b=0 \quad (a, b=1, 2), \tag{7-1-20}$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0 \quad (i, j=1, 2, 3). \tag{7-1-21}$$

ω_b^a 由(7-1-20)及 $\omega_b^a+\omega_a^b=0$ 唯一确定. 在正交标架下, Gauss-Codazzi 方程化简为下列形式

$$d\omega_2^1=\omega_2^3\wedge\omega_3^1,$$

$$d\omega_a^3+\omega_b^3\wedge\omega_a^b=0. \qquad (7\text{-}1\text{-}21)$$

特别，Gauss 方程还可写为

$$d\omega_2^1=R_{1212}\omega^1\wedge\omega^2=K\omega^1\wedge\omega^2.$$

此外，还成立 $\omega_a^3\wedge\omega^a=0$.

如果将欧氏空间 R^3 换成 Minkowski 空间 $R^{2,1}$（也称拟欧空间 $R^{2,1}$），仍然可以建立其中曲面的基本方程和相应地 Gauss-Codazzi 方程. 这时 Gauss 方程为

$$d\omega_2^1=R_{1212}\omega^1\wedge\omega^2=-K\omega^1\wedge\omega^2.$$

§2　负常曲率曲面和 sine-Gordon 方程

在这节中，我们要给出 sine-Gordon 方程与负常曲率曲面的关系（见章末[2]、[5]）.

设 S 为欧氏空间 R^3 中的负常曲率曲面，即 $K=$ 负常数的曲面，不妨取 $K=-1$. 取曲率线为坐标曲线并作相应的正交标架，即以曲率线的单位切向量为 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. 这时

$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv=Adu\vec{e}_1+Bdv\vec{e}_2, \qquad (7\text{-}2\text{-}1)$$

$$\omega^1=Adu,\ \omega^2=Bdv. \qquad (7\text{-}2\text{-}2)$$

曲面的第一基本形式为

$$ds^2=A^2du^2+B^2dv^2, \qquad (7\text{-}2\text{-}3)$$

第二基本形式为

$$\mathrm{II}=k_1A^2du^2+k_2B^2dv^2=k_1(\omega^1)^2+k_2(\omega^2)^2, \qquad (7\text{-}2\text{-}4)$$

式中 k_1, k_2 是主曲率，Gauss 曲率 k 是它们的乘积.

另一方面，从(7-1-6)可知第二基本形式

$$\mathrm{II}=\omega_1^3\omega^1+\omega_2^3\omega^2, \qquad (7\text{-}2\text{-}5)$$

与(7-2-4)比较，得到

$$\omega_1^3=k_1\omega^1=k_1Adu,\ \omega_2^3=k_2\omega^2=k_2Bdv. \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$

再由(7-1-20)

$$d\omega^a+\omega_b^a\wedge\omega^b=0,$$

定出

$$\omega_1^2=-\omega_2^1=-\frac{A_v}{B}du+\frac{B_u}{A}dv. \qquad (7\text{-}2\text{-}7)$$

从 Codazzi 方程

$$d\omega_1^3+\omega_2^3\wedge\omega_1^2=0,$$

得到

$$(k_1A)_v=k_2A_v,$$

即

$$(k_1-k_2)A_v+k_{1v}A=0. \qquad (7\text{-}2\text{-}8)$$

因 $K=k_1k_2=-1$，置 $k_1=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $k_2=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ 就有

$$k_1-k_2=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}},$$

代入(7-2-8)得到

$$(\log A)_v-\left(\log\cos\frac{\alpha}{2}\right)_v=0,$$

所以

$$A=\cos\frac{\alpha}{2}U(u),\ B=\sin\frac{\alpha}{2}V(v).$$

令 $du_1=U(u)du$, $dv_1=V(v)dv$，而得到新的参数u_1, v_1，仍改记它们为 u, v. 这样，就有

$$A=\cos\frac{\alpha}{2},\ B=\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\begin{cases}\omega^1=\cos\frac{\alpha}{2}du, & \omega^2=\sin\frac{\alpha}{2}dv,\\ \omega_1^3=\sin\frac{\alpha}{2}du, & \omega_2^3=-\cos\frac{\alpha}{2}dv,\\ \omega_1^2=\frac{1}{2}(\alpha_v du+\alpha_u dv)=-\omega_2^1, \end{cases} \qquad (7\text{-}2\text{-}9)$$

代入 Gauss 方程 (7-1-10)

$$d\omega_2^1=\omega_2^3\wedge\omega_3^1=k_1k_2\omega^1\wedge\omega^2=-\omega^1\wedge\omega^2,$$

得到

$$\alpha_{uu}-\alpha_{vv}=\sin\alpha. \tag{7-2-10}$$

这就是 sine-Gordon 方程，这时所引进的坐标称为 Tschebyscheff 坐标，相应的标架称为 Tschebyscheff 标架，容易验证 Codazzi 方程是成立的. 因而，由曲面基本定理得知:

定理 1　对于 sine-Gordon 方程 (7-2-10) 的任一解 α，均可通过求解曲面的基本方程，作出一个负常曲率曲面.

我们注意到在 Tschebyscheff 坐标下，曲面的第一基本形式为

$$ds^2=\cos^2\frac{\alpha}{2}du^2+\sin^2\frac{\alpha}{2}dv^2, \tag{7-2-11}$$

第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(du^2-dv^2). \tag{7-2-12}$$

由此可见，渐近曲线是实的，且 $du:dv=1:\pm1$ 是曲面渐近曲线方向，这两个方向的夹角的余弦是

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha, \tag{7-2-13}$$

所以，sine-Gordon 方程的解 α 就是各点的两个渐近方向的夹角. 综上所述，我们也可说负常曲率上的 Tschebyscheff 坐标以曲率线为坐标曲线，其特征为第一、二基本形式具有 (7-2-11), (7-2-12) 形式，其中 α 是曲面上两渐近方向的夹角.

上面已具体证明，从 sine-Gordon 方程的任一解可以得出 R^3 中一个相应的负常曲率曲面. 作者在章末[11], [12]中统一考虑了下述一些和孤立子密切相关的方程:

$$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\pm\sin\alpha \quad \text{(sine-Gordon)}, \tag{7-2-14}$$

(7-2-15)

$$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\pm\sinh\alpha \quad (\text{sinh Gordon}), \tag{7-2-16, 7-2-17}$$

$$\alpha_{tt}+\alpha_{xx}=\pm\sin\alpha \quad (\text{sine-Laplace}), \tag{7-2-18, 7-2-19}$$

$$\alpha_{tt}+\alpha_{xx}=\pm\sinh\alpha \quad (\text{sinh}-\text{Laplace}). \tag{7-2-20, 7-2-21}$$

研究了它们和三维欧氏空间 R^3 或明可夫斯基空间 $R^{2,1}$ 中总曲率为 ± 1 的各种常曲率曲面之间的联系. 虽然 R^3 中的曲面的诱导度量(即第一基本形式)总是正定的,但是, 对于 $R^{2,1}$ 中的曲面来说, 有时它的诱导度量为非正定的. $R^{2,1}$ 中的曲面,如果它的诱导度量是正定的, 则称此曲面为类空的; 如果是非正定的, 则称此曲面为类时的.

要建立上述一些方程与常曲率曲面的对应, 关键在于建立便于讨论问题的好的坐标系. 我们在前面看到, sine-Gordon 方程与 R^3 中负常曲率曲面的对应是借助于 Tschebyscheff 坐标系, 而这种坐标系的建立, 是利用了这时曲面上有实的渐近曲线这一性质. 对于具有实的渐近曲线的常曲率曲面, 其 Tschebyscheff 坐标的存在性可参考陈省身的文章(见章末[3]), 他给出了 sinh-Gordan 方程(7-2-16)与 $R^{2,1}$ 中类时的正常曲率曲面的对应关系.

容易看出: $R^{2,1}$ 中类空和类时的负常曲率曲面的渐近曲线都是虚的. 作者在章末[12]文中对具有虚的渐近曲线的曲面建立了相应的坐标, 也称之为 Tschebyscheff 坐标, 即将 Tschebyscheff 坐标扩充到曲面的渐近曲线是虚的情况. 例如, 对 $R^{2,1}$ 中类空的曲面的Tschebyscheff 坐标可作如下定义.

定义 类空曲面 S 上的坐标系(t, x)被称为 Tschebyscheff 坐标,如果 S 上的第一基本形式为

$$ds^2=\cosh^2\frac{\alpha}{2}\,dt^2+\sinh^2\frac{\alpha}{2}\,dx^2, \tag{7-2-22}$$

且其第二基本形式为

$$II=\cosh\frac{\alpha}{2}\,\sinh\frac{\alpha}{2}(dt^2+dx^2). \tag{7-2-23}$$

在章末[12]文中，我们得到如下的定理：

定理 2　设 $\alpha(t, x)(\alpha\neq 0)$是 sinh-Laplace 方程(7-2-16)的一解，则存在 $R^{2,1}$ 中的一个曲率等于 -1 的类空曲面，它以(t, x)为 Tschebyscheff 坐标，即(7-2-22)、(7-2-23)成立.

上述定理的证明过程中，提供了从 sinh-Laplace 方程(7-2-20)的一解 $\alpha(t, x)$构造出 $R^{2,1}$ 中一个常曲率等于 -1 的类空曲面的具体方法(见章末[12]文)，而且曲面的构造步骤是线性的，即归结为求解一个完全可积的线性方程组．作为上述定理的一个应用，我们从 sinh-Laplace 方程(7-2-20)的下述一系解

$$\alpha=2\sinh^{-1}\left(-\frac{1}{\sinh(\lambda t+\mu x)}\right) \tag{7-2-24}$$

$$(\lambda,\ \mu\ 常数，且\ \lambda^2+\mu^2=1,\ \lambda>0,\ \lambda t+\mu x<0)$$

可以构造出一系曲面

$$S_\lambda:\ \begin{cases} x_1=t-\dfrac{1}{\lambda}\operatorname{cth}(\lambda t+\mu x), \\ x_2=-\dfrac{1}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda t+\mu x)}\operatorname{sh}x, \\ x_3=-\dfrac{1}{\lambda\operatorname{sh}(\lambda t+\mu x)}\operatorname{ch}x. \end{cases} \tag{7-2-25}$$

特别置 $\lambda=1,\ \mu=0$，则得出下述曲面(见章末[12])

$$\begin{aligned} x_1&=t-\operatorname{cth}t, \\ x_2&=-\frac{1}{\operatorname{sh}t}\operatorname{sh}x, \\ x_3&=-\frac{1}{\operatorname{sh}t}\operatorname{ch}x. \end{aligned} \tag{7-2-26}$$

单参数曲面族 S_λ 是一族完备图，但在 $\lambda\neq 1$ 时，可以证明它有不能无限延伸(依曲线长度)的测地线．因而得到：

定理 3 在 $R^{2,1}$ 中有完备图(例如(7-2-25)所定义的曲面 S_λ $(\lambda\neq 1)$)，它们是曲率为 -1 的类空曲面，但关于曲面的度量来说，是不完备曲面．

如所知，欧氏空间 R^3 中的完备图必为完备曲面，而上面的定理说明了 $R^{2,1}$ 中完备图可以是不完备曲面，这是 R^3 与 $R^{2,1}$ 中图的一个实质性区别．

从方程(7-2-14)～(7-2-21)的解，可类似的做出各自相应的常曲率曲面．例如，从 sinh-Gordon 方程(7-2-16)的解，就可以构造出许多具有非正定度量的曲率为 -1 的曲面．

为构造出这些曲面，我们注意到重要的一步是选取适当的坐标．对于 R^3 及 $R^{2,1}$ 中渐近方向为虚的常曲率曲面，建立相应的坐标，也称为 Tschebyscheff 坐标．现把结果综合如下：

定理 4 R^3 或 $R^{2,1}$ 中具有虚的渐近曲线的常曲率曲面(无脐点)必可被 Tschebyscheff 坐标覆盖．这时，第一、二基本形式及相应的方程如下表所示

曲面	符号	曲率	Tch.坐标下的 dS^2
$S\subset R^{2,1}$	$++$	-1	$\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2}dt^2+\mathrm{sh}^2\frac{\alpha}{2}dx^2$
$S\subset R^3$	$++$	$+1$	$\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2}dt^2+\mathrm{sh}^2\frac{\alpha}{2}dx^2$
$S\subset R^{2,1}$	$+-$	-1	$\cos^2\frac{\alpha}{2}dt^2-\sin^2\frac{\alpha}{2}dx^2$

Tch.坐标下的 II	相应的方程
$\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}(dt^2+dx^2)$	$\Delta\alpha=\mathrm{sh}\alpha$
$\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}(dt^2+dx^2)$	$\Delta\alpha=-\mathrm{sh}\alpha$
$\cos\alpha\sin\alpha(dt^2+dx^2)$	$\Delta\alpha=+\sin\alpha$

§3 线汇、伪球线汇和 Bäcklund 变换

前面我们介绍了 sine-Gordon 方程与 $K=-1$ 曲面的联系，即从 sine-Gordon 方程的一解，可具体地做出欧氏空间中一个 $K=-1$ 的曲面．在这一节中，我们要给出 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换的几何意义，它密切地联系于伪球线汇．早在 1883 年，Bäcklund 就建立了从 sine-Gordon 方程的一个解得到另一个解的变换与伪球线汇的关系，他的论文受到重视，并被翻译成英文（见章末[2]）．L. P. Eisenhart 在他于 1909 年发表的著作《曲线与曲面的微分几何教程》中介绍了 Bäcklund 的工作，并放在重要地位，他把 sine-Gordon 方程解之间的这种变换称为 Bäcklund 变换（见章末[5]）．Bäcklund 变换的作用在于通过它可以从 sine-Gordon 方程的一个解得到另一新解，并且相应地利用 Bäcklund 变换，可以从一个 $K=-1$ 的曲面，得出另一个 $K=-1$ 的曲面．3 维欧氏空间 $K=-1$ 的曲面有多种，其中最有名的是由曳物线旋转而得出的伪球面．

随着孤立子理论的发展，Bäcklund 变换愈来愈受重视，并且不限于 sine-Gordon 方程，人们发现其他孤立子方程也有类似的变换，也称之为 Bäcklund 变换，并且，Bäcklund 变换的范围也逐步扩大（见第三章）．

在本节中，我们先给出线汇与伪球线汇的定义，然后再证明著名的 Bäcklund 定理，给出了 Bäcklund 变换的几何意义．另外，我们简单介绍 Bäcklund 变换的高维推广及其在高维欧氏空间的几何解释．

3.1 伪球线汇

线汇起始于对光线的折射与反射方面的研究，空间中依赖于两个参数的直线族构成一个线汇，例如曲面的法线全体构成一线

汇，称为法线汇．一般来说，给定一个线汇，它的直线全体并不一定能垂直于某一曲面，也即不一定是法线汇．

由线汇的定义可见，用一个一般位置的平面(它不包含线汇中的直线，也不与线汇中的直线平行)去截一线汇时，线汇中每条直线与平面均相交于一点．如果用适当的曲面来代替平面去截一线汇，也有同样的结论．这个曲面称为参考曲面，借助于参考曲面及其上坐标 u, v，我们可以给出线汇的解析表示式，它是由下式

$$\vec{Y}=\vec{X}(u, v)+\lambda\vec{\xi}(u, v) \quad \vec{\xi}\cdot\vec{\xi}=1 \tag{7-3-1}$$

定义的直线所形成的两参数直线族．这里 $\vec{X}(u, v)$是参考曲面，$\vec{\xi}(u, v)$是线汇中直线的方向，λ 是每条直线的参数．固定 u, v，则(7-3-1)表示过点 $\vec{X}(u, v)$，方向为 $\vec{\xi}(u, v)$的一条直线．

线汇中通过参考曲面 S 上一曲线 C 的直线全体构成一直纹面．设 C 的方程为 $u=u(t), v=v(t)$，代入(7-3-1)式就得到此直纹面的方程，其中 t, λ 是此直纹面的参数．对于 $u=u(t), v=v(t)$，如果存在 $\lambda=\lambda(t)$ 使得 $\frac{d\vec{Y}}{dt}$ 和 $\vec{\xi}$ 同方向，则此直纹面是可展曲面．具体地说，这时

$$\vec{Y}=\vec{Y}(t)=\vec{X}(u(t), v(t))+\lambda(t)\vec{\xi}(u(t), v(t))$$

满足

$$\frac{d\vec{Y}}{dt}=\frac{d\vec{X}}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}\vec{\xi}+\lambda\frac{d\vec{\xi}}{dt}=\mu\vec{\xi},$$

亦即 $\vec{\xi}, \frac{d\vec{X}}{dt}, \frac{d\vec{\xi}}{dt}$ 线性相关．因此，直纹面是可展曲面的充要条件是 $u=u(t), v=v(t)$满足

$$\det\left(\frac{d\vec{X}}{dt}, \frac{d\vec{\xi}}{dt}, \vec{\xi}\right)=0. \tag{7-3-2}$$

这个条件的微分形式是

$$\det(\vec{X}_u du+\vec{X}_v dv, \vec{\xi}_u du+\vec{\xi}_v dv, \vec{\xi})=0$$

或

$$\mathfrak{A}\,du^2+2\mathfrak{B}\,du\,dv+\mathfrak{C}\,dv^2=0. \qquad (7\text{-}3\text{-}3)$$

这是关于 du, dv 的二次方程，在 $\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}>0$ 的条件下，(7-3-3) 关于 $du:dv$ 有两个不相等的实根，因而，对于已给线汇的任一直线，有两张可展曲面通过此直线.

又可推得：在 $\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}>0$ 的情况下，线汇中每一条直线均可切于空间中的两条曲线，切点称为直线的焦点．线汇的焦点的轨迹形成焦曲面，因而有两张焦曲面，这两张焦曲面由可展曲面的脊线所构成．所以，线汇可看成由这两张焦曲面的公切线的全体所构成(图 7-1).

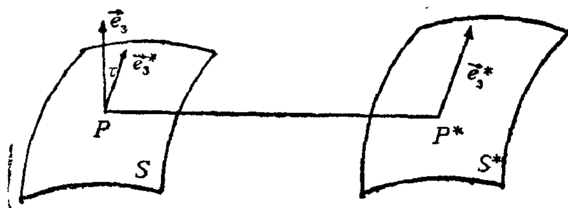


图　7-1

注意：如果我们容许复化，在 $\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}<0$ 时，也可以说有两张可展曲面通过其中的一直线，但它们已不是实的可展曲面了，这时也可以定义复的焦点和焦曲面.

现在只考虑实的情形．设 S, S^* 为一线汇的两张焦曲面，PP^* 是线汇中的直线，它是两焦曲面的公切线，使点 P 与 P^* 相对应，就得到曲面 S 到 S^* 的对应．设 $\vec{e}_3$ 与 $\vec{e}_3^*$ 分别是曲面 S 在点 P 与曲面 S^* 在点 P^* 的法向量，记 $\vec{e}_3$, $\vec{e}_3^*$ 的交角为 τ, PP^* 的距离为 l, 即

$$\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3^*=\cos\tau, \qquad (7\text{-}3\text{-}4)$$

$$d_{pp^*}=l. \qquad (7\text{-}3\text{-}5)$$

当 τ, l 均为常数时，称此线汇为伪球线汇.

对于伪球线汇，成立下述定理.

定理 1(Bäcklund 定理)　设 S, S^* 为 R^3 中一伪球线汇的两

张焦曲面，记对应点之间的距离为 l(常数)，对应法线之间的交角为 τ(非零常数)，则这两张焦曲面 S, S^* **有相同的负常曲率** $-\sin^2\tau/l^2$.

证明 记 S 上一般点为 P，其位置向量记为 $\vec{r}(u, v)$，P 的对应点为 P^*，其位置向量为 $\vec{r}^*(u, v)$，$\overrightarrow{PP^*}$ 是 S 和 S^* 的公共切向量，其单位向量为 $\vec{e}_1$，取 S 的正交标架 $\{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$，$S^*$ 的正交标架为 $\{P^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{n}^*\}$，这里 $\vec{e}_1=\vec{e}_1^*$. 依假定

$$\vec{r}^*=\vec{r}+l\vec{e}_1, \tag{7-3-6}$$

$$\begin{cases}\vec{e}_2^*=\cos\tau\vec{e}_2+\sin\tau\vec{n},\\ \vec{n}^*=-\sin\tau\vec{e}_2+\cos\tau\vec{n},\end{cases} \tag{7-3-7}$$

S 和 S^* 的基本方程分别为

$$\begin{cases}d\vec{r}=\omega^a\vec{e}_a,\\ d\vec{e}_a=\omega_a^b\vec{e}_b+\omega_a^3\vec{n},\\ d\vec{n}=\omega_3^a\vec{e}_a\end{cases} \tag{7-3-8}$$

与

$$\begin{cases}d\vec{r}^*=\overset{*}{\omega}{}^a\vec{e}_a^*,\\ d\vec{e}_a^*=\overset{*}{\omega}{}_a^b\vec{e}_b^*+\omega_a^3\vec{n},\\ d\vec{n}^*=\overset{*}{\omega}{}_3^a\vec{e}_a.\end{cases} \tag{7-3-9}$$

从(7-3-6)～(7-3-9)得

$$\begin{aligned}d\vec{r}^*&=\omega^a\vec{e}_a+l\,d\vec{e}_1\\ &=(\omega^a+l\omega_1^a)\vec{e}_a+l\omega_1^3\vec{n}\\ &=\overset{*}{\omega}{}^a\vec{e}_a^*=\overset{*}{\omega}{}^1\vec{e}_1+\overset{*}{\omega}{}^2(\cos\tau\vec{e}_2+\sin\tau\vec{n}),\end{aligned}$$

因而成立

$$\overset{*}{\omega}{}^1=\omega^1,\ \overset{*}{\omega}{}^2=\frac{l}{\sin\tau}\omega_1^3. \tag{7-3-10}$$

同理有

$$\omega^2=\frac{l}{\sin\tau}\overset{*}{\omega}{}_1^3. \tag{7-3-11}$$

由(7-3-7)及(7-3-9)得

$$de_2^* = \cos\tau(\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 n) + \sin\tau(\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$$
$$= \overset{*}{\omega}{}_2^1 e_1^* + \overset{*}{\omega}{}_2^3 n^* = \overset{*}{\omega}{}_2^1 e_1 + \overset{*}{\omega}{}_2^3(-\sin\tau e_2 + \cos\tau n),$$

因而

$$\overset{*}{\omega}{}_2^3 = \omega_2^3.$$

S^* 的 Gauss 曲率 K^* 由

$$d\overset{*}{\omega}{}_1^2 = \overset{*}{\omega}{}_1^3 \wedge \overset{*}{\omega}{}_3^2 = -K^* \overset{*}{\omega}{}^1 \wedge \overset{*}{\omega}{}^2 \tag{7-3-12}$$

所决定.

记 $\overset{*}{\omega}{}_2^3 = \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2$, 那末(7-3-12)的左方为

$$\overset{*}{\omega}{}_1^3 \wedge \overset{*}{\omega}{}_3^2 = \frac{\sin\tau}{l}\omega^2 \wedge (-b\omega^1) = b\frac{\sin\tau}{l}\omega^1 \wedge \omega^2. \tag{7-3-13}$$

另一方面, 由 $\omega_\alpha^3 \wedge \omega^\alpha = 0$ 可知 ω_1^3 具有形式

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2,$$

所以

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{b}\omega^1 \wedge \omega_1^3 = \frac{1}{b}\frac{\sin\tau}{l}\overset{*}{\omega}{}^1 \wedge \overset{*}{\omega}{}^2, \tag{7-3-14}$$

将(7-3-13)及(7-3-14)代入(7-3-12)就得出 $K^* = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}$, 同理得 $K = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}$, 定理证毕.

3.2 Bäcklund 变换

由 § 2 ，我们已经知道从 sine-Gordon 方程的任一解 α, 可作出一个相应的负常曲率曲面; 又从 Bäcklund 定理得知, 伪球线汇的两张焦曲面是具有相同的负常曲率的曲面. 这两张焦曲面对应于 sine-Gordon 方程的两个解. 现在我们要从 Bäcklund 定理出发, 也就是从伪球线汇的两张焦曲面的对应出发, 来导出它们所对应的两个解之间的关系式, 也就是给出 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换关系式.

设 S 与 S^* 是 $K=-1$ 的两张焦曲面, 现在我们假设 $\{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ 是曲面 S 的 Tschebyscheff 标架(见 § 2, 注意这和证明 Bäcklund 定理时的标架不一样), 这时 (7-2-9)、(7-2-10)式成立.

设

$$\vec{r}^* = \vec{r} + l\vec{e} = \vec{r} + l(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) \qquad (7\text{-}3\text{-}15)$$

构成一个伪球线汇．这里 $\vec{r}$ 与 $\vec{r}^*$ 分别对应于曲面 S 与 S^*，l 是 S 与 S^* 上对应点 P 与 P^* 连线 PP^* 的长度，$\vec{e}$ 是 $\overrightarrow{PP^*}$ 方向的单位向量，θ 是 $\vec{e}$ 与 $\vec{e}_1$ 的夹角．设曲面 S 对应于 sine-Gordan 方程的解为 α，由于$\{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$为 Tschybescheff 标架，微分(7-3-15)，利用(7-2-9)式容易得出

$$\begin{aligned}
d\vec{r}^* &= d\vec{r} + l(\cos\theta d\vec{e}_1 + \sin\theta\, d\vec{e}_2) + l(-\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2)d\theta \\
&= \left[\cos\frac{\alpha}{2}\,du - l\sin\theta\,d\theta - l\sin\theta\left(\frac{\alpha_v}{2}\,du + \frac{\alpha_u}{2}\,dv\right)\right]\vec{e}_1 \\
&\quad + \left[\sin\frac{\alpha}{2}\,dv + l\cos\theta\,d\theta + l\cos\theta\left(\frac{\alpha_v}{2}\,du + \frac{\alpha_u}{2}\,dv\right)\right]\vec{e}_2 \\
&\quad + \left[l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\,du - l\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\,dv\right]\vec{n}. \qquad (7\text{-}3\text{-}16)
\end{aligned}$$

S^* 在 P^* 点的单位法向量应是

$$\vec{n}^* = \sin\tau\sin\theta\vec{e}_1 - \sin\tau\cos\theta\vec{e}_2 + \cos\tau\vec{n}, \qquad (7\text{-}3\text{-}17)$$

这是因为该向量应和 $\vec{e}$ 垂直又和 $\vec{n}$ 交定角 τ．由于 $\vec{n}^*$ 是 S^* 的法向量，它还必须满足 $d\vec{r}^*\cdot\vec{n}^* = 0$，这就得出

$$\begin{aligned}
&l\sin\tau\,d\theta - \sin\tau\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\,du - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\,dv\right) \\
&+ l\sin\tau\left(\frac{\alpha_v}{2}\,du + \frac{\alpha_u}{2}\,dv\right) - l\cos\tau\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\,du\right. \\
&\left.- \cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\,dv\right) = 0. \qquad (7\text{-}3\text{-}18)
\end{aligned}$$

由于 $K = K^* = -1$，利用 Bäcklund 定理得知 $l = \sin\tau$，又记 $\theta = \frac{\alpha'}{2}$，则 $d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial u}\,du + \frac{\partial\alpha'}{\partial v}\,dv\right)$．又因为(7-3-18)对任意 du: dv 成立，我们可把(7-3-18)式改变为偏微分方程组的形式，这样，就得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\tau\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial u}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)=\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\tau\cos\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha}{2},\\ \frac{1}{2}\sin\tau\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial v}+\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)=-\cos\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\tau\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\end{cases}\tag{7-3-19}$$

方程组(7-3-19)满足可积条件. 将(7-3-19)的两个式子分别关于u与v微分, 然后把所得到的式子相减并简化, 则可知α'也是sine-Gordon 方程的一解. 曲面S^*恰对应于 sine-Gordon 方程的解α'.

对于(7-3-19)式,我们还可改写成

$$\begin{cases}(\alpha'+\alpha)_\xi=2\beta\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{2},\\ (\alpha'-\alpha)_\eta=\frac{2}{\beta}\sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}\right).\end{cases}\tag{7-3-20}$$

这里

$$\begin{cases}\xi=\frac{u+v}{2},\quad \eta=\frac{u-v}{2},\\ \beta=\frac{1-\cos\tau}{\sin\tau}.\end{cases}\tag{7-3-21}$$

这样, 我们就得到 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换的常见的解析形式(7-3-20).

下面我们仅指出与 Bäcklund 定理及伪球线汇有关的定理, 但不给出证明.

定理2 设S是R^3中一个具有负常曲率K的曲面, $K=-\frac{\sin^2\tau}{l^2}$,其中$l>0$及$\tau$均为常数. 又给定任意的单位向量$\vec{e}_0\in T_{P_0}(M)$,它不是一个主方向,则存在唯一的一张曲面$S^*$及伪球线汇$\sigma$: $S\to S^*$, 使得如$P_0^*=\sigma(P_0)$, 就有$\overrightarrow{P_0P_0^*}=l\vec{e}_0$, 且$\tau$是曲面$S$与$S^*$在点$P$与$P^*$的法向的交角.

因此,从已给的负常曲率曲面,我们可以构造出依赖两个参数

的新的负常曲率曲面.

3.3 高维空间 R^N 的子流形的基本方程与 Bäcklund 定理在高维空间的一种推广

设 M 是欧氏空间 R^N 中的 n 维子流形, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 是 M 在 P 点的切空间的单位正交基, $\vec{e}_{n+1}, \cdots, \vec{e}_N$ 是互相正交的单位法向量. 子流形的基本方程是

$$\begin{cases} d\vec{r} = \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n; \alpha, \beta = n+1, \cdots, N), \\ d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \end{cases} \tag{7-3-22}$$

其可积条件是

$$\begin{cases} d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = 0, \\ d\omega_A^B + \omega_C^B \wedge \omega_A^C = 0 \quad (A, B, C = 1, 2, \cdots, N), \\ \omega_B^A + \omega_A^B = 0, \end{cases} \tag{7-3-23}$$

以及

$$\omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0.$$

从上式得出

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \tag{7-3-24}$$

Gauss 方程是

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \Omega_j^i (= -\omega_\alpha^i \wedge \omega_j^\alpha). \tag{7-3-25}$$

当

$$\Omega_j^i = -C\omega^i \wedge \omega^j \tag{7-3-26}$$

时, 流形称为具有常曲率 C.

$$d\omega_i^\alpha + \omega_A^\alpha \wedge \omega_i^A = 0 \tag{7-3-27}$$

是 Codazzi 方程.

$$d\omega_\beta^\alpha + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = \Omega_\beta^\alpha (= -\omega_i^\alpha \wedge \omega_\beta^i)$$

称为法丛的曲率. 如果 $\Omega_\beta^\alpha = 0$, 则称法丛为平坦的.

E. Cartan 在 1919 年已证明, n 维负常曲率空间可以在 $\boldsymbol{R}^{2n-1}$ 的 n 维子流形上实现(局部), 并存在一正交标架 $\{P, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_N\}$ $(N=2n-1)$ 和参数系 $(u^1, \cdots, u^n)$,

$$\omega^i = a_i du^i \quad (i \text{ 非和式}) \quad a_i > 0, \ \Sigma a_i^2 = 1,$$

$$\omega_i^\alpha = b_i^\alpha \omega^i \quad (i \text{ 不作和}),$$

$$\Omega_\beta^\gamma=0.$$

这时第一基本形式和第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=\sum_i a_i^2(du^i)^2,$$

$$\mathrm{II}=\sum_{i,\alpha} b_i^\alpha(a_i)^2(du^i)^2 e_\alpha.$$

章末[22]、[23]文指出，这种参数表示是 3 维空间 R^3 中伪球面的 Tschebyscheff 坐标的扩充，其 Gauss-Codazzi 方程(是一个相当复杂的方程组)就是 sine-Gordon 方程的推广.

章末[22]中给出高维空间 R^{2n-1} 中相应的 Bäcklund 定理. 为此，文中先把 R^3 的线汇的定义改写成两曲面之间的线汇的形式，又把 Bäcklund 定理稍加改写，以便于在 R^{2n-1} 中给出线汇的适当定义，而得出 R^{2n-1} 中相应的 Bäcklund 定理.

定义 1 R^{2n-1} 中两个 n 维子流形 M 与 M^* 之间的线汇定义为一微分同胚 $\sigma: M\to M^*$，使得对 $P\in M$，P 与 $P^*=\sigma(P)$ 的连线是 M 与 M^* 的公切线.

P 与 P^* 的法平面 v_p 与 v_{p^*} 是 $n-1$ 维的，它们都垂直于 $\overrightarrow{PP^*}$，记 $\overrightarrow{PP^*}$ 的单位向量为 $\vec{e}$.

定义 2 R^{2n-1} 中的两个 n 维子流形 M 与 M^* 之间的线汇 $\sigma: M\to M^*$ 称为伪球线汇，如果它满足：

(i) P 与 $P^*=\sigma(P)$ 之间的距离是一个不依赖于 P 点位置的常数 l，

$$P^*=P+l\vec{e};$$

(ii) 设 v_p 与 v_p^* 为 S 和 S^* 在 P 点和 P^* 点的法平面，$v\in v_p$，v 为 v_p 中任一向量，π 是 v_p 到 v_p^* 的正交投影，则 v 与 πv 的交角是一常数 τ；

(iii) 法丛 v 与 v^* 都是平坦的；

(iv) 由正交投影 π 所给出的丛映照 $\Gamma: v\to v^*$ 和法丛上的联络相交换，

那末这线汇称为伪球线汇.

定理3 设 σ: $M\to M^*$ 是 R^{2n-1} 中两个 n 维子流形 M 和 M^* 之间的伪球线汇,那末 M 和 M^* 具相同的负常曲率 $-\frac{\sin^2\tau}{l^2}$.

这里省略了一切证明,请参看章末[19].

M 和 M^*(在 Tschebyscheff 坐标下)的 Gauss-Codazzi 方程是相同的,而所说的推广的 Bäcklund 变换能从这方程组的一个解得出另一个解来.

这种方程组是否有物理意义,是否能用反散射方法处理,都将是一个问题.但是,可换性定理是成立的.

§4 孤立子方程与调和映照

调和映照是微分几何中重要的研究对象,它与数学物理及孤立子理论均有密切联系.在本节中,我们首先引进调和映照的概念(见章末[4]),再着重于讨论从欧氏平面 R^2 或 Minkowski 平面 $R^{1,1}$ 到欧氏空间 R^3 的球面 S^2, 以及 Minkowski 空间 $R^{2,1}$ 的球面 H^2 和 $S^{1,1}$ 的调和映照以及它们和某些特殊非线性方程(包括孤立子方程)的关系(见章末[8]、[11]、[12]、[14]).

4.1 调和映照的定义与基本方程

设 M 与 N 为黎曼流形或洛仑兹流形, φ: $M\to N$ 是 C^2-映照.如所知,映照 ϕ 的能量积分由

$$E(\phi)=\int_M e(\phi)dV_M \tag{7-4-1}$$

所定义,这里 dV_M 是 M 的体积元素, $e(\phi)$是能量密度,在局部坐标下,它有如下的表达式

$$e(\phi)=\underset{N}{g}_{\alpha\beta}(\phi)\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\underset{M}{g}^{ij}(x) \tag{7-4-2}$$

$$(\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n;\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ m).$$

这里 $\underset{M}{g}^{ij}$ 与 $\underset{N}{g}_{\alpha\beta}$ 分别是流形 M 与 N 的度量张量的反变分量与协变分量，$n=\dim N$，$m=\dim M$.

如果映照 φ 是 $E(\varphi)$ 的临界点，则称 φ 为 $M\to N$ 的调和映照。能量积分 $E(\phi)$ 的 Euler 方程为

$$\underset{M}{g}^{ij}\left(\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}-\underset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k}+\underset{N}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^j}\right)=0. \qquad (7\text{-}4\text{-}3)$$

这里 $\underset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}$ 和 $\underset{N}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ 分别是 M 与 N 的克氏记号. 方程(7-4-3)是 M 到 N 的调和映照 ϕ 的偏微分方程. 如果 M 是黎曼流形，即 M 的度量是正定的，则(7-4-3)是一系非线性椭圆型方程组. 如果 M 为洛仑兹流形，即 M 的度量非正定且具有符号$(+,\ +,\ \cdots,\ +,\ -)$时，则(7-4-3)是一系非线性双曲型方程组.

调和映照在数学及物理上均很重要. 它在数学上具有广阔的背景，因为测地线、极小曲面，以及流形上的调和函数等，都是调和映照的特例. 下面一些例子进一步看出在物理上调和映照也很重要(见章末[13]、[15]～[17]).

(1) 非线性 σ- 模型或手征场是一种引起广泛注意的非线性场，它实际上是 $M\to N$ 的调和映照，这里 M 是 Minkowski 时空或欧氏空间，而 N 通常是齐性黎曼空间. 特别，当 N 是紧致李群时，这种映照就称为主手征场.

(2) 如所知，Ernst 方程是决定真空爱因斯坦引力场的稳定轴对称解的最基本方程，可以证明，Ernst 方程是来自能量积分

$$\int\frac{\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\right)^2\right]}{\phi^2}d^3x$$

的 Euler 方程(轴对称)，因而 Ernst 方程的解实际上是 R^3 到双曲平面 H^2 的轴对称调和映照. 这时，双曲平面的度量取为 Poincaré 表示

$$ds^2=\frac{1}{\phi^2}(d\phi^2+d\psi^2)$$

(3) 粒子物理学中有时用弦来作为强子的模型，在弯曲时空 V(洛仑兹流形)中描述弦运动的世界面是一个类时的二维曲面，它由下述运动方程所决定(见章末[10])：

$$\phi^{\alpha}_{\tau\tau}-\phi^{\alpha}_{\sigma\sigma}+\underset{V}{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}(\phi^{\beta}_{\tau}\phi^{\gamma}_{\tau}-\phi^{\beta}_{\sigma}\phi^{\gamma}_{\sigma})=0.$$

这实际上是二维 Minkowski 平面 $R^{1,1}\to V$ 的调和映照方程.

(4) R^4 中自对偶 Yang-Mills 方程(在 R- 规范下)的一部分解也可以从调和映照作出.

某些孤立子方程与调和映照关系密切，我们在下面较详细的叙述.

4.2 R^2, $R^{1,1}$ 到 S^2, H^2 和 $S^{1,1}$ 的调和映照

S^2 表示 3 维欧氏空间 R^3 的球面，是 R^3 中点 l(用位置向量 $l=(l_1, l_2, l_3)$来表示)的集合，满足 $l^2=1$，但我们略去向量的符号 "→".

R^2 是欧氏平面，其上点的坐标用(x, y)表示，欧氏度量的微分形式为 $ds^2=dx^2+dy^2$.

R^2 到 S^2 的映照可记为 $l=l(x, y)$，且满足 $l^2=1$. 由(7-4-3)可得 $R^2\to S^2$ 的调和映照 l 是由方程

$$l_{xx}+l_{yy}+(l_x^2+l_y^2)l=0 \qquad (7\text{-}4\text{-}4)$$

所定义的.

$R^{1,1}$ 为 Minkowski 平面，其上点坐标用(t, x)表示，Minkowski 平面为最简单的 2 维 Lorentz 流形，其度量形式为 $ds^2=dt^2-dx^2$. $R^{1,1}$ 到 S^2 的调和映照 l 由

$$l_{tt}-l_{xx}+(l_t^2-l_x^2)l=0 \qquad (7\text{-}4\text{-}5)$$

所定义.

3 维 Minkowski 空间 $R^{2,1}$ 可理解为 $l=(l_1, l_2, l_3)$ 的集合，在其中两向量 l, m 的数量积为

$$l\cdot m=l_1m_1+l_2m_2-l_3m_3. \qquad (7\text{-}4\text{-}6)$$

特别，

$$l^2=l\cdot l=l_1^2+l_2^2-l_3^2. \qquad (7\text{-}4\text{-}7)$$

H^2 和 $S^{1,1}$ 可看为 $R^{2,1}$ 的"球面". H^2 称为双曲平面,它是由

$$l^2=-1,\quad l_3>0 \tag{7-4-8}$$

所定义的, 这是 $R^{2,1}$ 中双叶旋转双曲面的上半叶, H^2 整体地实现了双曲平面的几何学(即罗巴切夫斯基几何学), 而 R^3 中负常曲率曲面只是局部地实现罗巴切夫斯基几何学.

$S^{1,1}$ 是由

$$l^2=1 \tag{7-4-9}$$

所定义的. 它是单叶旋转双曲面. 但在 Minkowski 空间中,它是类时曲面,具有非正定度量.

R^2 到 H^2 和 $S^{1,1}$ 的调和映照分别由方程

$$l_{xx}+l_{yy}-(l_x^2+l_y^2)l=0\quad (l^2=-1,\ l_3>0), \tag{7-4-10}$$

$$l_{xx}+l_{yy}+(l_x^2+l_y^2)l=0\quad (l^2=1) \tag{7-4-11}$$

所定义.

$R^{1,1}$ 到 H^2 和 $S^{1,1}$ 的调和映照方程由

$$l_{tt}-l_{xx}-(l_t^2-l_x^2)l=0\quad (l^2=-1,\ l_3>0), \tag{7-4-12}$$

$$l_{tt}-l_{xx}+(l_t^2-l_x^2)l=0\quad (l^2=1) \tag{7-4-13}$$

所定义.

当然,调和映照也未必定义在整个 R^2 或 $R^{1,1}$ 上,往往是定义在其上的某个区域上. 例如, 虽然我们知道 R^2 中半平面或单连通区域到 H^2 的调和映照是存在的, 但是整个平面 $R^2\to H^2$ 的非平凡的调和映照是否存在还是一个未解决的问题(见章末[4]).

从 R^2(或 $R^{1,1}$)到任意黎曼流形的调和映照在 R^2(或 $R^{1,1}$) 的共形变换下还是调和映照, 也即, 这时调和映照具有共形不变性. 现举下述两例来说明.

(1) $R^2\to S^2$(或 H^2, $S^{1,1}$)的调和映照的共形不变性.

首先把 R^2 看成 1 维复空间 $C^1\{z=x+iy\}$, $ds^2=dzd\bar{z}$. 设 $z=f(w)=x(u,v)+iy(u,v)$ 是 W 平面上某一区域 Ω_w 到 z 平面 C^1 上某区域 Ω_z 的共形映照, l 是 Ω_z 到 $S^2(H^2, S^{1,1})$ 的调和映照, 则

$l\circ f$: $l=l(x(u,v),\ y(u,v))$是Ω_w到$S^2(H^2,\ S^{1,1})$的调和映照.这是因为方程(7-4-11)等可写成

$$l_{z\bar{z}}+(l_z\cdot l_{\bar{z}})l=0 \tag{7-4-14}$$

的形式,而在变换$z=z(w)$下,(7-4-14)仍保持其形状,即化为

$$l_{w\bar{w}}+(l_w\cdot l_{\bar{w}})l=0.$$

(2) $R^{1,1}\to S^2(H^2,\ S^{1,1})$的调和映照也具有共形不变性.

设

$$\xi=\frac{t+x}{2},\qquad \eta=\frac{t-x}{2} \tag{7-4-15}$$

是$R^{1,1}$的特征坐标(光锥坐标),则$dS^2=4d\xi d\eta$,而调和映照方程(7-4-5)可写成

$$l_{\xi\eta}+(l_\xi\cdot l_\eta)l=0\quad (l^2=1). \tag{7-4-16}$$

$R^{1,1}$平面上的共形映照具有形式

$$\xi=f(\xi_1);\qquad \eta=g(\eta_1). \tag{7-4-17}$$

$l\circ f$仍然是调和映照,这因为它满足

$$l_{\xi_1\eta_1}+(l_{\xi_1}\cdot l_{\eta_1})l=0.$$

调和映照方程(7-4-16)还可写作

$$(l_\xi^2)_\eta=0,\ (l_\eta^2)_\xi=0,\ l^2=1. \tag{7-4-18}$$

这里要求l_ξ, l_η线性无关.事实上,如果(7-4-16)成立,将它与l_ξ作数量积,由于$l\cdot l_\xi=0$,即得$(l_\xi^2)_\eta=0$.同样又得$(l_\eta^2)_\xi=0$,因而(7-4-18)成立.反之,如果(7-4-18)成立,则可得

$$l_\xi\cdot l_{\xi\eta}=0,\ l_\eta\cdot l_{\xi\eta}=0, \tag{7-4-19}$$

所以 $$l_{\xi\eta}=\sigma l,$$

但 $$\sigma=l\cdot l_{\xi\eta}=(l\cdot l_\xi)_\eta-l_\xi\cdot l_\eta=-l_\xi\cdot l_\eta,$$

故得知(7-4-16)成立.

由(7-4-18)可知,

$$l_\xi^2=f(\xi),\ l_\eta^2=g(\eta).$$

当$f(\xi)\neq 0$, $g(\eta)\neq 0$时,可作ξ, η的变换,$\xi=\xi(\xi_1)$, $\eta=\eta(\eta_1)$,然后改记$(\xi_1,\ \eta_1)$为$(\xi,\ \eta)$,就得到

$$l_\xi^2=1,\ l_\eta^2=1. \tag{7-4-20}$$

满足条件(7-4-20)的调和映照称为"标准化调和映照"，在 l_ξ^2, l_η^2 不为零时，调和映照必可通过形为 $\xi=\xi(\xi_1)$, $\eta=\eta(\eta_1)$ 的变换化为标准化调和映照．它在处理上有许多方便之处．

对于标准化调和映照，成立

$$l_x^2+l_t^2=1,\ l_t\cdot l_x=0. \tag{7-4-21}$$

实际上，容易得出(7-4-20)与(7-4-21)是等价的．标准化调和映照可用(7-4-21)为定义．

下面我们要给出 $R^{1,1}\to S^2$ 的标准化调和映照和 sine-Gordon 方程之间的关系．与此同时，我们导出与 sine-Gordon 方程相应的线性可积系统．

为此，取 m, n 使 m 为 l_t 方向的单位向量，n 为 l_x 方向的单位向量，由(7-4-21)知道，m 和 n 必正交，而且存在 x, t 的函数 α，使得

$$l_t=\sin\frac{\alpha}{2}m,\quad l_x=\cos\frac{\alpha}{2}n. \tag{7-4-22}$$

并且，由于 l, m, n 为单位正交标架，必成立

$$m_t=-\sin\frac{\alpha}{2}l+\sigma n,\quad m_x=\tau n,$$

$$n_t=-\sigma m,\quad n_x=-\cos\frac{\alpha}{2}l-\tau m. \tag{7-4-23}$$

作可积条件，得知

$$\sigma=-\frac{1}{2}\alpha_x,\quad \tau=-\frac{1}{2}\alpha_t \tag{7-4-24}$$

以及

$$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\sin\alpha. \tag{7-4-25}$$

因此，sine-Gordon 方程和 $R^2\to S^2$ 的标准化调和映照相对应．即已知 sine-Gordon 方程(7-4-25)的一解 α，就可从完全可积的线性方程组(7-4-22)、(7-4-23)中解出单位正交的 l, m, n，其中 l 就是 $R^{1,1}\to S^2$ 的一个标准化调和映照．

记

$$\Phi=\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \tag{7-4-26}$$

则(7-4-22)～(7 4-23)就可改为

$$\Phi_t=V\Phi,\ \Phi_x=U\Phi. \tag{7-4-27}$$

这里

$$U=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_t \\ -\cos\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2}\alpha_t & 0 \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} 0 & \sin\frac{\alpha}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha_x & 0 \end{pmatrix},$$

(7-4-27)称为 sine-Gordon 方程的线性可积系统。

若取

$$U=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cosh\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_t}{2} \\ \cosh\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha_t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7-4-28}$$

$$V=\begin{pmatrix} 0 & \sinh\frac{\alpha}{2} & 0 \\ \sinh\frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha_x}{2} \\ 0 & \frac{\alpha_t}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

则(7-4-27)的可积条件是

$$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\sinh\alpha. \tag{7-4-29}$$

在章末[8]文中还给出了 $R^{1,1}$ 到 $S^{1,1}$ 的调和映照和(7-4-29)之间的关系，并且证明了在某些适当的初始条件下，调和映照整体存在性定理.

胡和生讨论了 $R^2\to H^2$, S^2, $S^{1,1}$ 的调和映照与某些特殊的椭圆型方程之间的关系. 现仅就 $R^2\to H^2$ 的调和映照来描述(见本章末[11]).

设 l, m, n 为 $R^{2,1}$ 中三个正交向量组 $l^2=-1$, $m^2=n^2=1$, l 是 H^2 上点的位置向量. H^2 由 $l^2=-1\,(l_3>0)$ 所定义，构造线性方程组

$$\begin{aligned} &l_t=\cosh\frac{\alpha}{2}m, && l_x=\sin\frac{\alpha}{2}n,\\ &m_t=\cosh\frac{\alpha}{2}l-\frac{\alpha_x}{2}n, && m_x=\frac{1}{2}\alpha_t n,\\ &n_t=\frac{1}{2}\alpha_x m, && n_x=\sinh\frac{\alpha}{2}l-\frac{\alpha_t}{2}m. \end{aligned} \tag{7-4-30}$$

方程(7-4-30)的可积条件是 sinh - Laplace 方程

$$\alpha_{tt}+\alpha_{xx}=\sinh\alpha. \tag{7-4-31}$$

给定(7-4-31)的一解 $\alpha(t,x)$，它定义在单连通区域 $\Omega\subset R^2$ 中，通过解方程(7-4-30)，我们得到 $\Omega\subset R^2$ 到 $SO(2,1)$ 的一个映照，这个映照中抽出 $l(t,x)$，它就是 $R^2\to H^2$ 的一个标准化的调和映照. 这里标准化的调和映照是由

$$l_z^2=(l_x^2-l_y^2)-2il_x\cdot l_y=1 \quad (z=x+iy)$$

所刻划的. 可以证明，当调和映照无共形点时，即不存在

$$l_x^2-l_y^2=0,\ l_x\cdot l_y=0$$

的点时，则这调和映照可以通过共形映照而成为标准化的调和映照.

类似地，可以得到 R^2 到 S^2, $S^{1,1}$ 的调和映照与某些椭圆型偏

微分方程的关系. 现在,我们将上述的一些结果列表于下

调和映照		偏微分方程
$R^2\to S^2$		$\Delta\alpha=-\sinh\alpha$
$R^2\to H^2$		$\Delta\alpha=\sinh\alpha$
$R^2\to S^{1,1}(+1)$		$\Delta\alpha=-\sin\alpha$
$R^2\to S^{1,1}(-1)$		$\Delta\alpha=\sin\alpha$
$R^{1,1}\to S^2$		$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\sin\alpha$
$R^{1,1}\to S^{1,1}(+1)$		$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\pm\sinh\alpha$
	或	$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\cosh\alpha$
$R^{1,1}\to H^2$		$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\sin\alpha$

相应的线性可积系统,可参见章末[8]、[11]、[18].

§5 容有线性可积系统的非线性偏微分方程

如所知,在建立孤立子理论时,把孤立子方程和一个线性可积的偏微分方程组相联系是重要的一步. 这时, 下述两个问题是值得研究的(见章末[1]、[9]、[24]).

(1) 如何制作出偏微分方程,使得它成为具有形状为

$$\Phi_t=U\Phi,\ \Phi_x=V\Phi \tag{7-5-1}$$

的线性方程组的可积条件. 这里 Φ 可理解为列向量或方阵, U, V 则属于某线性群 G 的李代数 g.

(2) 给定一个非线性偏微分方程, 怎样来判别是否存在线性方程组(7-5-1),以已给的非线性偏微分方程为可积条件.

我们将以微分几何作为出发点, 给出上述两个问题的一些一般性的结果. 我们在 U, V 属于李代数 $su(2)$(即李群 $SU(2)$ 的李代数)和 $sl(2, R)$(即么模群 $SL(2R)$ 的李代数)时进行讨论. 本节的内容参见章末[9].

为了便于运用微分几何的结果, 我们分别用 $so(3)$(群 $SO(3)$

的李代数)与 $so(2,1)$(群 $SO(2,1)$ 的李代数)来代替 $su(2)$ 与 $sl(2,R)$，因为它们是同构的．下面，特别在 $so(3)$ 的情况做详细的讨论与证明．

5.1　容有 $SO(3)$ 可积系统的非线性偏微分方程的确定

设

$$\mathfrak{F}(\phi, \phi_x, \phi_t, \phi_{xx}, \phi_{xt}, \phi_{tt}, \cdots)=0 \tag{7-5-2}$$

是以 ϕ 为未知函数的非线性偏微分方程，其中 $\phi_x, \phi_t, \phi_{xx}, \phi_{xt}, \phi_{tt}, \cdots$ 是 ϕ 关于 x, t 的偏导数．

如果在 ϕ 满足(7-5-2)的情况下，(7-5-1)为完全可积，我们称偏微分方程(7-5-2)容有 $SO(3)$ 线性可积系统．这时，

$$U=\begin{pmatrix} 0 & C & B \\ -C & 0 & A \\ -B & -A & 0 \end{pmatrix},$$

$$V=\begin{pmatrix} 0 & F & E \\ -F & 0 & D \\ -E & -D & 0 \end{pmatrix}, \tag{7-5-3}$$

其中 A, B, C, D, E, F 是 ϕ 及其到某阶为止的导数的适当函数．

(7-5-1)的可积条件是

$$U_x-V_t+[U, V]=0, \tag{7-5-4}$$

它可写成为下述形式

$$\begin{aligned} &C_x-F_t+AE-BD=0, \\ &B_x-E_t+CD-AF=0, \\ &A_x-D_t+BF-CE=0. \end{aligned} \tag{7-5-5}$$

问题是如何从方程组(7-5-5)构造出一个偏微分方程(7-5-2)，使得对每个满足(7-5-2)的 ϕ，方程组(7-5-5)恒成立．实际上，这个问题与 R^3 中球面 S^2 的基本定理密切相关．

记 $\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}$，设 $\mathfrak{A}$ 的秩数为 2，且不妨取 $BF-CE\neq 0$.

作 R^3 中单位球面 S^2: $\vec{l}^2=1$, 我们有 $\vec{n}=\vec{l}=\vec{e}_3$, 于是 $d\vec{n}=de_3$, $\omega^a=\omega_3^a$, 这时 S^2 的基本方程

$$d\vec{l}=d\vec{e}_3=\omega^a\vec{e}_a,$$

$$d\vec{e}_a=\omega_a^b\vec{e}_b-\omega^a\vec{e}_3, \tag{7-5-6}$$

且成立

$$d\omega^a+\omega_b^a\wedge\omega^b=0, \tag{7-5-7}$$

$$d\omega_b^a+\omega_c^a\wedge\omega_b^c+\omega^b\wedge\omega^a=0 \quad (a,\ b=1,\ 2). \tag{7-5-8}$$

令

$$\Phi=\begin{pmatrix} \vec{l} \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}, \tag{7-5-9}$$

$$\omega^1=Cdt+Fdx,\ \omega^2=Bdt+Edx,\ \omega_1^2=Adt+Ddx, \tag{7-5-10}$$

ω^1 与 ω^2 是独立的. 这时，(7-5-7) 和 (7-5-5) 的前面两式相当，即在 C, F, B, E 已给的情况，我们可解出 ω_1^2 而得到

$$\begin{aligned} A&=\frac{1}{EC-BF}[(E_t-B_x)B+(F_t-C_x)C], \\ D&=\frac{1}{EC-BF}[(E_t-B_x)E+(F_t-C_x)F]. \end{aligned} \tag{7-5-11}$$

对于球面，Codazzi 方程自然成立，Gauss 方程 (7-5-8) 就是 (7-5-5) 的第三式. 将 (7-5-11) 代入 (7-5-5) 的第三式，可具体得出 Gauss 方程的如下形式

$$\begin{aligned} &\left(\frac{E_t-B_x}{EC-BF}B+\frac{F_t-C_x}{EC-BF}C\right)_x \\ &\quad-\left(\frac{E_t-B_x}{EC-BF}E+\frac{F_t-C_x}{EC-BF}F\right)_t+BF-CE=0. \end{aligned} \tag{7-5-12}$$

这时球面 S^2 的度量张量 g_{ab} 为

$$g_{11}=B^2+C^2,\ g_{12}=BE+CF,\ g_{22}=E^2+F^2,\tag{7-5-13}$$

(7-5-12)用 g_{ab} 表示出来,就是球面 S^2 的通常的 Gauss 方程写法.

在 $BF-CE=0$ 时,利用规范变换

$$\Phi\to\tilde{\Phi}=S\Phi,$$

这里 S 是 Φ 及其到某阶导数的一个 $SO(3)$ 值函数,则

$$U\to\tilde{U}=SUS^{-1}+S_tS^{-1},$$
$$V\to\tilde{V}=SVS^{-1}+S_xS^{-1}.$$

我们可以得到 $\tilde{B}\tilde{F}-\tilde{C}\tilde{E}\neq 0$, 这里不详细说明了.

为构造出所有容有 $SO(3)$ 线性可积系统的非线性偏微分方程,我们需要给出下述:

定义 如果偏微分方程 $\mathfrak{F}=0$ 的每一个解均满足另外的偏微分方程

$$G(\phi,\ \phi_t,\ \phi_x,\ \cdots)=0,\tag{7-5-14}$$

则称 $\mathfrak{F}=0$ 是(7-5-14)的支方程.

如果 $\mathfrak{F}=0$ 容有 $SO(3)$ 线性可积系统,则 $\mathfrak{F}=0$ 必须是(7-5-5)中每一个方程的支方程. 若 $CE-BF\neq 0$, 则从(7-5-5)的前面两个方程,我们得到

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{EC-BF}[(E_t-B_x)B+(F_t-C_x)C]+G_1,\\ D&=\frac{1}{EC-BE}[(E_t-B_x)E+(F_t-C_x)F]+G_2,\end{aligned}\tag{7-5-11$^+$}$$

且 $\mathfrak{F}=0$ 是 $G_a=0\,(a=1,\ 2)$ 的支方程.

由此,容易见到, $\mathfrak{F}=0$ 必须是 Gauss 方程(7-5-12)的支方程. 反之,如果对于已给的满足 $CE-BF\neq 0$ 的 $B,\ C,\ E,\ F$, $\mathfrak{F}=0$ 是(7-5-12)的支方程,则 $\mathfrak{F}=0$ 容有 $SO(3)$ 线性可积系统,其中 $A,\ D$ 由(7-5-11)或(7-5-11)$^+$所定义.

从而,在 $CE-BF\neq 0$ 的情况下,所有可能容有 $SO(3)$ 线性可积系统的偏微分方程都确定下来了. —

当 $\mathfrak{A}$ 的秩等于 1 时，我们有

$$D=\sigma A,\ E=\sigma B,\ F=\sigma C.$$

这时，(7-5-5) 退化成下列三个守恒律

$$A_x-(\sigma A)_t=0,\ B_x-(\sigma B)_t=0\quad C_x-(\sigma C)_t=0. \tag{7-5-15}$$

由于这时可积条件 (7-5-5) 只含一个方程，我们不妨假定为 (7-5-15) 的第一式

$$A_x-(\sigma A)_t=0, \tag{7-5-16}$$

这是

$$\psi_t=A\psi,\ \psi_x=\sigma A\psi \tag{7-5-17}$$

的可积条件，这里 ψ 是实值函数，而 (7-5-17) 是 $U(1)$ 群的可积系统.

综上所述，我们得到（见章末 [9]）：

定理 1 所有的容有 $SO(3)$ 线性可积系统的非线性偏微分方程 (7-5-2) 均可用下述方法构造出来：(i) 一般情形（$\mathfrak{A}$ 的秩为 2）. 方程 (7-5-2) 是 3 维欧氏空间中球面的 Gauss 方程 (7-5-12) 或是 (7-5-12) 的支方程，其中 B, C, E, F 是 ϕ 及其偏导数任给的函数，满足 $EC-BF\neq 0$. (ii) 特殊情形（$\mathfrak{A}$ 的秩为 1）. 非线性方程 (7-5-2) 是守恒律形式

$$M_t+N_x=0 \tag{7-5-18}$$

的方程，其中，M, N 是 ϕ 及其偏导数的任意函数，$N\neq 0$.

这个定理提供了一个简单而方便的方法去构造出所有容有 $SO(3)$ 线性可积系统的非线性偏微分方程．更明确的，我们取 B, C, E, F 为 ϕ 及其到某阶为止的偏导数的函数，但满足 $BC-CF\neq 0$. 将 B, C, E, F 代入 (7-5-12)，就得到相应的非线性方程 (7-5-2). 又从 (7-5-1) 与 (7-5-3)，就得出所对应的线性可积系统.

下面给出某些特例.

例 1　置 $B=F=0$, $C=\cos\frac{\phi}{2}$, $E=\sin\frac{\phi}{2}$ 于(7-5-12)式，我们得到负 sine-Gordon 方程

$$\phi_{tt}-\phi_{xx}=-\sin\phi. \tag{7-5-19}$$

例 2　置 $B=F=0$, $C=\cosh\frac{\phi}{2}$, $E=\sinh\frac{\phi}{2}$, 我们得到负 sinh-Laplace 方程

$$\phi_{tt}+\phi_{xx}=-\sinh\phi. \tag{7-5-20}$$

例 3　置 $B=F=0$, $C=E=e^{\phi}$, 我们得出 Liouville 方程

$$\phi_{tt}+\phi_{xx}=-e^{2\phi}. \tag{7-5-21}$$

例 4　置 $B=F=0$, $C=\phi_t$, $E=\phi^2$ 我们得到 $A=-\phi_{tx}/\phi^2$, $D=2\phi$. 将它们代入(7-5-5)的第三式，就有

$$(2+\phi^2)\phi_t+\frac{1}{\phi^2}\phi_{txx}-\frac{2}{\phi^3}\phi_{tx}\phi_x=0. \tag{7-5-22}$$

例 5　置 $C=e^{\phi}$, $E=e^{-\phi}$, $B=F=0$, 将它们代入(7-5-12), 得到

$$e^{2\phi}\phi_{xx}-e^{-2\phi}\phi_{tt}+2e^{2\phi}(\phi_x)^2+2e^{-2\phi}(\phi_t)^2+1=0. \tag{7-5-23}$$

上述的每一例，方程(7-5-2x)都是 Gauss 方程(7-5-12)本身. 在后面 5.3 段中，我们将看到一个例子，它是 Gauss 方程的支方程.

例 6　设 $M=M(\phi, \phi_t, \phi_x, \cdots)$, $N=N(\phi, \phi_t, \phi_x, \cdots)$ 为两个函数，置

$$B=\frac{\partial N}{\partial t},\quad E=\frac{\partial N}{\partial x},$$
$$C=\frac{\partial M}{\partial t},\quad F=\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{7-5-24}$$

我们假定 $BF-CE$ 作为 ϕ 及 ϕ 的一些导数的表达式是不恒等于零的，这时(7-5-12)化为 ϕ 的形如下述的偏微分方程

$$\frac{\partial(M, N)}{\partial(t, x)}=0. \tag{7-5-25}$$

求解(7-5-25)的意义，就是去寻找函数$\phi(t, x)$，使得M, N为函数独立的.

如令$M=M(\phi, \phi_t, \phi_x)$, $N=N(\phi, \phi_t, \phi_x)$，则(7-5-25)是如下形式的 Monge-Ampère 方程

$$\begin{vmatrix} M_{\phi_t}\phi_{tt}+M_{\phi_x}\phi_{tx}+M_\phi\phi_t & N_{\phi_t}\phi_{tt}+N_{\phi_x}\phi_{tx}+N_\phi\phi_t \\ M_{\phi_t}\phi_{tx}+M_{\phi_x}\phi_{xx}+M_\phi\phi_x & N_{\phi_t}\phi_{tx}+N_{\phi_x}\phi_{xx}+N_\phi\phi_x \end{vmatrix}=0. \tag{7-5-26}$$

特别，令$M=\phi$, $N=\phi_t\phi_x$，得到

$$\phi_t^2\phi_{xx}-\phi_x^2\phi_{tt}=0. \tag{7-5-27}$$

令$M=\phi$, $N=\phi_t^2+\phi_x^2$，我们有

$$\phi_t\phi_x\phi_{xx}+(\phi_t^2-\phi_x^2)\phi_{xt}-\phi_t\phi_x\phi_{tt}=0. \tag{7-5-28}$$

令$M=\phi_t$, $N=\phi_x$，我们得到最简单的 Monge-Ampère 方程

$$\phi_{tx}^2-\phi_{tt}\phi_{xx}=0. \tag{7-5-29}$$

5.2 容有 $SO(3)$ 线性可积系统的 2 阶偏微分方程的判别

考察非化约的$SO(3)$线性可积系统，设$BE-CF\neq0$，且B, C, E, F是ϕ及其到r阶为止的偏导数的函数，我们称这个线性可积系统是r级的. 一般来说，r级的线性可积系统所对应的方程(7-5-12)是$r+2$阶的偏微分方程，但是，有时阶数也会低于$r+2$. 例如，我们选取

$$E=\lambda_x+\mu,\ B=\lambda_t,\ F=\sigma_x+\nu,\ C=\sigma_t,$$

其中λ, μ, σ, ν是ϕ的函数，则线性可积系统是 1 级的. 但是容易得出，对应的方程(7-5-12)却是 2 阶的.

对于一个已给的 2 阶非线性偏微分方程(7-5-2)，我们现在给出如何判别(7-5-2)是否容有 0 级的线性可积系统的方法.

当容有 0 级线性可积系统时，(7-5-12)可以改写为

$$-\frac{B'B+C'C}{EC-BF}\phi_{xx}+\frac{E'B+B'E+F'C+C'F}{EC-BF}\phi_{xt}$$

$$
-\frac{E'E+F'F}{EC-BF}\phi_{tt}-\left(\frac{B'B+C'C}{EC-BF}\right)'\phi_x^2
+\left(\frac{E'B+B'E+F'C+C'F}{EC-BF}\right)'\phi_x\phi_t-\left(\frac{E'E+F'F}{EC-BF}\right)'\phi_t^2
+BF-CE=0, \tag{7-5-30}
$$

这里“$'$”表示关于 ϕ 的微分.

(7-5-30)是具有下述形式

$$
-\alpha\phi_{xx}+\beta\phi_{xt}-\gamma\phi_{tt}-\alpha_1\phi_x^2+\beta_1\phi_x\phi_t-\gamma_1\phi_t^2+\delta=0\quad(\delta\neq 0) \tag{7-5-31}
$$

的方程,这里 α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 及 δ 都是 ϕ 的函数.

一个具有形式为(7-5-31)的已给方程,如果容有 0 级的 $SO(3)$ 线性可积系统,则必存在函数 λ_1,使得

$$
\lambda_1\alpha=\frac{B'B+C'C}{EC-BF},\qquad \lambda_1\alpha_1=\left(\frac{B'B+C'C}{EC-BF}\right)',
$$

$$
\lambda_1\beta=\frac{E'B+B'E+F'C+C'F}{EC-BF},
$$

$$
\lambda_1\beta_1=\left(\frac{E'B+B'E+F'C+C'F}{EC-BF}\right)', \tag{7-5-32}
$$

$$
\lambda_1\gamma=\frac{E'E+F'F}{EC-BF},\qquad \lambda_1\gamma_1=\left(\frac{E'E+F'F}{EC-BF}\right)',
$$

$$
\lambda_1\delta=BF-CE
$$

成立. 由此,我们必须有

$$
(\lambda_1\alpha)'=\lambda_1\alpha_1,\ (\lambda_1\beta)'=\lambda_1\beta_1,\ (\lambda_1\gamma)'=\lambda_1\gamma_1, \tag{7-5-33}
$$

即

$$
\frac{\alpha'-\alpha_1}{\alpha}=\frac{\beta'-\beta_1}{\beta}=\frac{\gamma'-\gamma_1}{\gamma}=-\frac{\lambda_1'}{\lambda_1}, \tag{7-5-34}
$$

并且对某常数 $k\neq 0$,

$$
\lambda_1=k\lambda=k\exp\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\alpha_1-\alpha'}{\alpha}\,d\phi. \tag{7-5-35}
$$

因此,我们得到

$$
\begin{aligned}
&BF'-CE=\lambda k\delta,\\
&\frac{1}{2}(B^2+C^2)'=-\lambda^2k^2\alpha\delta,\\
&\frac{1}{2}(E^2+F^2)'=-\lambda^2k^2\gamma\delta,\\
&(EB+CF)'=-\lambda^2k^2\beta\delta.
\end{aligned}
\tag{7-5-36}
$$

置

$$
\begin{aligned}
&L(\phi,\ K_1)=-2k^2\int_{\phi_0}^{\phi}\lambda^2\alpha\delta d\phi+K_1,\\
&M(\phi,\ K_2)=-k^2\int_{\phi_0}^{\phi}\lambda^2\beta\delta d\phi+K_2,\\
&N(\phi,\ K_3)=-2k^2\int_{\phi_0}^{\phi}\lambda^2\gamma\delta d\phi+K_3.
\end{aligned}
\tag{7-5-37}
$$

将(7-5-37)与(7-5-36)相比较，我们看到对于某些常数 $K_1,\ K_2,\ K_3$,

$$
\begin{aligned}
&B^2+C^2=L(\phi,\ K_1),\ EB+FC=M(\phi,\ K_2),\\
&E^2+F^2=N(\phi,\ K_3).
\end{aligned}
\tag{7-5-38}
$$

从初等的 Lagrange 恒等式，我们得出

$$
\lambda^2k^2\delta^2=L(\phi,\ K_1)N(\phi,\ K_3)-M^2(\phi,\ K_2).
\tag{7-5-39}
$$

因此，(7-5-34)、(7-5-39)是(7-5-31)容有0级的 $SO(3)$ 线性可积系统的必要条件．反之，如(7-5-34)、(7-5-39)满足，则从(7-5-38)，我们可解出 $B,\ C,\ E,\ F$．这样，(7-5-31)就可以写成(7-5-30)形式．综合上述，得到(见章末[9])：

定理 2 一个2阶偏微分方程容有0级的 $SO(3)$ 可积系统的充要条件为：(i)它具有形式(7-5-31)；(ii)(7-5-34)成立；(iii)存在常数 $K_1,\ K_2,\ K_3$ 及 $k\neq 0$ 使得(7-5-39)成立．

注意：从(7-5-38)解出 $(B,\ C,\ E,\ F)$ 不是唯一的，这是因为，如果我们将 $(B,\ C)$，$(E,\ F)$ 看作平面上的向量，则可知除转动外解是唯一确定的．这种不确定性并不影响方程(7-5-30)．

利用上面的定理，可讨论下面一些例子.

例 7 考察方程

$$\phi_{tt}-\phi_{xx}+S(t)=0 \tag{7-5-40}$$

何时容有 0 级的 $SO(3)$ 线性可积系统.

对于(7-5-40)，$\alpha=1$, $\gamma=-1$, $\beta=0$，方程(7-5-34)成立．我们可取 $\lambda=1$，则

$$L=-2k^2\int_{\phi_0}^{\phi}Sd\phi+K_1,$$

$$M=K_2,$$

$$N=2k^2\int_{\phi_0}^{\phi}Sd\phi+K_3,$$

置 $\int_{\phi_0}^{\phi}Sd\phi=H(\phi)$．方程(7-5-39)化为

$$k^2(H')^2=(-2k^2H+K_1)(2k^2H+K_3)-K_2^2,$$

最一般解为

$$S=a\sin(k\phi+b), \tag{7-5-41}$$

因此，(7-5-40)容有 0 级的 $SO(3)$ 线性可积系统当且仅当它具有 sine-Gordon 型.

例 8 对于方程

$$\phi_{tt}+\phi_{xx}+S(\phi)=0, \tag{7-5-42}$$

我们采取类似的步骤，可以得到 S 必具有形式:

(i) $S=ae^{l\phi}$;

(ii) $S=a\sinh(k\phi+b)$; (7-5-43)

(iii) $S=a\cosh(k\phi+b)$.

5.3 容许 $SO(2,1)$ 线性可积系统的非线性偏微分方程

现在讨论容有 $SO(2,1)$ 线性可积系统

$$\Phi_t=U\Phi,\ \Phi_x=V\Phi \tag{7-5-44}$$

的非线性偏微分方程

$$F(\phi,\phi_x,\phi_t,\phi_{xx},\phi_{xt},\phi_{tt},\cdots)=0. \tag{7-5-45}$$

(7-5-44)中 U, V 取值于李代数 $SO(2,1)$．由于我们从几何的观

点来考虑线性可积系统，这时 U, V 可采取下列两种类型：

情况(i)
$$U=\begin{pmatrix} 0 & C & B \\ -C & 0 & A \\ B & A & 0 \end{pmatrix},$$
$$V=\begin{pmatrix} 0 & F & E \\ -F & 0 & D \\ E & D & 0 \end{pmatrix}; \tag{7-5-46}$$

情况(ii)
$$U=\begin{pmatrix} 0 & C & B \\ C & 0 & A \\ B & -A & 0 \end{pmatrix},$$
$$V=\begin{pmatrix} 0 & F & E \\ F & 0 & D \\ E & -D & 0 \end{pmatrix}. \tag{7-5-47}$$

如取 $\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix}$ 的秩等于 1，我们得到定理 1 中情况(ii)的同样结果，在后面 5.4 段中我们将回到这个问题.

现在讨论 $\mathfrak{A}$ 的秩等于 2 的情况，对情况(i)，(7-5-1)的可积条件是 $S^{1,1}\subset R^{2,1}$ 的 Gauss 方程，而情况(ii)时，则为 $H^2\subset R^{2,1}$ 的 Gauss 方程．我们现作简单叙述：

情况(i) 设 $\{l, m, n\}$ 为 $R^{2,1}$ 的正交标架，且 $l^2=m^2=-n^2=1$．由于 $l^2=1$，$l(t, x)$ 可以解释为 $S^{1,1}$ 的一种参数表示．$m(t, x)$，$n(t, x)$ 为 $S^{1,1}$ 的切向量．(7-5-1)的可积条件为

$$\begin{aligned} &C_x-F_t-AE+BD=0, \\ &B_x-E_t+CD-AF=0, \\ &A_x-D_t+BF-CE=0. \end{aligned} \tag{7-5-48}$$

从(7-5-48)的前面两式解出 A, D，然后代入第三式就得出

$$\left(\frac{E_t-B_x}{EC-BF}B+\frac{C_x-F_t}{EC-BF}C\right)_x-\left(\frac{E_t-B_x}{EC-BF}E\right.$$

$$+\frac{C_x-F_t}{EC-BF}F\Big)_t+BF-CE=0,\tag{7-5-49}$$

这正是 $S^{1,1}$ 的 Gauss 方程.

情况(ii)　设正交标架$\{l, m, n\}$满足$-l^2=m^2=n^2=1$，$l^2=-1$ 为 $H^2\subset R^{2,1}$ 的方程. 这时，可积条件为

$$\begin{aligned}&C_x-F_t+AE-BD=0,\\&B_x-E_t+CD-AF=0,\\&A_x-D_t+CE-BF=0.\end{aligned}\tag{7-5-50}$$

从上述方程，我们得到 $H^2\subset R^{2,1}$ 的 Gauss 方程

$$\Big(\frac{E_t-B_x}{EC-BF}B+\frac{F_t-C_x}{EC-BF}C\Big)_x-\Big(\frac{E_t-B_x}{EC-BF}E$$
$$+\frac{F_t-C_x}{EC-BF}F\Big)_t+EC-BF=0,\tag{7-5-51}$$

因而，我们得到(见章末[9])：

定理3　容有 $SO(2, 1)$线性可积系统(其中 $EC-BF\neq0$) 的非线性偏微分方程是方程(7-5-49)或(7-5-51)，或是它们的支方程. 这里(7-5-49)与(7-5-51)分别是 $S^{1,1}\subset R^{2,1}$ 与 $H^2\subset R^{2,1}$ 的 Gauss 方程，B, C, E, F 是 ϕ 与 ϕ 到某阶为止的偏导数的任意给定的函数.

Sasaki 曾经从不同的角度给出了 R^3 中负常曲率曲面的Gauss方程与容有 $SL(2, R)$线性可积系统的关系(见章末[19]).

现在我们给出下面几个特例.

例9　令 $B=F=0$, $C=\cos\frac{\phi}{2}$, $E=\sin\frac{\phi}{2}$. 从(7-5-49)与(7-5-51)，我们分别得到

$$\phi_{xx}+\phi_{tt}+\sin\phi=0\tag{7-5-52}$$

及

$$\phi_{xx}-\phi_{tt}+\sin\phi=0.\tag{7-5-53}$$

例10　令 $B=F=0$, $C=E=e^{\phi}$, 就有

$$\phi_{xx}-\phi_{tt}-e^{2\phi}=0 \tag{7-5-54}$$

及

$$\phi_{xx}+\phi_{tt}-e^{2\phi}=0. \tag{7-5-55}$$

例 11 令 $B=F=0$, $C=\cosh\dfrac{\phi}{2}$, $E=\sinh\dfrac{\phi}{2}$, 我们有

$$\phi_{xx}-\phi_{tt}-\sinh\phi=0 \tag{7-5-56}$$

及

$$\phi_{xx}+\phi_{tt}-\sinh\phi=0. \tag{7-5-57}$$

(7-5-56)及(7-5-57)与 H^2, $S^{1,1}$ 之间的关系可参见[19], 我们在前面也已简单叙述过.

例 12 令

$$B=-2\phi_x,\quad C=-\phi_{xx}-2\phi^2-2\phi,$$
$$E=0,\quad F=\phi+1,$$

我们有

$$A=-\phi_{xx}-2\phi^2+2\phi+\frac{\phi_{xx}+2\phi^2+2\phi}{2\phi_x(\phi+1)}W,$$

$$D=\phi-1-\frac{1}{2\phi_x}W,$$

这里 $$W=\phi_t+6\phi\phi_x+\phi_{xxx}.$$

(7-5-49)可以写成

$$W+\left(-\frac{\phi_{xx}+2\phi^2+2\phi}{2\phi_x(\phi+1)}W\right)_x-\left(\frac{W}{2\phi_x}\right)_t=0,$$

因而 KdV 方程

$$\phi_t+6\phi\phi_x+\phi_{xxx}=0 \tag{7-5-58}$$

是 $S^{1,1}\subset R^{2,1}$ 的 Gauss 方程的支方程.

利用(7-5-11)(7-5-11)$^+$, 我们可取

$$A=-\phi_{xx}-2\phi^2+2\phi,\ D=\phi-1,$$

这样线性可积系统简化了, 而(7-5-49)本身成为 KdV 方程.

例 13 置 $E=\sin\phi$, $C=\sin\phi$, $B=\cos\phi$, $F=-\cos\phi$, 方程(7-5-49)成为

$$(\sin 2\phi)\phi_{xx}+2(\cos 2\phi)\phi_{tx}-(\sin 2\phi)\phi_{tt}+2(\cos 2\phi)\phi_x^2$$

$$-4(\sin 2\phi)\phi_x\phi_t-2(\cos 2\phi)\phi_t^2-1=0. \tag{7-5-59}$$

注意：由于李代数 $so(2,1)$ 与 $sl(2,R)$ 同构，因而一个非线性偏微分方程容有 $SO(2,1)$ 线性可积系统等价于这个方程容有 $SL(2,R)$ 线性可积系统。我们已知许多方程（例如KdV 方程，MKdV 方程等）的 $SL(2,R)$ 线性可积系统。因此，定理 3 推出：KdV 方程、MKdV 方程等都是 $R^{2,1}$ 中曲面 $S^{1,1}$ 或曲面 H^2 的 Gauss 方程。

现在再来考察下述问题：一个给定的 2 阶偏微分方程何时容有 $SO(2,1)$ 线性可积系统，且其中 B, C, E, F 只依赖于 ϕ? 我们从(7-5-49)和(7-5-51)出发经过类似于前面的讨论，得到了下述结果（见章末[9]）。

定理 4　方程(7-5-31)容有 $SO(2,1)$ 线性可积系统，且其中 B, C, E, F 仅依赖于 ϕ 的充要条件是：

(i)　(7-5-34)成立；

(ii)　存在常数 K_1, K_2, K_3 及 $k\neq 0$ 使得

(a)　$$\lambda^2k^2\delta^2=-L(\phi,K_1)N(\phi,K_3)+M^2(\phi,K_2), \tag{7-5-60}$$

这里 L, M, N 由(7-5-37)所定义；或

(b)　$$\lambda^2k^2\delta^2=L_1(\phi,K_1)N_1(\phi,K_3)-M_1^2(\phi,K_2), \tag{7-5-61}$$

其中

$$\begin{aligned}L_1(\phi,K_1)&=2k^2\int_{\phi_0}^{\phi}\lambda^2\alpha\delta d\phi+K_1,\\ M_1(\phi,K_2)&=k^2\int_{\phi_0}^{\phi}\lambda^2\beta\delta d\phi+K_2,\\ N_1(\phi,K_3)&=2k^2\int_{\phi_0}^{\phi}\lambda^2\gamma\delta d\phi+K_3.\end{aligned} \tag{7-5-62}$$

5.4　进一步结果

1. 容有 $SO(3)$ 的线性可积系统偏微分方程的守恒律

设非线性偏微分方程

$$\mathfrak{F}(\phi,\ \phi_x,\ \phi_t,\ \phi_{xx},\ \phi_{xt},\ \phi_{tt},\ \cdots)=0, \tag{7-5-2}$$

容有线性可积系统

$$\Phi_t=U\Phi,\ \Phi_x=V\Phi, \tag{7-5-1}$$

其中 U, V 属于某一线性群 G 的李代数 g. 置

$$\tilde{\Phi}=S\Phi \quad (S\text{ 取值于 }G), \tag{7-5-63}$$

我们得到线性可积系统(7-5-1)的一个规范变换

$$\tilde{\Phi}_t=\tilde{U}\tilde{\Phi},\ \tilde{\Phi}_x=\tilde{V}\tilde{\Phi}, \tag{7-5-64}$$

其中

$$\tilde{U}=SUS^{-1}-(\partial_t S)S^{-1},\ \tilde{V}=SVS^{-1}-(\partial_x S)S^{-1}. \tag{7-5-65}$$

如所知, (7-5-2)在规范变换下不变. 利用规范变换, 可以把化约的线性可积系统变为不可化约的线性可积系统. 我们已看到对于一个一般的守恒律

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial x}=0, \tag{7-5-66}$$

它容有一个 $U(1)$ 线性可积系统

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}=-N\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x}=M\Psi. \tag{7-5-67}$$

它也可以写成下述的 $SL(2, R)$ 群的化约的线性可积系统

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\begin{pmatrix}-N & 0\\ 0 & -N\end{pmatrix}\Phi, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x}=\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & M\end{pmatrix}\Phi. \tag{7-5-68}$$

例如, 我们取

$$S=\begin{pmatrix}\phi & \phi+1\\ \phi-1 & \phi\end{pmatrix}, \qquad S^{-1}=\begin{pmatrix}\phi & -(1+\phi)\\ 1-\phi & \phi\end{pmatrix}, \tag{7-5-69}$$

就有

$$\tilde{U}=\begin{pmatrix}-2\phi N+\phi_t & (2\phi+1)N-\phi_t\\ (1-2\phi)N+\phi_t & 2\phi N-\phi_t\end{pmatrix},$$

$$\tilde{V}=\begin{pmatrix} 2\phi M+\phi_x & -(2\phi+1)M-\phi_x \\ (2\phi-1)M+\phi_x & -2\phi M-\phi_x \end{pmatrix}. \qquad (7\text{-}5\text{-}70)$$

显然，它是不可约的. 因此，每个守恒律必容许一个 $SO(2,1)$ (或 $SO(3)$) 线性可积系统，并且可以看作 $S^{1,1}$, H^2 (或 S^2) 的 Gauss 方程或其支方程.

将§2中定理1、定理3与现在的结果结合起来，我们得到(见章末[9])：

定理5 如果一非线性偏微分方程容有 $SO(3)$ (或 $SO(2,1)$) 的线性可积系统，则这个方程必可写为 $S^2\subset R^3$ (或 $H^2\subset R^{2,1}$, $S^{1,1}\subset R^{2,1}$) 的 Gauss 方程或其支方程.

2. 构造容有 $SO(3,C)$ 或 $SL(2,C)$ 群的线性可积系统

本节5.2、5.3段中的方法对构造出容有 $SO(3,C)$ (或等价地 $SL(2,C)$) 群的线性可积系统同样是有效的.

例如，令

$$A=i(\phi_x+\overline{\phi}_x),\ B=2i\phi\overline{\phi},\ C=i(\phi_x-\overline{\phi}_x),$$
$$D=\phi-\overline{\phi},\ E=0,\ F=\phi+\overline{\phi}.$$

从(7-5-48)我们得到

$$-\phi_t-\overline{\phi}_t+i(\phi_{xx}-\overline{\phi}_{xx})+2i|\phi|^2(\phi-\overline{\phi})=0,$$
$$-\phi_t+\overline{\phi}_t+i(\phi_{xx}+\overline{\phi}_{xx})+2i|\phi|^2(\phi+\overline{\phi})=0.$$

这是 Cubic Schrodinger 方程

$$i\phi_t+\phi_{xx}+2|\phi|^2\phi=0. \qquad (7\text{-}5\text{-}71)$$

3. 构造容有 $SO(3)$ (或 $SO(2,1)$) 线性可积系统偏微分方程组的一般方法

如果从方程 (7-5-5) (或(7-5-48)、(7-5-50)) 中解出 A, B, C, D, E, F 中的一个，例如 A，然后将它代入另外两个方程，并令 B, C, D, E, F 为 u, v 及其到某阶为止的偏导数的函数，则我们得到一个包含两个方程的方程组，它具有两个未知函数，且容有 $SO(3)$ (或 $SO(2,1)$) 线性可积系统. 这提供了一个构造出容

有 $SO(3)$（或 $SO(2,1)$）线性可积系统的偏微分方程组的一个一般方法．我们在这里介绍下述结果，而不予证明（见章末[9]）．

设 $h_{ab}(u,v)$ $(a,b=1,2)$ 是解析函数，Ω 是 R^2 中一个开集，则对于 $(u,v)\in\Omega$，方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=h_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+h_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=h_{21}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+h_{22}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{7-5-72}$$

容有 $SO(3)$（或 $SL(2,R)$）线性可积系统．

从上述结果可以推出：所有由两个守恒律方程所构成的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1(u,v)}{\partial t}+\dfrac{\partial g_1(u,v)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f_2(u,v)}{\partial t}+\dfrac{\partial g_2(u,v)}{\partial x}=0\end{cases}\quad\left(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\neq0\right)\tag{7-5-73}$$

局部地均容有线性可积系统．

特别，1+1 维气体等熵流方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial p(\rho)}{\partial x}=0,\end{cases}\tag{7-5-74}$$

及 2 维气体稳态等熵流方程

$$\begin{cases}V_x-u_y=0\\ (\rho u)_x+(\rho v)_y=0\end{cases}\quad\rho=\rho(u,v),\tag{7-5-75}$$

R^3 中极小曲面的微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,\end{cases}\tag{7-5-76}$$

可以写成方程(7-5-72)．由§3定理2可知，在未知函数的某个区域中，这些方程组都容有$SO(3)$或$SL(2, R)$线性可积系统．

此外，我们可以利用规范变换使得线性可积系统中引进参数λ．例如在$SL(2, R)$情形，我们可以取

$$S=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda \end{pmatrix},$$

容易看到，这时$\widetilde{U}$，$\widetilde{V}$是λ的2次多项式．

§6　孤立子曲面

在孤立子理论中，线性系统

$$\Phi_x=U\Phi,\ \Phi_t=V\Phi \tag{7-6-1}$$

中的U，V不仅依赖于相应偏微分方程的未知函数及其导数，而且还依赖于一个参数λ，这一点，已如前面几章所见到的，对于孤立子理论是非常重要的．对于这种带参数的可积系统，Sym(见章末[20][21])提出孤立子曲面的概念．在本节中我们以群$SU(2)$的情况为例来说明，这时孤立子曲面是三维欧氏空间中的二维曲面．一般情况，当群依赖于参数r时，孤立子曲面照样可以定义，它们是r维欧氏空间或拟欧空间中的二维曲面．

设$U=U(\phi, \phi_x, \phi_t, \cdots, \lambda)$，$V=V(\phi, \phi_x, \phi_{tx}, \cdots, \lambda)$在$\lambda$为实值时都取值于$SU(2)$的李代数$su(2)$．(7-6-1)的可积条件为

$$U_t-V_x+[U, V]=0. \tag{7-6-2}$$

假定它决定一个不依赖于λ的非线性偏微分方程(或方程组)．如果$\phi(x, t)$是(7-6-2)的一个解，据此ϕ，可以积分(7-6-1)得到Φ，我们可采用取值于$SU(2)$的Φ(因为U，V属于$su(2)$，只要Φ在某点的值(初始值)属于$SU(2)$，它就会属于$SU(2)$)，这种Φ一般是依赖于参数λ的，故记为$\Phi(\lambda)$．

如所知，$SU(2)$的李代数$su(2)$是一个3维的线性空间，其上有Cartan内积

$$(X, Y)=\frac{1}{2}T_r(X^*Y) \quad (X, Y\in su(2)),$$

是一个正定的双线性型，使得$su(2)$具有3维欧氏空间的结构.

令

$$P(t, x, \lambda)=\Phi^{-1}\Phi_\lambda \tag{7-6-3}$$

对于确定的λ，P定义了(t, x)平面（或它的一个区域）到$su(2)$的一个映照，一般来说，它是一个曲面，Sym称之为孤立子曲面. 当λ变动时，就得到一系孤立子曲面. 我们在此将介绍Sym所得到的一些主要结果.

对于(7-6-2)的同一个解ϕ，(7-6-1)如果有另外一解$\Psi(\lambda)$，那末由于方程(7-6-1)是线性的，$\Phi(\lambda)$必能写成为

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)\chi(\lambda) \tag{7-6-4}$$

的形状，$\chi(\lambda)$和(t, x)无关，仅为λ的函数. 由于我们要求$\Psi(\lambda)$取值于$SU(2)$，所以$\chi(\lambda)\in SU(2)$，且有

$$\Psi^{-1}\Psi_\lambda=\chi^{-1}(\lambda)\Phi^{-1}\Phi_\lambda\chi(\lambda)+\chi^{-1}(\lambda)\chi_\lambda(\lambda), \tag{7-6-5}$$

所以如令

$$P'(t, x, \lambda)=\Psi^{-1}\Psi_\lambda, \tag{7-6-6}$$

那末从(7-6-5)可见，P到P'的变换是一个转动（它由$\chi^{-1}(\lambda)\Phi^{-1}\Phi_\lambda\chi(\lambda)$表示）和一个移动（由$\chi^{-1}(\lambda)\chi_\lambda(\lambda)$表示）所构成. 因此，这两系曲面中相应于同一个$\lambda$值的两个曲面都只差一个刚性运动. 从而，孤立子曲面的几何性质只和解的选取以及λ的值有关，而与Φ的选取无关. 因而，对于(7-6-2)的一个解及一个确定的λ，唯一地确定一个孤立子曲面（除运动之外）.

定理 方程(7-6-2)与孤立子曲面$P(t,x,\lambda)$的Gauss-Codazzi方程相等价.

证明 采用外微分记号，(7-6-1)可记为

$$d\Phi=\Omega\Phi \quad (\Omega=Udx+Vdt). \tag{7-6-7}$$

(7-6-2) 可记为

$$d\Omega-\Omega\wedge\Omega=0, \tag{7-6-8}$$

微分(7-6-3)式(λ 视为常数)，得到

$$dP=-\Phi^{-1}d\Phi\Phi^{-1}\Phi_\lambda+\Phi^{-1}d\Phi_\lambda-\Phi^{-1}\Omega_\lambda\Phi, \tag{7-6-9}$$

这里

$$\Omega_\lambda=U_\lambda dx+V_\lambda dt, \tag{7-6-10}$$

因此

$$P_x=\Phi^{-1}U_\lambda\Phi,\ P_t=\Phi^{-1}V_\lambda\Phi. \tag{7-6-11}$$

我们在本章 § 1 中已指出 Gauss-Codazzi 方程即为 $d^2P_x=0, d^2P_t=0$，现由(7-6-11)可得

$$dP_x=\Phi^{-1}\Omega U_\lambda\Phi+\Phi^{-1}dU_\lambda\Phi+\Phi^{-1}U_\lambda\Omega\Phi,$$

$$\begin{aligned}d^2P_x=&\Phi^{-1}\Omega\wedge\Omega U_\lambda\Phi-\Phi^{-1}d\Omega U_\lambda\Phi+\Phi^{-1}\Omega\wedge dU_\lambda\Phi\\&+\Phi^{-1}\Omega U_\lambda\wedge\Omega\Phi-\Phi^{-1}\Omega\wedge dU_\lambda\Phi-\Phi^{-1}dU_\lambda\wedge\Omega\Phi\\&-\Phi^{-1}\Omega\wedge U_\lambda\Omega\Phi+\Phi^{-1}dU_\lambda\wedge\Omega\Phi+\Phi^{-1}U_\lambda d\Omega\Phi\\&-\Phi^{-1}U_\lambda\Omega\wedge\Omega\Phi\\=&\Phi^{-1}[U_\lambda,\ d\Omega-\Omega\wedge\Omega]\Phi,\end{aligned} \tag{7-6-12}$$

$$d^2P_t=\Phi^{-1}[V_\lambda,\ d\Omega-\Omega\wedge\Omega]\Phi, \tag{7-6-13}$$

所以当(7-6-2)成立时，Gauss-Codazzi 方程成立．相反地，如果已知 Gauss-Codazzi 方程成立，则由曲面基本定理得知 $P=P(t, x, \lambda)$ 表示曲面，且 P_x 与 P_t 为不同方向，因而 U_λ 与 V_λ 也不成比例．但是，另一方面，由(7-6-12)，(7-6-13)可知，

$$[U_\lambda,\ d\Omega-\Omega\wedge\Omega]=0,$$

$$[V_\lambda,\ d\Omega-\Omega\wedge\Omega]=0,$$

因此

$$d\Omega-\Omega\wedge\Omega=\alpha U_\lambda,$$

$$d\Omega-\Omega\wedge\Omega=\beta V_\lambda.$$

但因 U_λ, V_λ 不成比例，从上面两式可推出 $d\Omega-\Omega\wedge\Omega=0$．这就证明了(7-6-2)与 Gauss-Codazzi 方程是等价的．证毕．

孤立子曲面有一系列有兴趣的几何性质．我们着重讨论下述情况．如

$$U=i\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}0 & q\\ q & 0\end{bmatrix}, \tag{7-6-14}$$

$$V=a(\lambda)\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}+b(\lambda)\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}+c(\lambda)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \tag{7-6-15}$$

式中 a, b, c 为 λ 的多项式，其系数是 q 的微分多项式．例如，$a(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots$，$a_0$, a_1, a_2, $\cdots$ 为 q 与 q 关于 x 到某阶导数的多项式，q 是实未知函数．为使可积条件成立，可以知道 $b(\lambda)$ 和 $c(\lambda)$ 关于 λ 只是奇次的，$a(\lambda)$ 关于 λ 只是偶次的．在 $\lambda=0$ 时，

$$U_\lambda=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix},\quad V_\lambda=b_\lambda(0)\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}+c_\lambda(0)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \tag{7-6-16}$$

$$U=i\begin{bmatrix}0 & q\\ q & 0\end{bmatrix},\quad V=a(0)\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}. \tag{7-6-17}$$

因而 U, V 属于由 $\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ 所张成的子代数中，于是 Φ 的值属于由 $\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ 所生成的子群 G_1，$\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ 在 G_1 的伴随变换下是不变的．并且 $\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 所张成的平面和 $\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ 是垂直的，所以在群 G_1 的伴随变换下也是不变的．由(7-6-11)可见，P_t, P_x 所成平面由 $\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 所张成．因此，孤立子曲面上任何点的切平面是一致的，从而得到：

(1) 当 $\lambda=0$ 时，系统(7-6-14)、(7-6-15)所相应的任何解的

孤立子曲面均为平面.

此外还成立:

(2) $P(t_0, x, 0)$ 构成这张平面上的 x- 坐标曲线, 且 x 是曲线的弧长参数.

事实上, $$P_x = \Phi^{-1} U_\lambda \Phi = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \Phi,$$

所以 $$|P_x|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

(3) q 的几何意义是: $q = -\frac{\chi}{2}$, 这里 χ 是 x- 坐标曲线的曲率.

这是因为, 平面上 x- 坐标曲线的单位法向量为

$$N = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Phi,$$

$$P_{xx} = -\Phi^{-1} U \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \Phi + \Phi^{-1} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} U \Phi$$

$$= -\Phi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2q \\ 2q & 0 \end{bmatrix} \Phi,$$

$$\chi = P_{xx} \cdot N = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{bmatrix} -2q & 0 \\ 0 & -2q \end{bmatrix} = -2q.$$

(4) 第一守恒律

$$\int_{-\infty}^{\infty} q dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi dx = -\frac{1}{2} \quad (\text{坐标曲线的转角}). \tag{7-6-18}$$

(5) 当 q 为纯孤立子解时, 第一守恒律 $\int_{-\infty}^{+\infty} q dx$ 还可以用孤立子个数的代数和表示

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q dx = \text{孤立子个数的代数和}.$$

其中，所谓孤立子个数的正负是指在散射数据中的比例因子的正负.

在 Sym 的一系列工作中，还列举了孤立子曲面的若干例子及其几何解释，这里我们就不一一介绍了.

利用孤立子曲面，可以讨论属于同一群的两个孤立子系统的等价性.

这里一个孤立子系统 K_1，是指方程

$$\Phi_{1x}=U\Phi_1,\ \Phi_{1t}=V\Phi_1$$

及其可积条件

$$U_x-V_t+[U,V]=0.$$

孤立子系统 K_1 经过规范变换

$$\Phi_1\to\Phi_2=S\Phi_1 \tag{7-6-19}$$

（这里 S 取值于 K_1 的群，且与 λ 无关）后，成立

$$\Phi_1^{-1}\Phi_{1\lambda}=\Phi_2^{-1}\Phi_{2\lambda}=T(t,x,\lambda). \tag{7-6-20}$$

所以孤立子曲面族在规范变换下不会变，再经过自变数变换：$(t,x)\to(t',x')$，孤立子曲面族也不会变，只是参数表示有所改变.

两个孤立子系统 K_1 与 K_2 如果经过这两种变换（规范变换和自变数变换）能互相变换，则称这两个孤立子系统 K_1 与 K_2 是等价的. 等价的孤立子系统有相同的孤立子曲面族. 相反地，如两个孤立子系统 K_1，K_2 有相同的孤立子曲面族，则 K_1，K_2 是等价的. 事实上，这时可选择坐标使 (7-6-20) 成立，由于 Φ_1，Φ_2 都是 (7-6-1) 的解，我们有 $\Phi_1=S\Phi_2$. 现在来证明 S 与 λ 无关，这因为

$$\Phi_{1\lambda}=S_\lambda\Phi_2+S\Phi_{2\lambda},$$

由 (7-6-20)，这就是

$$\Phi_1T=S_\lambda\Phi_2+S\Phi_2T,$$

因此得到
$$S_\lambda\Phi_2=0.$$

但 $\det\Phi_2\neq0$，这就得出，$S_\lambda=0$，S 与 λ 无关.

(7-5-20) 式也可以用两者的第一基本形式与第二基本形式相

等来代替，用了这个概念，可以证明下述系统(T. Shimizu 及 M. Wadati)

$$i\frac{dq}{dt}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}}\right)=0 \tag{7-6-21}$$

及其对应的线性方程组

$$\Phi_x=\begin{pmatrix}-i\lambda & \lambda q\\ \lambda q^* & i\lambda\end{pmatrix}\Phi,\qquad \Phi_t=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}\Phi. \tag{7-6-22}$$

式中

$$A=\left(\frac{-2i}{\phi}\right)\lambda^2,\qquad B=\left(\frac{2q}{\phi}\right)\lambda^2+i\left(\frac{q}{\phi}\right)_x\lambda, \tag{7-6-23}$$

且
$$\phi=\sqrt{1+|q|^2},\quad C=-B^*$$

和非线性 Schrödinger 方程所相应的系统相等价.

参 考 文 献

[1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell & H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 125~127.

[2] A. V. Bäcklund, Concerning surfaces with constant negative curvature, Lunds Universitets Arsskrift 19(1983), Tranlated by E. M. Coddington of New York.

[3] S. S. Chern(陈省身), Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation, Annals Polinci Math 39(1981), 63~69.

[4] J. Eells & L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps CBMF Regional Conference Series of the NSF, 1980, another report on harmonic maps, Bulletin of the london math. Soc. 20 (1988), 385—524.

[5] L. P. Eisenhart, A Treatise on the Differential Geometry of curves and surfaces, 1909.

[6] C.H. Gu, On the cauchy problem for harmonic map defined on two dimensional minkowski space, Commun. on pure and applied math 33 (1980), 727~737.

[7] C.H.Gu,Harmonic maps of manifolds with indefinite metric, Proc.of DD 3 (1982).

[8] C.H.Gu,On the harmonic maps from $R^{1,1}$ to $S^{1,1}$ Crelle Jour, 346 (1984), 101~109.

[9] C. H. Gu, & H. S. Hu (胡和生), On the determination of nonlinear PDE admitting integrable system, Scientia Sinica (Science in China) Series A (1986), 704~719.

[10] C. H. Gu, On the motion of a string in a curved space-time, Proc. of 1982 Grossmann Symposium, 139~142.

[11] H. S. Hu , Sine-Laplace equation, Sinh-Laplace equation and harmonic maps, manuscripta math, 40(1982), 205~216.

[12] H. S. Hu, The construction of hyperbolic surfaces in 3-dimensional minkowski space and sinh-Laplace equation, Acta mathematica Sinica (1985), 79~86.

[13] H. S. Hu, Some nonexistence theorems for massive Yang-mills fields and harmonic maps, Springer Lecture Notes in Physics, 212(1984), 107~116.

[14] H. S. Hu, Some non-linear PDE'S and harmonic maps, in Géometrie Symplectique et mécanique(198?), 76~85, Hermann, Editeurs des

Sciences et des Arts Paris.

[15] H. S. Hu, Nonexistence theorems for Yang-mills fields and harmonic maps in the Schwarzschild spacetime(I), Letters in mattematical Physics 14(1987), 253～262.

[16] H. S. Hu, & S. Y. Wu (吴思晔), 同上题目 (II), Letters in mattematical Physics, 14(1987), 343～351.

[17] H. S. Hu, A nonexistence theorem for harmonic maps with slowly divergent energy, Chinese Annals of math, 5B(1984), 737～740.

[18] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian system and interaction through quadratic constraints, Commun. Math. Phys. 46(1976), 207～221.

[19] R. Sasaki, Nucl. Phys., B154(1979), 343～357.

[20] A. Sym, Soliton Surface I, II, III, IV, V, VI, Letters Al Nuovo Cimento, 33(1982), 394～400, 36(1983), 307～312, 39(1984), 193～196, 40(1984), 225～231, 41(1984), 33～40, 41(1984), 353～360.

[21] A. Sym, M. Bruschi, D. Levi and O. Ragnisco, Soliton surface VII Letters Al Nuovo Cimento, 44(1985), 529～536.

[22] K. Tenenblat & C. L. Terng (滕楚莲), Ann. math, 111(1980), 477～490.

[23] C. L. Terng, A higher dimension generalization of the sine-Gordon equations and its soliton theory, Ann. math. 111(1980), 491～510.

[24] G. Z. Tu(屠规彰), 孤立子数学理论的若干方面, 中国数学会第四次代表大会报告(武汉), 1983.

第八章

非线性波的数值研究

郭本瑜

1965年，Zabusky, Kruskal 应用数值方法发现了 Korteweg-de Vries 方程解的重要性质，从而开辟了孤立子研究的新时代. 二十多年以来，这方面已成果累累. 首先，孤立子的理论工作取得了重大成就，例如可见 Jeffrey, Kakutani (1972年), Scott, Chu, Mclaughin(1973年), Lax(1976年), Miura(1976年), Bullough, Caudrey (1980年), Ablowitz, Segur (1981年), Dodd, Eilbec, Gibbon, Morris(1982年)和 Newell(1985年)等人的专著. 其次，非线性波动方程的数值解法也迅猛发展起来，成为计算数学中一个重要而且十分活跃的领域. 目前所应用的数值方法大致可归纳为三大类. 第一类方法是差分方法, Zabusky, Kruskal(1965年)就是应用二阶精度的 Leap-frog 格式计算 Korteweg-de Vries 方程的. 以后, Vliegenthart(1971年), Greig, Morris(1976年)和郭本瑜(1976年)分别提出了耗散格式, Hopscotch 格式和二次守恒格式. Strauss, Vazquez(1978年)和 Perring, Skyrme(1962年)则较早地应用差分方法计算了 Klein-Gordon 方程和 sine-Gordon 方程. 第二类方法是有限元方法, Wahlbin(1974年)提出了计算 Korteweg-de Vries 方程的耗散有限元格式. 接着, Sanz-Serna, Christie(1981年)构造了 Petrov-Galerkin 格式，而 Mitchell,

Schoombie(1981 年)应用位移函数构造了另一类有限元格式. 第三类方法是谱方法和拟谱方法. Gazdag(1973 年), Tappert(1974 年), Canosa, Gazdag (1974 年), Shamel, Elsässer (1976 年), Watanobe, Ohishi, Tanaca(1977年), Fornberg, Whitham(1978 年), Abe, Inoue(1980年)和郭本瑜(1985 年)等都提出了各种计算 Korteweg-de Vries 方程的谱格式. 最近, Ma Heping, Guo Benyu(1986 年)还提出了一类带有限制算子的拟谱格式. 此外, 人们不断地进行各种数值试验, 研究非线性波动方程的种种性质, 例如 Bishop, Krumhansland, Trullinger (1980 年) 对 sine-Gordon 方程初、边值问题进行数值研究. 最近, Chu, Xiang, Baransky(1983 年)和 Guo Benyu, Weideman(1985 年)的数值结果表明, Korteweg-de Vries 方程的某些初、边值问题也具有孤波解. Kaup, Hansen (1985 年)和 Guo Benyu, Yan Xiaopu (1986 年)还分别对非线性 Schrödinger 方程和 sine-Gordon 方程的某些初、边值问题进行了数值研究, 发现了类似的性质.

在本章中, 将介绍一些主要的数值方法和有关的数值研究结果.

§1 Korteweg-de Vries 方程的差分解法

考虑 Korteweg de-Vries 方程的下列周期解问题,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, & x\in \boldsymbol{R}, \quad t>0, \\ u(x+1,\ t)=u(x,\ t), & x\in \boldsymbol{R}, \quad t\geqslant 0, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{8-1-1}$$

记 $I=(0,\ 1)$. N 是任意正整数, 变量 x 的网格步长 $h=\dfrac{1}{N-1}$. I_h 表示离散点集 $\{x\,|\,x=jh,\ 1\leqslant j\leqslant N-1\}$, 其闭包 $\bar{I}_h$

$=I_h\cup\{0\}\cup\{1\}$. 又用 τ 表示变量 t 的网格步长, $S_\tau=\{t|t=0,\ \tau,\ 2\tau,\ \cdots\}$, $\mathring{S}_\tau=S_\tau/\{0\}$. 我们采用下列差商记号:

$$v_x(x,t)=\frac{1}{h}(v(x+h,\ t)-v(x,\ t)),$$

$$v_{\bar{x}}(x,\ t)=v_x(x-h,\ t),$$

$$v_{\hat{x}}(x,\ t)=\frac{1}{2}(v_x(x,\ t)+v_{\bar{x}}(x,\ t)),$$

$$v_{x\bar{x}}(x,t)=\frac{1}{h^2}(v(x+h,\ t)-2v(x,\ t)+v(x-h,\ t)).$$

类似地, 定义 $v_t(x,\ t)$, $v_{\bar{t}}(x,\ t)$, $v_{\hat{t}}(x,\ t)$, 和 $v_{tt}(x,\ t)$等.

又定义下列离散内积和范数:

$$(v(t),\ w(t))_h=h\sum_{x\in I_h}v(x,\ t)w(x,\ t),$$

$$\|v(t)\|_h^2=(v(t),\ v(t))_h,$$

$$\|v(t)\|_{l^p,h}^p=h\sum_{x\in I_h}|v(x,\ t)|^p,$$

$$|v(t)|_{1,h}^2=\frac{1}{2}(\|v_x(t)\|_h^2+\|v_{\bar{x}}(t)\|_h^2).$$

构造差分格式的最简单方法是用差商直接替代相应的导数. 因为可以用不同的差商逼近同一个导数, 所以可以用不同的差分格式来逼近同一个偏微分方程的定解问题. 例如设 $u(x,t)$的近似解为 $u^h(x,\ t)$, 则可用下列格式计算(8-1-1):

$$\begin{cases}u_t^h(x,\ t)+u^h(x,\ t)u_{\hat{x}}^h(x,\ t)+u_{x\bar{x}\hat{x}}^h(x,\ t)=0, & x\in I_h,\ t\in S_\tau,\\ u^h(x+1,\ t)=u^h(x,\ t), & x\in \bar{I}_h,\ t\in S_\tau,\\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \bar{I}_h.\end{cases}$$

(8-1-2)

如果 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 和 $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^5}$ 是连续的, 那末格式(8-1-2)对(8-1-1)的逼近误差为 $O(\tau+h^2)$. 显然, 逼近精度不仅与所选择的格式有关, 而且与 u 的光滑程度有关. 若 u 相当光滑, 则可构造种种高精度的差分格式.

逼近精度高的差分格式不一定就能给出好的数值解，因为一个合理的差分格式还必须保持原问题的某些性质，所以，人们经常从物理定律出发构造合理的格式. Scott, Chu, Mclaughlin 指出运动的稳定性与守恒律有关. Lax 则指出问题 (8-1-1) 的解满足无限多个守恒律，例如前三个守恒律为

$$\int_0^1 u(x,\ t)\,dx=c_1, \tag{8-1-3}$$

$$\int_0^1 u^2(x,\ t)\,dx=c_2, \tag{8-1-4}$$

$$\int_0^1\left(u^3(x,t)-3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)\right)^2\right)dx=c_3, \tag{8-1-5}$$

其中 c_l 为与 $u_0(x)$ 有关的常数. 当然，我们希望设计一个差分格式，使得它的解满足相应的离散守恒律. 然而，一般很难模拟全部守恒律，故只能选择其中若干个.

如果要模拟(8-1-3)，则可应用下列格式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^h}{\partial t}(x,\ t)+F^h_{\hat{x}}(x,\ t)+u^h_{\bar{x}x\hat{x}}(x,\ t)=0, & x\in I_h,\ t>0,\\ u^h(x+1,\ t)=u^h(x,\ t), & x\in \bar{I}_h,\ t\geqslant 0,\\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \bar{I}_h,\end{cases} \tag{8-1-6}$$

其中 $F^h(x,\ t)=\dfrac{1}{2}[u^h(x,\ t)]^2$. 不难验证，上述格式的解满足与 (8-1-3)相类似的离散守恒律，即

$$h\sum_{x\in I_h}u^h(x,\ t)=c_4. \tag{8-1-7}$$

当具体计算时，还必须把 $\dfrac{\partial u^h}{\partial t}(x,\ t)$ 离散化，例如

$$\begin{aligned}u^h_t(x,\ t)&+\sigma F^h_{\hat{x}}(x,\ t+\tau)+(1-\sigma)F^h_{\hat{x}}(x,\ t)\\&+\sigma u^h_{\bar{x}x\hat{x}}(x,\ t+\tau)+(1-\sigma)u^h_{\bar{x}x\hat{x}}(x,\ t)=0,\\&x\in I_h,\ t\in S_\tau,\end{aligned} \tag{8-1-8}$$

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$. 当 $\sigma=0$ 时，(8-1-8) 是显式格式. 当 $\sigma\neq 0$ 时，

(8-1-8)是隐式格式. 后者计算稳定,但对每一时刻 $t\in \mathring{S}_\tau$, 都必须应用迭代法才能得到所需要的解. 为了既省工作量而又计算比较稳定, Greig, Morris提出了 Hopscotch 格式, 即

$$\sigma=\begin{cases}0, \text{ 若 } j+\left[\dfrac{t}{\tau}\right]\text{为偶数,}\\ 1, \text{ 否则.}\end{cases}$$

Vliegenthart则采用下列带有耗散项的格式

$$u_t^h(x,\ t)+F_{\hat{x}}^h(x,\ t)+u_{x\bar{x}\hat{x}}^h(x,\ t)-\frac{h^2}{2\tau}u_{x\bar{x}}^h(x,\ t)=0,$$

$$x\in I_h,\ t\in S_\tau.$$

为了同时模拟守恒律(8-1-3)和(8-1-4), 我们定义

$$J(v,\ \varphi)=\frac{1}{3}\varphi v_{\hat{x}}+\frac{1}{3}(\varphi v)_{\hat{x}}.$$

计算(8-1-1)的二次守恒格式是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^h}{\partial t}(x,\ t)+J(u^h(x,\ t),\ u^h(x,\ t))\\ \quad +u_{x\bar{x}\hat{x}}^h(x,\ t)=0, & x\in I_h,\ t>0,\\ u^h(x+1,\ t)=u^h(x,\ t), & x\in \bar{I}_h,\ t\geqslant 0,\\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \bar{I}_h.\end{cases}\tag{8-1-9}$$

它的解满足守恒律(8-1-7). 另一方面, $J(v,\ \varphi)$是反对称算子, 即可由 Abel 公式得到

$$(J(v,\ \varphi),\ w)_h+(J(w,\ \varphi),\ v)_h=0.\tag{8-1-10}$$

用 $u^h(x,\ t)$乘(8-1-9)的第一式并求内积, 就得到 $\|u^h(t)\|_h^2=\|u_0\|_h^2$, 因此格式(8-1-9)的解同时满足两个离散守恒律.

在具体计算时, 可把(8-1-9)离散化为

$$\begin{cases}u_t^h(x,t)+J(u^h(x,\ t)+\sigma\tau u_t^h(x,\ t),\ u^h(x,\ t))\\ \quad +u_{x\bar{x}\hat{x}}^h(x,\ t)+\sigma\tau u_{tx\bar{x}\hat{x}}^h(x,\ t)=0, & x\in I_h,\ t\in S_\tau,\\ u^h(x+1,t)=u^h(x,\ t), & x\in \bar{I}_h,\ t\in S_\tau,\\ u^h(x,0)=u_0(x), & x\in \bar{I}_h.\end{cases}\tag{8-1-11}$$

不难由(8-1-10)得到

$$\|u^h(t+\tau)\|_h^2=\|u^h(t)\|_h^2+\tau(1-2\sigma)\|u_t^h(t)\|_h^2.$$

显然，当 $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$\|u^h(t)\|_h^2\leqslant\|u_0\|_h^2$，故抑制了计算不稳定性．特别当 $\sigma=\frac{1}{2}$ 时，$\|u^h(t)\|_h^2=\|u_0\|_h^2$，且逼近误差为 $O(\tau^2+h^4)$．

为了提高计算精度，常采用多层格式．例如，

$$\begin{cases} u_{\hat{t}}^h(x,\ t)+J(u^h(x,\ t),u^h(x,\ t))+u_{x\bar{x}\hat{x}}^h(x,t)=0, & x\in I_h,\ t\in\mathring{S}_\tau,\\ u_t^h(x,0)+J(u^h(x,0),u^h(x,0))+u_{x\bar{x}\hat{x}}(x,\ 0)=0, & x\in I_h,\\ u^h(x+1,\ t)=u^h(x,\ t), & x\in I_h,\ t\in S_\tau,\\ u^h(x,\ 0)=u_0(x). & x\in I_h. \end{cases}$$

(8-1-12)

事实上，这就是 Zabusky, Kruskal 所采用的格式．不过，此格式不满足二次守恒律，现在把(8-1-12)改写为

$$u^h(x,\ t+\tau)=u^h(x,\ t-\tau)+2\tau G(u^h(x,\ t)),$$

其中 $$G(v)=-J(v,\ v)-v_{x\bar{x}\hat{x}}.$$

Sanz-Serna 的格式为

$$u^h(x,\ t+\tau)=u^h(x,\ t-\tau)+2\tau(t)G(u^h(x,\ t)),$$

其中变步长由下式决定

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(G(u^h(t)),\ u^h(t)-u^h(t-\tau))_h}{(G(u^h(t)),\ G(u^h(t)))_h}, & 若G(u^h(x,\ t))\neq 0,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

可验证 $\|u^h(t+\tau)\|_h^2=\|u^h(t-\tau)\|_h^2$，因此满足离散形式的二次守恒律．

另一类高精度且计算稳定的格式是预估-校正格式．例如，Kuo Penyu(即Guo BenyuWu)，Huamo 所采用的格式

$$\begin{cases} \hat{u}^h(x,t)=u^h(x,t)-\beta\tau J(u^h(x,t),u^h(x,t))-\beta\tau u^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in I_h,\ t\in S_\tau, \\ u^h_t(x,t)+J(u^h(x,t)+\sigma\tau u^h_t(x,t),\hat{u}^h(x,t))+u^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,t) \\ \quad +\sigma\tau u^h_{tx\bar{x}\hat{x}}(x,t)=0, \qquad\qquad\qquad x\in I_h,\ t\in S_\tau, \\ u^h(x+1,t)=u^h(x,t), \qquad\qquad\qquad x\in \bar{I}_h,\ t\in S_\tau, \\ u^h(x,0)=u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad x\in \bar{I}_h. \end{cases}$$

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$.

差分格式理论的基本问题之一是格式的稳定性和收敛性. 对于线性差分格式, 如果它对原微分方程的逼近是相容的, 那末根据 Lax 定理(见章末 [52]), 稳定性等价于收敛性, 但是 Lax 定理不适用于非线性差分格式. 目前主要采用两种方法来分析非线性问题的计算稳定性, 第一种方法是分析近似线性稳定性. 例如设 $u^h(x,t)$ 和 $u_0(x)$ 分别具有误差 $\tilde{u}^h(x,t)$ 和 $\tilde{u}_0(x)$, (8-1-8)的右端计算误差为 $\tilde{f}(x,t)$, 于是略去高阶误差后, 得到近似误差方程

$$\tilde{u}^h_t(x,t)+\sigma u^h(x,t+\tau)\tilde{u}^h(x,t+\tau)+(1-\sigma)u^h(x,t)\tilde{u}^h(x,t)$$
$$+\sigma\tilde{u}^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,t+\tau)+(1-\sigma)\tilde{u}^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,t)=0,$$
$$x\in I_h,\ t\in S_\tau.$$

今把上式中的 $u^h(x,t)$ 和 $u^h(x,t+\tau)$ 视为常数 $\bar{u}$, 这就得到一个相应的常系数差分方程. 如果对一切 (x,t) 和所考虑的 $\bar{u}$, 此格式是稳定的, 则称原格式(8-1-8) 是近似线性稳定的. 显然, 对于近似的常系数误差方程, 可应用 Fourier 方法分析其稳定性, 表 8-1 给出了几个差分格式的近似线性稳定性条件, 其中 $M=\max\limits_{x,t}|u(x,t)|$.

表 8-1 几个差分格式的近似线性稳定性条件

格式	Greig-Morris	Vliegenthart	Zabusky-Kruskal
稳定性条件	$\tau\leqslant\dfrac{h^3}{\lvert 2-h^2M\rvert}$	$\tau\leqslant\dfrac{h^3}{4+h^2M}$	$\tau\leqslant\dfrac{h^3}{4+h^2M}$

1965 年，郭本瑜提出了广义稳定性的概念，为严格估计非线性问题的计算误差提供了一个新的方法．下面以格式(8-1-9)为例来说明这一方法．(8-1-9)的误差满足

$$\frac{\partial \tilde{u}^h}{\partial t}(x,\ t)+J(\tilde{u}^h(x,\ t),\ u^h(x,\ t)+\tilde{u}^h(x,\ t))$$
$$+J(u^h(x,\ t),\ \tilde{u}^h(x,\ t))+\tilde{u}^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,\ t)=\tilde{f}^h(x,\ t).$$

用 $\tilde{u}^h(x,\ t)$ 乘上式并求内积，由(8-1-10)得到

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{u}^h(t)\|_h^2+2(J(u^h(t),\ \tilde{u}^h(t)),\ \tilde{u}^h(t))_h\leqslant\|\tilde{u}^h(t)\|_h^2+\|\tilde{f}(t)\|_h^2.$$

可以证明

$$|(J(u^h(t),\ \tilde{u}^h(t)),\ \tilde{u}^h(t))_h|\leqslant M_1\|\tilde{u}^h(t)\|_h^2,$$

因此

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{u}^h(t)\|_h^2\leqslant M_2(\|\tilde{u}^h(t)\|_h^2+\|\tilde{f}^h(t)\|_h^2),$$

其中 M_1, M_2 是仅依赖于 $u(x,\ t)$ 的正常数．又记

$$\rho^h(t)=\|\tilde{u}_0\|_h^2+\int_0^t\|\tilde{f}^h(\xi)\|_h^2 d\xi.$$

定理 1 假设 $u^h(x,\ t)$ 是格式(8-1-9)的解，那末存在仅依赖于 $u^h(x,\ t)$ 的正常数 M_3, M_4，使得对一切 $t\geqslant 0$ 都有

$$\|\tilde{u}^h(t)\|_h^2\leqslant M_3 e^{M_4 t}\rho^h(t).$$

下面来分析收敛性．用 $r^h(x,\ t)$ 表示格式(8-1-9)的逼近误差

$$R^h(t)=\int_0^t\|r^h(\xi)\|^2 d\xi.$$

根据 Guo Benyu 的方法，可由定理 1 直接得到下面的结果．

定理 2 假设 $u(x,\ t)$ 和 $u^h(x,\ t)$ 分别为(8-1-1)和(8-1-9)的解，则存在仅与 $u(x,\ t)$ 有关的正常数 M_5 和 M_6，使得只要当 $h\to 0$ 时，$R^h(t)\to 0$，那末

$$\|u(t)-u^h(t)\|_h^2\leqslant M_5 e^{M_6 t}R^h(t). \qquad (8\text{-}1\text{-}13)$$

上述方法可以推广应用到下列更一般的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^p\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^{2r+1}u}{\partial x^{2r+1}}=0, \qquad (8\text{-}1\text{-}14)$$

其中 α, β, p 是常数，r 是非负整数．计算它的一类格式是

$$\frac{\partial u^h}{\partial t}(x,\ t)+\alpha J_1(u^h(x,\ t),\ u^h(x,\ t))+\beta u^h_{\underbrace{x x \cdots x}_{r个}\underbrace{\bar{x} \bar{x} \cdots \bar{x}}_{r个}\hat{x}}(x,\ t)=0,$$

$$(8\text{-}1\text{-}15)$$

其中

$$J_1(v,\ \varphi)=\frac{1}{p+1}\varphi^p v_{\hat{x}}+\frac{1}{p+1}(\varphi^p v)_{\hat{x}}.$$

若 $v,\ w,\ \varphi$ 在 x 方向以 1 为周期，则

$$(J_1(v,\ \varphi),\ w)_h+(J_1(w,\ \varphi),\ v)_h=0.$$

因此(8-1-15)的周期解满足 $\|u^h(t)\|_h^2=\|u_0\|_h^2$. 为了使得近似解具有与本节定理 1 和定理 2 类似的误差估计式，尚可构造更精细的格式. 例如当 $p=2,\ r=1$ 时，(8-1-14)就是修正的 Korteweg-de Vries方程，计算它的一类格式为

$$\frac{\partial u^h}{\partial t}(x,t)+\alpha J_2(u^h(x,\ t),\ u^h(x,\ t))+\beta u^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,\ t)=0,$$

其中

$$J_2(v,\ w,\ z)=\frac{1}{6}(wzv_{\hat{x}}+z(vw)_{\hat{x}}+(vwz)_{\hat{x}}).$$

二维空间中的 Kadomtsev-Petviashvili 方程是 Korteweg-de Vries 方程的一种推广形式，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (8\text{-}1\text{-}16)$$

记 $u=\dfrac{\partial v}{\partial x}$，于是计算此问题的一类格式是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^h}{\partial t}(x,\ y,\ t)+6J(u^h(x,\ y,\ t),\ u^h(x,\ y,\ t)) \\ \qquad \pm u^h_{x\bar{x}\hat{x}}(x,\ y,\ t)+\alpha v^h_{y\bar{y}}(x,\ y,\ t)=0, \\ u^h(x,\ y,\ t)=v^h_{\hat{x}}(x,\ y,\ t).\end{cases}$$

§2 Korteweg-de Vries 方程初、边值问题的数值研究

由于水坝放水等实际问题的需要，人们逐渐重视 Korteweg-

de Vries 方程的初、边值问题. 因为反散射等方法很难推广到初、边值问题,因此至今还没有任何理论研究成果,所以对 Korteweg-de Vries 方程初、边值问题的数值研究就显得十分重要. Chu, Xiang, Baransky和 Guo Benyu, Weideman 分别独立地研究了下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, & x\in \boldsymbol{R}^+,\ t>0, \\ u(0,\ t)=g(t), & t\geqslant 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,\ t)=0, & t\geqslant 0, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \boldsymbol{R}^+, \end{cases} \tag{8-2-1}$$

其中 $g(t)\geqslant 0$, $u_0(0)=g(0)$. 如果 $g(t)$ 和 $u_0(x)$ 满足一定条件,则可仿 Bui An ton 的方法证明该问题具有唯一的古典解,并满足下列守恒律

$$\int_0^1 u^2(x,\ t)dx=\int_0^1 u_0^2(x)dx+\int_0^t\left[\frac{2}{3}g^3(\xi)+2g(\xi)\frac{\partial^2 u(0,\ \xi)}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}(0,\xi)\right)^2\right]d\xi. \tag{8-2-2}$$

记 $\boldsymbol{R}_h^+=\{x\,|\,x=h,\ 2h,\ \cdots\}$, $\overline{\boldsymbol{R}}_h^+=\boldsymbol{R}_h^+\cup\{0\}$. 内积 $(v(t),w(t))_h^*$ 的定义与 $(v(t),\ w(t))_h$ 相类似, 但求和号是对一切 $x\in \boldsymbol{R}_h^+$ 进行的. $\|v(t)\|_h^{*2}=(v(t),\ v(t))_h^*$. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=0$, 则

$$(J(v,\ \varphi),\ w)_h^*+(J(w,\ \varphi),\ v)_h^*=A_1(v,\ w,\ \varphi), \tag{8-2-3}$$

$$(v,\ w_{x\bar{x}\hat{x}})_h^*+(v_{x\bar{x}\hat{x}},\ w)_h^*=A_2(v,\ w), \tag{8-2-4}$$

其中

$$A_1(v,\ w,\ \varphi)=-\frac{1}{6}\{v(h)w(0)\varphi(h)+v(0)w(h)\varphi(0)+v(0)w(h)\varphi(h)+v(h)w(0)\varphi(0)\},$$

$$A_2(v,\ w)=-w(h)v_{x\hat{x}}(0)+w_x(0)v_{\hat{x}}(h)-\frac{1}{2}w_{x\bar{x}}(h)v(0)-\frac{1}{2}w_{xx}(0)v(h).$$

引入虚拟点 $x=-h$，于是计算(8-2-1)的一类差分格式是

$$
\begin{cases}
u_t^h(x,t)+J(u^h(x,t)+\sigma\tau u_t^h(x,t),\ u^h(x,t)) \\
\quad +u_{x\bar{x}\hat{x}}^h(x,t)+\sigma\tau u_{tx\bar{x}\hat{x}}^h(x,t)=0, & x\in I_h,\ t\in S_\tau, \\
u^h(0,t)=g(t), & t\in S_\tau, \\
u^h(-h,t)=2g(t)-u^h(h,t), & t\in S_\tau, \\
\lim\limits_{x\to+\infty} u^h(x,t)=0, & t\in S_\tau, \\
u^h(x,0)=u_0(x), & x\in \overline{\boldsymbol{R}}_h^+.
\end{cases}
\tag{8-2-5}
$$

若 $\sigma=0$，(8-2-5)是显式格式. 不难由 (8-2-3) 和 (8-2-4) 得到

$$
(\|u^h(t)\|_h^{*2})_t-\tau\|u_t^h(t)\|_h^{*2}+A_1(u^h(t),\ u^h(t),\ u^h(t)) +A_2(u^h(t),\ u^h(t))=0.
$$

若 $\sigma=\frac{1}{2}$，(8-2-5)是隐式格式，它的解满足更精细的二次守恒律，即

$$
(\|u^h(t)\|_h^{*2})_t+\frac{1}{4}A_1(u^h(t)+u^h(t+\tau),\ u^h(t)+u^h(t+\tau),\ u^h(t)) +\frac{1}{4}A_2(u^h(t)+u^h(t+\tau),\ u^h(t)+u^h(t+\tau))=0.
$$

Guo Benyu 分析了计算的收敛性. 假设内点与边界上的逼近误差分别为 $r^h(x,t)$ 和 $r_b^h(t)$，

$$
R^h(t)=\tau\sum_{\substack{\xi\in S_\tau \\ \xi\leqslant t-\tau}}[\|r^h(\xi)\|_h^2+h^{-2}(r_b^h(\xi))^2].
$$

定理 1 若 $\tau=O(h^6)$，$\sigma=0$，$R^h(T)e^{M_7T}\leqslant M_8h^{-3}$，则对一切 $t\leqslant T$，都有

$$
\|u^h(t)-u(t)\|_h^{*2}\leqslant M_9R^h(t)e^{M_7t},
$$

其中 M_7，M_8 和 M_9 是仅与 $u(x,t)$ 有关的正常数.

定理 2 若 $\sigma=\frac{1}{2}$，τ 适当小，则对一切 $R^h(t)$ 和 t，

$$
\|u^h(t)-u(t)\|_h^{*2}\leqslant M_{10}R^h(t)e^{M_{11}t},
$$

其中 M_{10}, M_{11} 仅与 $u(x, t)$ 有关.

计算 (8-2-1) 的另一个算法是应用 (8-2-5) 的第一式计算 $u^h(x, t)$, $x=2h, 3h, \cdots$, 而用下式计算 $u^h(h, t)$,

$$u^h(h, t)=\alpha u^h(0, t)+\beta u^h(2h, t)+\gamma u^h(3h, t)+\nu u^h(4h, t).$$

若 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\nu=0$, 则其逼近误差为 $O(h^2)$. 若 $\alpha=\frac{1}{3}, \beta=1$, $\gamma=-\frac{1}{3}, \nu=0$, 则其逼近误差为 $O(h^3)$. 若 $\alpha=\frac{1}{4}, \beta=\frac{3}{2}$, $\gamma=-1$, $\nu=\frac{1}{4}$, 则其逼近误差为 $O(h^4)$. 数值结果表明, 仅当第三种情况时, 计算才是稳定的.

真正感兴趣的问题是检验问题(8-2-1)是否具有孤立子解. 事实上, 若

$$u_0(x)=\begin{cases} H, & 0\leqslant x\leqslant D, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

那末, Korteweg-de Vries 方程的初值问题具有K个孤立子, 其中K是不超过 $\frac{D}{\pi}\sqrt{\frac{H}{6}}+1$ 的最大正整数(见章末[37]). Guo Benyu, Weideman 则对问题(8-2-1)进行了数值试验, 其中 $u_0(x)\equiv 0$,

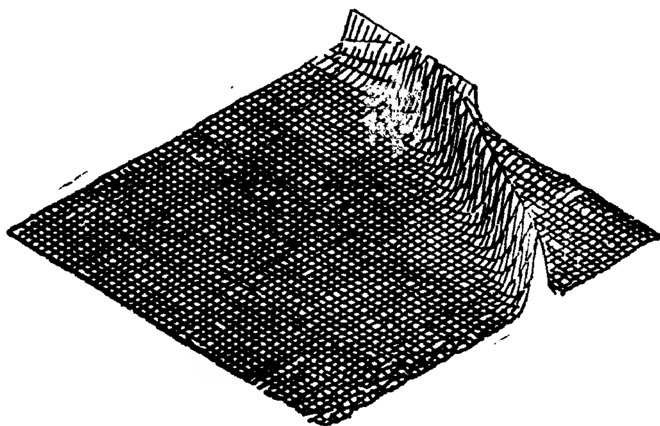


图 8-1　$H=0.75$, $D=1.0$

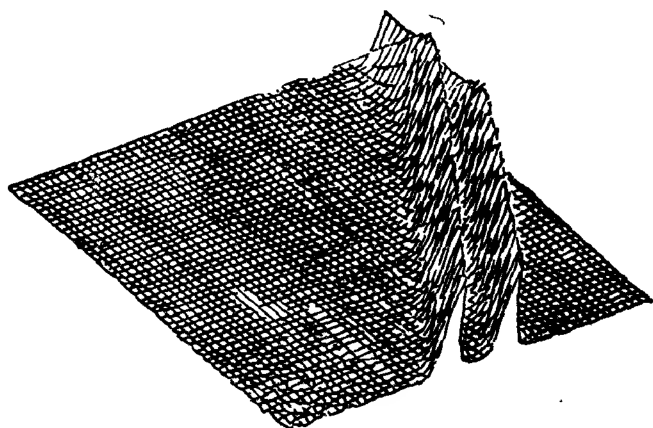


图8-2 $H=1.0,\ D=1.0$

表8 2 孤立波个数 K 对 H 和 D 的依赖关系

K \ D / H	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0.25	0	0	0	0	0	0
0.50	0	0	0	0	0	1
0.75	0	0	1	1	1	2
1.00	0	1	1	2	2	[illegible]
1.25	0	1	2	2	3	3
1.50	1	2	2	3	4	4

$$g(t)=\begin{cases} H, & d\leqslant t\leqslant D+d, \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

计算结果表明，对于适当的H和D，也会形成孤立波，例如见图 8-1 和图 8-2. 孤立波的个数K随着H和 D的增大而增大(见表 8-2). Chu, Xiang, Baransky 对梯形波的边值问题也进行了数值试验，其结论是类似的.

§3 Korteweg-de Vries 方程的有限元解法

计算非线性波动方程的另一个重要数值方法是有限元方法. 用 $C_p^\infty(I)$ 表示函数空间 $\{v \mid v\in C^\infty(\boldsymbol{R}),\ v(x+1)=v(x)\}$, $H_p^q(I)$ 是 $C_p^\infty(I)$ 在 $H^q(I)$ 中的完备化. 问题 (8-1-1) 的弱解是指 $u\in L^\infty(0, +\infty; H_p^1(I))$, 使得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial t}v-\frac{1}{2}u^2\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx=0, & \forall v\in H_p^2(I),\ t>0,\\ u(x, 0)=u_0(x), & x\in \bar{I}. \end{cases} \tag{8-3-1}$$

今把 I 划分为小区间 $I_j=[jh-h, jh]$, $I=\bigcup\limits_{j=1}^{N} I_j$. 用 Φ_h 和 Ψ_h 表示基函数空间与试验函数空间, 它们对 $H_p^1(I)$ 和 $H_p^2(I)$ 的逼近是稳定且收敛的. 假定 Φ_h 和 Ψ_h 的基底分别为 $\varphi_j(x)$ 和 $\psi_j(x)$, $1\leqslant j\leqslant N$. 用 $u^h(x, t)$ 表示 $u(x, t)$ 的近似解,

$$u^h(x, t)=\sum_{j=1}^{N}u_j^h(t)\varphi_j(x), \quad x\in\bar{I},\ t\geqslant 0.$$

通常的 Galerkin 方法是寻找 $u^h\in L^\infty(0, +\infty; \Phi_h)$, 使得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial u^h}{\partial t}v^h-\frac{1}{2}(u^h)^2\frac{\partial v^h}{\partial x}+\frac{\partial u^h}{\partial x}\frac{\partial^2 v^h}{\partial x^2}\right)dx=0, & \forall v^h\in \Phi_h,\ t>0,\\ u^h(x, 0)=P_N u_0(x), & x\in \bar{I}, \end{cases} \tag{8-3-2}$$

其中 P_N 表示从 $H_p^1(I)$ 到 Φ_h 的投影算子. 因为 (8-3-2) 中含有二次偏导数项 $\dfrac{\partial^2 v^h}{\partial x^2}$, 所以不可能把 Φ_h 取为一次有限元.

为了改进计算的稳定性, 可采用耗散有限元方法, 也就是说, 寻找 $u^h\in L^\infty(0, +\infty; \Phi_h)$, 使得

$$
\begin{cases}
\int_0^1 \left(\frac{\partial u^h}{\partial t}+u^h\frac{\partial u^h}{\partial x}+\frac{\partial^3 u^h}{\partial x^3}\right)\left(v^h+\alpha h^3\frac{\partial^3 v^h}{\partial x^3}\right)dx=0, & \\
\qquad\qquad \forall v^h\in\Phi_h,\ t>0, & \\
u^h(x,\ 0)=P_h u_0(x), \qquad x\in\bar{I}, &
\end{cases}
\tag{8-3-3}
$$

其中 $\alpha>0$, $\Phi_h\subset H_p^3(I)$.

现在设 μ 和 k 为整数, $\mu>k\geqslant0$, 并记

$$
S_p^h(\mu,\ k)=\{v(x)\,|\,v(x+1)=v(x),\ v\in C^k(\boldsymbol{R})
$$

$$
v(x)\text{在 } I_j \text{ 中为 } \mu \text{ 阶多项式}, 1\leqslant j\leqslant N\}.
$$

Wahlbin 应用(8-3-3)计算(8-3-1), 其中 $\alpha=1$, $\Phi_h=S_p^h(\mu,\ k)$, $k\geqslant2$. 他还证明了下列结果:

定理　假设 u 和 u^h 分别为 (8-1-1) 和 (8-3-3) 的解, $\Phi_h=S_p^h(\mu,\ k)$. $k\geqslant2$, $\alpha=1$, T 是任意固定正数, 并且 $\|P_h u_0-u_0\|_{L^2(I)}=O(h^{\mu+1})$, 那末, 对一切 $t\leqslant T$, 都有

$$
\|u^h(t)-u(t)\|_{L^2(I)}=O(h^{\mu+1}).
$$

Alexander, Morris 还对不同的 α 进行了数值试验. 由于当 $\mu\geqslant3$ 时计算太复杂, Winther把(8-1-1)改写为

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial w}{\partial x}=0, \\
w=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{u^2}{2}\right).
\end{cases}
\tag{8-3-4}
$$

于是, 把原问题归结为寻求 $(u^h,\ w^h)\in L^\infty(0,\ +\infty;\Phi_h)\times L^\infty(0,\ +\infty;\Phi_h)$, 使得

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u^h}{\partial t}-\frac{\partial w^h}{\partial x}=0, & x\in I,\ t\geqslant0, \\
\int_0^1 w^h v^h dx=\int_0^1\left(\frac{\partial u^h}{\partial x}\cdot\frac{\partial v^h}{\partial x}-\frac{1}{2}(u^h)^2 v^h\right)dx=0, & \forall v^h\in\Phi_h,\ t>0, \\
u^h(x,\ 0)=P_h u_0(x), & x\in\bar{I},
\end{cases}
$$

其中 $\Phi_h\subset H_p^1(I)$. 因为改写后的方程组(8-3-4)中不含有二阶偏导数, 故可把 Φ_h 取为一次有限元空间, 从而减少了计算复杂性.

近年来，Petrov-Galerkin 方法已被广泛应用，也就是说 $\Phi_h \neq \Psi_h$. 为简单计，记

$$\dot{u}_l^h(t) = \frac{du_l^h}{dt}(t), \quad \varphi_l'(x) = \frac{d\varphi_l}{dx}(x)$$

等. 一类计算(8-1-1)的 Petrov-Galerkin 格式为

$$\sum_{l=1}^{N}\int_0^1 [\dot{u}_l^h(t)\varphi_l(x)\psi_j(x) - \frac{1}{2}(u_l^h(t))^2\varphi_l(x)\psi_j'(x)$$
$$+ u_l^h(t)\varphi_l'(x)\psi_j''(x)]dx = 0.$$

在今后的讨论中，设 $\Phi_h = S_p^h(1, 0)$，即

$$\varphi_j(x) = \varphi\left(\frac{x}{h} - j\right),$$
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{8-3-5}$$

Sanz-Serna, Christie 取 $\Psi_h = S_p^h(3, 2)$，它是最佳 Spline 逼近函数空间，$\psi_j(x)$ 的支集长度为 $4h$. 经计算由 (8-3-5) 得到

$$\frac{1}{120}(\dot{u}_{j+2}^h + 26\dot{u}_{j+1}^h + 66\dot{u}_j^h + 26\dot{u}_{j-1}^h + \dot{u}_{j-2}^h)$$
$$+ \frac{1}{48h}[(u_{j+2}^h)^2 + 10(u_{j+1}^h)^2 - 10(u_{j-1}^h)^2 - (u_{j-2}^h)^2]$$
$$+ \frac{1}{2h^3}(u_{j+2}^h - 2u_{j+1}^h + 2u_{j-1}^h - u_{j-2}^h) = 0.$$

Schoombie 和 Mitchell 把 Ψ_h 取为位移函数空间，即

$$\psi_j(x) = \varphi_{j-\alpha}(x), \qquad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

于是由 (3-2-5) 得到

$$\sum_{l=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} [\dot{u}_l^h(t)\varphi_l(x) + \frac{1}{2}(u_l^h(t))^2\varphi_l'(x)$$
$$+ u_l^h(t)\varphi_l'''(x)]\varphi_{j-\alpha}(x)dx = 0.$$

经计算得到

$$\sum_{l=-2}^{1}[a_l\dot{u}^h_{j+l}(t)+b_l(u^h_{j+l}(t))^2+c_lu^h_{j+l}(t)]=0,$$

其中
$$a_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{j+l}(x)\varphi_{j-\alpha}(x)dx,$$

$$b_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'_{j+l}(x)\varphi_{j-\alpha}(x)dx,$$

$$c_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'''_{j+l}(x)\varphi_{j-\alpha}(x)dx.$$

记
$$v*w(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(\xi)w(x-\xi)d\xi,$$

并用 $B_l(x)$ 表示 B-Spline 函数，即

$$B_0(x)=\begin{cases}1, & |x|<\dfrac{1}{2},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$$B_l(x)=B_0*B_{l-1}(x),\quad l\geqslant 1,$$

于是
$$\begin{aligned}a_l&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{x}{h}-j-l\right)\varphi\left(\frac{x}{h}-j-\alpha\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi-(\alpha+l))\varphi(\xi)d\xi\\&=\varphi*\varphi(\alpha+l)=B_1*B_1(\alpha+l)=B_0*B_0*B_1(\alpha+l)\\&=B_0*B_2(\alpha+l)=B_3(\alpha+l).\end{aligned}$$

类似地有
$$b_l=B_3'(\alpha+l),\qquad c_l=B_3'''(\alpha+l).$$

a_l, b_l 和 c_l 的值可见表 8-3.

表 8-3 a_l, b_l 和 c_l 的值

	$l=-2$	$l=-1$	$l=0$	$l=1$
a_l	$\frac{\alpha^3}{6}$	$\frac{1}{6}(1+3\alpha+3\alpha^2-3\alpha^3)$	$\frac{1}{6}(4-6\alpha^2+3\alpha^3)$	$\frac{1}{6}(1-\alpha)^3$
b_l	$\frac{\alpha^2}{2}$	$\frac{1}{2}(1-\alpha)(1+3\alpha)$	$\frac{\alpha}{2}(-4+3\alpha)$	$-\frac{1}{2}(1-\alpha)^2$
c_l	1	-3	3	-1

§4 Korteweg-de Vries 方程的谱解法和拟谱解法

谱方法是一个古老的解法，它的基本思想是以各种特殊函数为基底，近似地求解微分方程(见章末[26])．谱方法有两个主要优点，其一是往往可以得到能够显式计算的格式，其二是近似解的精度高．正如大家所知道的那样，对于固定的差分格式或有限元格式，不论原问题的解如何光滑，其近似解的精度总是有限的，一般为 $O(h^{\beta})$，$\beta>0$．然而，即使对同一个谱格式，当原问题解的光滑性增加时，它的近似解精度也越来越高，这就是通常所说的无限精度．近十年来，由于快速傅里叶变换的发展，解决了计算中的困难，因此更促进了谱方法的发展与应用．

Gazdag，Tappert，Canosa 等人较早地提出了一种部分地应用傅里叶展开式的方法．Canosa，Gazdag 考虑了下列方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\delta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, & \gamma>0,\delta>0,x\in\boldsymbol{R},t>0,\\ \lim\limits_{x\to-\infty}u(x,t)=1, & t\geqslant 0,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0, & t\geqslant 0,\\ u(x,0)=v_0(x), & x\in\boldsymbol{R}. \end{cases}$$

假设 $u(x,t)$ 的近似解为

$$u^N(x,t)=\sum_{|n|\leqslant N}u_n^N(t)e^{inx},\qquad i^2=-1,$$

于是 $u^N(x,t+\tau)$ 由下式决定，

$$u^N(x,t+\tau)=u^N(x,t)+\tau\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,t)$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x,t)+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u^N}{\partial t^3}(x,t).$$

可应用原方程得到

$$\frac{\partial u^N}{\partial t}=-u^N\frac{\partial u^N}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}-\delta\frac{\partial^3 u^N}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}=-\frac{\partial u^N}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial x}-u^N\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)+\gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)$$
$$-\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial^3 u^N}{\partial t^3}=-\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\frac{\partial u^N}{\partial x}-2\frac{\partial u^N}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)-u^N\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\right)$$
$$+\gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\right)-\delta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\right).$$

在上述各表达式中，$u^N(x,t)$ 对 x 的各阶导数由傅里叶方法来计算，即

$$\frac{\partial^l u^N}{\partial x^l}(x,t)=\sum_{|n|<N}(in)^l u_n^N(t)e^{inx}.$$

Schamel, Elsässer 和 Watanabe, Ohishi, Tanaca 等人提出了另一种谱方法，他们把未知函数展开为傅里叶级数，从而把原方程简化为以傅里叶系数为未知函数的常微分方程组. Abe, Inoue 讨论了问题(8-1-1)，其中 $u_0(x)=\cos 2\pi x$，假设

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(t)e^{2in\pi x},$$

于是得到下列常微分方程组

$$\frac{da_n}{dt}(t)=-in\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}na_{n-m}(t)a_m(t)+8in^3\pi^3a_n(t).$$

在具体计算时，取 $a_n(t)\equiv 0$，$|n|\geqslant N$，这样就得到了近似解 $u^N(x,t)$.

郭本瑜提出了另一种谱格式，他定义反对称算子

$$J_3(v,\varphi)=\frac{1}{3}\varphi\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi v).$$

设(8-1-1)的近似解为

$$u^N(x,t)=\frac{1}{2}a_0^N(t)+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^N(t)\cos 2n\pi x+b_n^N(t)\sin 2n\pi x\right).$$

它的解满足

$$\begin{cases} \int_0^1 [u_t^N\varphi_n + J_3(u^N+\sigma\tau u_t^N, u^N)\varphi_n \\ \qquad + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^N+\sigma\tau u_t^N)\varphi_n']dx = 0, \qquad t>0, \\ u^N(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n\cos 2n\pi x + B_n\sin 2n\pi x), \quad x\in\bar{I}, \end{cases}$$

(8-4-1)

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant1$，$\varphi_n=\sin 2n\pi x$ 或 $\cos 2n\pi x$，A_n 和 B_n 是 $u_0(x)$ 的傅里叶系数. 郭本瑜严格估计了计算误差. 设 $R^N(u)$ 为 u 的傅里叶级数直到第 N 项的部分和的余项

$$E_1^N = u_t - \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$E_2^N = J_3(u+\sigma\tau u_t,\ u) - u\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E_3^N = -R^N(u_t),$$

$$E_4^N = -J_3(R^N(u)+\sigma\tau R^N(u_t),\ u) - J_3(u+\sigma\tau u_t,\ R^N(u)) \\ + J_3(R^N(u)+\sigma\tau R^N(u_t),\ R^N(u)),$$

$$E_5^N = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(u+\sigma\tau u_t - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right),$$

$$E_6^N = -\frac{\partial^3}{\partial x^3}(R^N(u)+\sigma\tau R^N(u_t)),$$

$$R^N(t) = \tau\sum_{\substack{\xi\in S_\tau \\ \xi\leqslant t-\tau}}\sum_{1\leqslant l\leqslant 6}\|E_l^N(\xi)\|_{L^2(I)}^2.$$

定理 1　假设 u 和 u^N 分别为(8-1-1)和(8-4-1)的解,

$$\tau = O\left(\frac{1}{N^6}\right),$$

且

$$R^N(T)e^{M_{12}T} \leqslant \frac{M_{13}}{\tau N^3},$$

则对一切 $t\leqslant T$,

$$\|u(t)-u^N(t)\|_{L^2(I)}^2 \leqslant M_{14}R^N(t)e^{M_{12}t},$$

其中 M_{12}, M_{13} 和 M_{14} 是仅依赖于 u 的正常数.

定理 2 假设 u 和 u^N 分别为(8-1-1)和(8-4-1)的解，$\sigma>\frac{1}{2}$，$\tau=O\left(\frac{1}{N^2}\right)$，则对一切 $R^N(t)$ 和 t，

$$\|u(t)-u^N(t)\|^2_{L^2(I)}\leqslant M_{15}R^N(t)e^{M_{16}t},$$

其中 M_{15} 和 M_{16} 是仅与 u 有关的正常数.

谱方法的缺点是较难处理非线性项，且计算量大. 拟谱方法较易处理非线性项且计算量较小，但是常用的拟谱方法往往具有非线性计算不稳定性. 为了克服这一缺点，Kreiss, Oliger 提出了滤波技巧. Ma Heping, Guo Benyu 则提出了另一种方法. 他们的方法的出发点是引入限制算子 R^N_ν. 若 a_n 是 $v(x)$ 的傅里叶系数，则

$$R^N_\nu v(x)=\sum_{|n|\leqslant N}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^\nu\right)a_l e^{2in\pi x},\qquad \nu>1.\qquad (8\text{-}4\text{-}2)$$

上述展开式有两个主要优点. 首先，若 $v(x)\in L^2(I)$，则在 $v(x)$ 的连续点 x_0, $v(x)$ 的傅里叶级数收敛到 $v(x_0)$. 若 $v(x)\in L^1(I)$，则不一定收敛. 但是在一定条件下，当 $N\to+\infty$ 时，$R^N_\nu v(x_0)$ 收敛到 $v(x_0)$. 其次，假设 v^N 有误差 $\tilde{v}^N$，那末在非线性项 $\tilde{v}^N\frac{\partial\tilde{v}^N}{\partial x}$ 的展开式中就会含有频率为 $2N$ 的项，这些项会导致非线性计算不稳定性. 反之，若采用展开式(8-4-2)，则当 n 越大时，R^N_ν 对频率为 n 的误差分量的抑制也越大，这就有助于非线性计算稳定性. 显然，当 $\nu\to+\infty$ 时，展开式(8-4-2)就退化为通常的傅里叶展开式，因此 ν 不宜太大. 但 ν 也不能太小，当 ν 太小时，会降低逼近精度. 特别，当 $\nu<1$ 时，一般 $R^N_\nu v(x)$ 不收敛到 $v(x)$.

下面介绍计算(8-1-1)的带有限制算子 R^N_ν 的拟谱方法. 记 $V^N=\text{span}\{e^{2in\pi x}\,|\,|n|\leqslant N\}$，$\hat{V}_N$ 是 V^N 的实值函数子空间. 又记 $x_j=jh$, $h=\frac{1}{2N+1}$，用 P_N 表示从 $L^2(I)$ 到 V^N 的正交投影算子，P_c 为从 $C(\bar{I})$ 到 V_N 的插值算子，即 $P_cv(x_j)=v(x_j)$，

$0\leqslant j\leqslant 2N$. 为了逼近非线性项 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 定义下列非线性算子

$$J_4(v,\ \varphi)=\frac{1}{3}P_c\left(R_v^N\varphi\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(P_c(R_v^N\varphi v)).$$

$J_4(v,\ \varphi)$ 仍为反对称算子, 即

$$(J_4(v,\ \varphi),\ w)_{L^2(I)}+(J_4(w,\ \varphi),\ v)_{L^2(I)}=0.$$

计算(8-1-1)的拟谱方法是寻求 $u^N\in L^\infty(0,\ +\infty;\ V^N)$, 使得

$$\begin{cases} u_t^N(x,\ t)+J_4(u^N(x,\ t)+\sigma\tau u_t^N(x,\ t),\ u^N(x,\ t)) \\ \quad +\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}(u^N(x,\ t)+\delta\tau u_t^N(x,\ t))=0, & x=x_j,\ t\in S_\tau, \\ u^N(x,\ 0)=P_cu_0(x), & x=x_j. \end{cases} \tag{8-4-3}$$

若 $\sigma=\delta=\dfrac{1}{2}$, 则 $\|u^N(t)\|^2_{L^2(I)}$ 是守恒的.

定理 3　假设 u 和 u^N 分别为 (8-1-1) 和 (8-4-3) 的解, $u\in C^1(0,\ T;\ H_p^1(I))\cap C(0,\ T;\ H_l^\beta(I))$. $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in H^1(0, T;\ L^2(I))$, T 是任意正数, $r\geqslant\beta\geqslant 3$, 并满足下列条件之一:

(1) $\sigma=\delta>\dfrac{1}{2}$, $\tau N^2\leqslant d<+\infty$;

(2) $\delta>\dfrac{1}{2}$, $\tau N^3\leqslant d<+\infty$, 且 $\tau+N^{1-\beta}$ 适当小,

那末

$$\|u^N(t)-u(t)\|_{L^2(I)}\leqslant M_{17}(\tau+N^{1-\beta}),$$

其中 M_{17} 是仅依赖于 u 的正常数.

实际计算表明, 格式 (8-4-3) 计算稳定且有较高的精度. 例如考虑下列问题,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\beta u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, & 0<x<2,\ t>0, \\ u(x,\ 0)=3C\operatorname{sech}^2(Ax+D), & 0\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

它的解为

$$u(x,\ t)=3C\operatorname{sech}^2(Ax-Bt+D),$$

其中 $A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta C}{\varepsilon}}$, $B=\frac{1}{2}\beta C\sqrt{\frac{\beta C}{\varepsilon}}$. 今取 $C=0.3$, $D=-6$, $\beta=1$, $\varepsilon=4.84\times10^{-4}$, $h=\frac{1}{32}$, $\tau=0.0005$. 我们应用类似于(8-4-3)的格式计算上述问题，并与 Hopscotch 格式的计算结果进行比较，详见表 8-4.

表 8-4　最大计算误差比较

t	Hopscotch 格式	类似于(8-4-3)的格式, $\nu=10$
0.25	2.231×10^{-2}	0.5997×10^{-3}
0.50	3.764×10^{-2}	1.228×10^{-3}
0.75	5.003×10^{-2}	1.873×10^{-3}
1.00	6.723×10^{-2}	2.637×10^{-3}

§5　Benjamin-Bona-Mahony 方程的数值解法

另一类非线性波动方程是 Benjamin-Bona-Mahony 方程，又称为 R.L.W. 方程. 今考虑下列周期解问题，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}-\delta\dfrac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=0, \delta>0,\ x\in\boldsymbol{R},\ t>0, \\ u(x+1,\ t)=u(x,\ t) \qquad x\in\boldsymbol{R},\ t\geqslant0, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), \qquad x\in\boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{8-5-1}$$

Peregrine 最早应用下列格式计算(8-5-1),

$$\begin{cases} u_t^h(x,\ t)+\dfrac{1}{2}(u^h(x,\ t)+\alpha)(u_{\hat{x}}^h(x,\ t)+u_{\hat{x}}^h(x,\ t+\tau)) \\ \qquad -\delta u_{t\bar{x}x}^h(x,\ t)=0, \qquad x\in I_h,\ t\in S_\tau, \\ u(x+1,\ t)=u(x,\ t), \qquad x\in\bar{I}_h,\ t\in S_\tau, \\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), \qquad x\in\bar{I}_h. \end{cases} \tag{8-5-2}$$

Eilbeck, McGuire 也计算过 Benjamin-Bona-Mahony 方程. 由于他们的数值结果不精确, 曾使人们误以为两个孤立波解的碰撞是弹性的, 并致力于寻求该方程的 K 孤立子解的表达式. 后来Abdulloev, Bogolubsky, Makhankov 和 Alexander, Morris 等人再次进行数值试验, 才证实这类碰撞其实并非是弹性的. 由此可见, 数值方法的精度是十分重要的. 此外, Olver 还证明 Benjamin-Bona-Mahony 方程至多只能具有三个守恒律.

由于在(8-5-1)中含有项 $\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$, 因此只要初值 $u_0(x)$ 相当光滑, 其解 $u(x, t)$ 一般也很光滑, 所以可应用 Kreiss 方法(见章末[38])来构造高精度差分格式. 为简便计, 暂设 $\alpha=0$, $\delta=1$. 邬华谟, 郭本瑜把(8-5-1)改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}+G=0, \\ G=u\frac{\partial u}{\partial x}, \\ w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ v=u-w. \end{cases} \tag{8-5-3}$$

不难验证,

$$\frac{d^2 z}{dx^2}+\frac{h^2}{12}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_{x\bar{x}}=z_{x\bar{x}}+O(h^4),$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{h^2}{6}\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x\bar{x}}=z_{\hat{x}}+O(h^4),$$

因此可用下列格式计算(8-5-3),

$$\begin{cases} \frac{\partial v^h}{\partial t}(x, t)+g^h(x, t)=0, & x\in I_h,\ t>0, \\ Lu^h(x, t)=v^h_{x\bar{x}}(x, t), & x\in I_h,\ t\geqslant 0, \\ Mg^h(x, t)=J(u^h(x, t),\ u^h(x, t)), & x\in I_h,\ t\geqslant 0, \\ u^h(x, t)=v^h(x, t)+w^h(x, t), & x\in \bar{I}_h,\ t\geqslant 0, \end{cases}$$

(8-5-4)

其中$J(z, \varphi)$的定义见本章§1．算子L和M的定义如下，

$$Lz(x,t)=\frac{1}{12}(z(x+h,\ t)+10z(x,\ t)+z(x-h)),$$

$$Mz(x,\ t)=\frac{1}{6}(z(x+h,\ t)+4z(x,\ t)+z(x-h,\ t)),$$

格式(8-5-4)可进一步改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v^h}{\partial t}(x,\ t)+g^h(x,\ t)=0, & x\in I_h,\ t\geqslant 0,\\ Lw^h(x,\ t)-u^h_{x\bar{x}}(x)=v^h_{x\bar{x}}(x,\ t), & x\in I_h,\ t\geqslant 0,\\ Mg^h(x,\ t)=J(u^h(x,\ t),\ u^h(x,\ t)), & x\in I_h,\ t\geqslant 0,\\ u^h(x,\ t)=v^h(x,\ t)+w^h(x,\ t), & x\in \bar{I}_h,\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{8-5-5}$$

如果$u^h(x, t)$，$v^h(x, t)$，$w^h(x, t)$和$g^h(x, t)$都已得到，则可应用p阶Runge-Kutta方法由(8-5-5)的第一式计算$v^h(x, t+\tau)$．然后依次由(8-5-5)的第二、四、三式得到$w^h(x, t+\tau)$，$u^h(x, t+\tau)$和$g^h(x, t+\tau)$，其逼近精度为$O(\tau^p+h^4)$．

Alexander，Morris和Bona，Pitchard，Scott应用有限元方法计算问题(8-5-1)，例如，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial u^h}{\partial t}+u^h\frac{\partial u^h}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u^h}{\partial x}-\delta\frac{\partial^3 u^h}{\partial t\partial x^2}\right)\\ \qquad\left(v^h+h\dfrac{\partial v^h}{\partial x}\right)dx=0, & \forall v_n\in\Phi_h,\ t>0,\\ u^h(x,\ 0)=P_h u_0(x), & x\in\bar{I},\end{cases}$$

其中$\Phi_h\subset H_p^2(I)$．

Guo Benyu，Manoranjan应用谱方法计算(8-5-1)，并严格估计了计算误差．近来，Guo Benyu，Cao Weiming应用带限制算子的拟谱方法计算(8-5-1)．他们定义

$$J_5(v,\ \varphi)=\frac{1}{3}P_c\left(\varphi R_p^N\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(P_c(\varphi R_p^N(v)),$$

相应的格式为

$$\begin{cases} u_t^N(x,\ t)+R_p^N J_n(u^N(x,\ t)+\sigma\tau u_t^N(x,\ t), \\ \quad u^N(x,\ t))+\alpha R_p^N\left(\dfrac{\partial}{\partial x}u^N(x,\ t)\right)-\delta\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_t^N(x,\ t)=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d=x_j,\ t\in S_\tau, \\ u(x,\ 0)=P_c u_0(x). \qquad\qquad\qquad\qquad x=x_j. \end{cases}$$

计算结果表明，当 δ 很小时，R_p^N 的作用十分重要.

§6　Klein-Gordon 方程和 sine-Gordon 方程的数值研究

6.1 Klein-Gordon 方程

在理论物理等问题中，需要求解下列 Klein-Gordon 方程的周期解，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta u+d|u|^\alpha u=0 & x\in \boldsymbol{R},\ t>0, \\ u(x+1,\ t)=u(x,\ t) & x\in \boldsymbol{R},\ t\geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x), & x\in \boldsymbol{R}, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \boldsymbol{R}, \end{cases} \tag{8-6-1}$$

其中 $\alpha>0,\ d\geqslant 0,\ \beta\leqslant 0$，并记 $p=\alpha+2$. 它的解满足 $E(t)=E(0)$，其中

$$E(t)=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\beta u^2+\frac{2d}{p}|u|^p\right]dx.$$

Strauss，Vazquez对 $\alpha=2$ 的问题(8-6-1)构造了二次守恒型格式，并进行了数值试验，郭本瑜则考虑了一般情况．为此，定义差分算子

$$G(v(x,\ t))=d\int_0^1|\sigma v(x,\ t+\tau)+(1-\sigma)v(x,\ t-\tau)|^\alpha[\sigma v(x,t+\tau)+(1-\sigma)v(x,\ t-\tau)]d\sigma.$$

因为 $\dfrac{d}{dz}(|z|^p)=p|z|^\alpha z$，所以

$$(v_{\hat t}(t),\ G(v(t))_h=\frac{d}{p}(\|v(t)\|_{l^p,h}^p)_{\hat t}.$$

计算(8-6-1)的一类格式是

$$\begin{cases} u_{t\bar t}^h(x,\ t)-u_{x\bar x}^h(x,\ t)+\dfrac{\beta}{2}(u^h(x,\ t+\tau) \\ \quad +u^h(x,\ t-\tau))+G(u^h(x,\ t))=0, & x\in I_h,\ t\in S_\tau, \\ u^h(x+1,\ t)=u^h(x,\ t), & x\in \bar I_h,\ t\in S_\tau, \\ u_t^h(x,\ 0)=u_1(x), & x\in \bar I_h, \\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), & x\in \bar I_h, \end{cases}$$

它的解满足离散形式的守恒律，即 $E_h(t)=E_h(0)$，其中

$$\begin{aligned} E_h(t)=&\|u_t^h(t-\tau)\|_h^2+\frac{\beta}{2}(\|u^h(t)\|_h^2+\|u^h(t-\tau)\|_h^2)+\frac{1}{2}(|u^h(t)|_{1,h}^2 \\ &+|u^h(t-\tau)|_{1,h}^2)-\frac{\tau^2}{2}|u_t^h(t-\tau)|_{1,h}^2+\frac{d}{p}(\|u^h(t)\|_{l^p,h}^p \\ &+\|u^h(t-\tau)\|_{l^p,h}^p). \end{aligned}$$

有时还需要计算多维空间中的 Klein-Gordon 方程．如果解是球对称的，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}-\dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\beta u+d|u|^\alpha u=0, & \rho\in \boldsymbol{R}^+, t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}(0,\ t)=0, & t\geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\rho,\ 0)=u_1(\rho), & \rho\in \boldsymbol{R}^+, \\ u(\rho,\ 0)=u_0(\rho), & \rho\in \boldsymbol{R}^+. \end{cases} \tag{8-6-2}$$

可以证明，它的解满足 $E(t)=E(0)$，其中

$$E(t)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\beta u^2+\frac{d}{p}|u|^p\right]\rho^2 d\rho.$$

记 $\Omega_h^\rho=\{\rho|\rho=jh,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，其闭包为 $\bar\Omega_h^\rho$，

$$B_h(v(\rho)) = -v_{\rho\bar{\rho}}(\rho) - \frac{8(\rho+h)}{(2\rho+h)^2} v_\rho(\rho).$$

计算(8-6-2)的一类格式为

$$\begin{cases} u^h_{\bar{t}t}(\rho,\ t) + B_h(u^h(\rho,\ t)) + \dfrac{\beta}{2}(u^h(\rho,\ t+\tau) + u^h(\rho,\ t-\tau)) \\ \quad + G(u^h(\rho,\ t)) = 0, & \rho \in \Omega^\rho_h,\ t \in \mathring{S}_\tau, \\ u^h_{\bar{\rho}}(0,\ t) = 0, & t \in S_\tau, \\ u^h_t(\rho,\ 0) = u_1(\rho), & \rho \in \bar{\Omega}^\rho_h, \\ u^h(\rho,\ 0) = u_0(\rho), & \rho \in \bar{\Omega}^\rho_h. \end{cases}$$

它的解也满足离散的守恒律.

6.2 sine-Gordon 方程

另一个重要的二阶非线性波动方程是 sine-Gordon 方程，其周期解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u, & x \in \boldsymbol{R},\ t > 0, \\ u(x+1,\ t) = u(x,\ t), & x \in \boldsymbol{R},\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = u_1(x), & x \in \boldsymbol{R}, \\ u(x,\ 0) = u_0(x), & x \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{8-6-3}$$

它的解满足守恒律 $E(t) = E(0)$，其中

$$E(t) = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\cos u\right] dx.$$

Perring, Skyrme 最早计算了(8-6-3). 他们的方法基于特征的概念，即令 $v = \dfrac{du}{dt}$，并构造下列计算格式

$$\begin{cases} v^h\left(x,\ t+\dfrac{\tau}{2}\right) = v^h\left(x,\ t-\dfrac{\tau}{2}\right) + \tau[u^h_{x\bar{x}}(x,\ t) - \sin u^h(x,\ t)], \\ u(x,\ t+\tau) = u(x,\ t) + \tau v\left(x,\ t+\dfrac{\tau}{2}\right). \end{cases}$$

Guo Benyu, Pascual, Rodrignez, Vazquez 则构造了下列

差分格式

$$\begin{cases} u^h_{\bar{t}t}(x, t) - u^h_{x\bar{x}}(x, t) = G(u^h(x, t)), & x\in I_h, \ t\in \mathring{S}_\tau, \\ u^h(x+1, t) = u^h(x, t), & x\in \bar{I}_h, \ t\in S_\tau, \\ u^h_t(x, 0) = u_1(x), & x\in \bar{I}_h, \\ u^h(x, 0) = u_0(x), & x\in \bar{I}_h, \end{cases}$$

其中 $$G(v(x, t)) = \frac{\cos v(x, t+\tau) - \cos v(x, t-\tau)}{v(x, t+\tau) - v(x, t-\tau)}.$$

上述格式的解满足 $E_h(t) = E_h(\tau)$, 其中

$$E_h(t) = \| u^h_t(t-\tau) \|^2_h + \frac{1}{2}(|u^h(t)|^2_{1,h} + |u^h(t-\tau)|^2_{1,h}) - \frac{\tau^2}{2}|u^h_t(t-\tau)|^2_{1,h} - h\sum_{x\in I_h}[\cos u(x, t) + \cos u(x, t-\tau)].$$

近年来，由于光学、电学等学科研究的需要，促进人们研究 sine-Gordon 方程的初、边值问题. 例如 Bishop, Krumhansland, Trullinger 等人. 不过，过去一般只研究具有齐次边值条件的问题. 最近, Guo Benyu, Yan Xiaopu 则考虑了下列问题,:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u, & 0<x<1, \ t>0, \\ u(0, t) = g_0(t), & t\geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, t) = g_1(t), & t\geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases} \tag{8-6-4}$$

它的解满足

$$E(t) = E(0) + 2\int_0^t \left[\frac{dg_0}{d\xi}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \xi) - g_1(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \xi) \right] d\xi,$$

其中

$$E(t)=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2\cos u\right]dx.$$

设 $h=\frac{1}{N}$，I_h，$(v, w)_h$ 和 $\|v\|_h$ 的定义同本章§1．计算(8-6-4)的一类格式为

$$\begin{cases} u_{tt}^h(x, t)-u_{x\bar{x}}^h(x, t)=G(u^h(x, t)), & x\in I_h,\ t\in \mathring{S}_\tau, \\ u^h(0, t)=g_0(t), & t\in S_\tau, \\ u_{\bar{x}}^h(1, t)=g_1(t), & t\in S_\tau, \\ u_t^h(x, 0)=u_1(x), & x\in \bar{I}_h, \\ u^h(x, 0)=u_0(x), & x\in \bar{I}_h. \end{cases}$$

它的解满足

$$E_h(t)=E_h(\tau)+2\tau\sum_{\substack{\xi\in\mathring{S}_\tau\\ \xi\leqslant t-\tau}}B(u^h(\xi), u_{\hat{t}}^h(\xi)),$$

其中

$$E_h(t)=\|u_t^h(t-\tau)\|_h^2+\frac{1}{2}(|u^h(t)|_{1,h}^2+|u^h(t-\tau)|_{1,h}^2)$$

$$-\frac{\tau^2}{2}|u_t^h(t-\tau)|_{1,h}^2-h\sum_{x\in I_h}[\cos u(x, t)+\cos u(x, t-\tau)],$$

$$B(v(t), w(t))=\frac{1}{2}v_{\bar{x}}(1, t)(w(1-h, t)+w(1, t))$$

$$-\frac{1}{2}v_x(0, t)(w(0, t)+w(h, t)).$$

Guo Benyu, Yan Xiaopu 对 sine-Gordon 方程的初、边值问题进行了数值研究．先考虑下列问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin u, & x\in \boldsymbol{R}^+,\ t>0, \\ u(0, t)=g_0(t), & t\geqslant 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0, & x\in \overline{\boldsymbol{R}}^+, \\ u(x, 0)=0, & x\in \overline{\boldsymbol{R}}^+, \end{cases}$$

其中

$$g_0(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<d,\\ H, & d\leqslant t\leqslant D+d,\\ 0, & t>D+d.\end{cases} \tag{8-6-5}$$

计算结果表明，对于不同的 H 和 D，会形成两类不同的波形，分别记为 a 和 b，见图 8-3、8-4 和表 8-5.

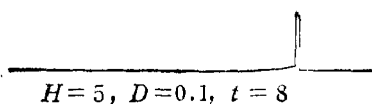


图 8-3

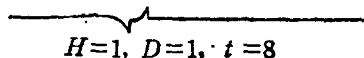


图 8-4

表 8-5　不同 H, D 所对应的波形 a 和波形 b

H \ D	0.1	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	a	b	b	b	b	b	b	b	b
0.25	a	b	b	b	b	b	b	b	b
0.5	a	b	b	b	b	b	b	b	b
0.75	a	b	b	b	b	b	b	b	b
1	a	b	b	b	b	b	b	b	b
1.25	a	b	b	b	b	b	b	b	b
1.5	a	b	b	b	b	b	b	b	b
3	a	a	b	b	b	b	b	b	b
5	a	a	a	a	a	a	a	a	a
10	a	a	a	a	a	a	a	a	a

其次，考虑下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin u, & 0<x<1,\ t>0, \\ u(0,\ t)=g_0(t), & t\geqslant 0, \\ u(1,\ t)=g_1(t), & t\geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x), & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

其中 $g_1(t)$ 与 $g_0(t)$ 相类似．计算结果表明，当两个分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 处出发的孤立波发生碰撞后，它们各自保形地继续前进，图 8-5～图 8-14 显示了这种碰撞过程，其中 $g_0(t)=g_1(t)$ 由(8-6-5)给定，$H=5$，$D=0.5$．

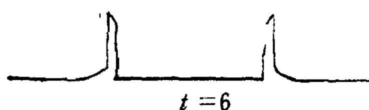

$t=6$

图 8-5

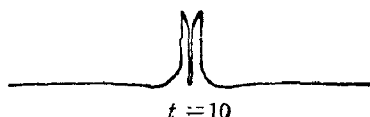

$t=10$

图 8-6

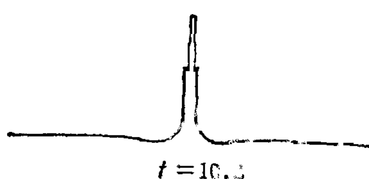

$t=10.2$

图 8-7

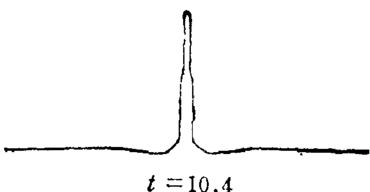

$t=10.4$

图 8-8

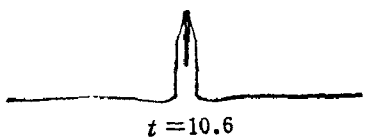

$t=10.6$

图 8-9

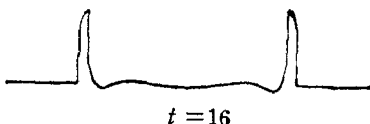
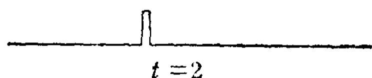

$t=16$

图 8-10

如果边界上满足下列条件，

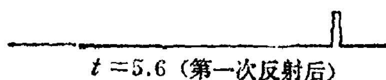
$$u(0,\ t)=g_0(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,\ t)=0, \quad t\geqslant 0,$$

其中 $g_0(t)$ 如公式(8-6-5)所示，那末，当孤立波在 $x=1$ 处发生反射时波形不变地反向而行．当孤立波从 $x=0(t\geqslant D+d)$ 处发生反射时则波形翻转，然后反向而行，见图 8-11～图 8-14，其中 $H=3, D=0.1$．



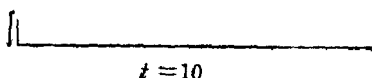
$t=2$

图 8-11



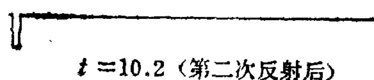
$t=5.6$（第一次反射后）

图 8-12



$t=10$

图 8-13



$t=10.2$（第二次反射后）

图 8-14

对于更一般的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(u),$$

其中 $F'(v)=f(v)$，则可应用下列差分格式计算

$$u_{tt}^h(x,\ t)-u_{xx}^h(x,\ t)=\frac{F(u^h(x,\ t+\tau))-F(u^h(x,\ t-\tau))}{u^h(x,\ t+\tau)-u^h(x,\ t-\tau)}.$$

它的解也满足离散形式的守恒律．Ablowitz, Kruskal, Ladik 则构造了另一种算法，他们引入 $w(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)$，并取 $h=\tau$，于是有下列格式：

$$\begin{cases} v^h(x,\ 0)=\frac{1}{2}(u_0(x)+u_0(x+h))+\frac{h}{4}(w(x)+w(x+h)) \\ \qquad +\frac{h^2}{8}f\left(\frac{u_0(x)+u_0(x+h)}{2}\right), \\ u^h(x,\ t+\tau)=-u^h(x,\ t)+v^h(x,\ t)+v^h(x-h,\ t) \\ \qquad +\frac{h^2}{4}f\left(\frac{v^h(x,\ t)+v^h(x-h,\ t)}{2}\right), \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
v^h(x,\ t+\tau)=-v^h(x,\ t)+u^h(x+h,\ t+\tau)+u^h(x,\ t+\tau) \\
\qquad\qquad +\dfrac{h^2}{4}f\left(\dfrac{u^h(x+h,\ t+\tau)+u^h(x,\ t+\tau)}{2}\right).
\end{cases}
$$

可以应用有限元方法，谱方法或拟谱方法计算本节中所讨论的各种方程．但是，在这些方程中含有 u^3，$\sin u$ 和 $f(u)$ 等项，因此计算很复杂，故难实际应用．不过，乘积法的思想，可推广到有限元方法，谱方法和拟谱方法，即用下式来逼近 $g(v)$，

$$
g(v)\approx\sum_{j=1}^{N}g(v_j^h(t))\phi_j(x).
$$

§7　非线性 Schrödinger 方程和 Dirac 方程的数值研究

在量子力学中，经常需要计算下列非线性 Schrödinger 方程

$$
\begin{cases}
i\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha|u|^2u=0, & x\in\boldsymbol{R},\ t>0, \\
u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in\boldsymbol{R},
\end{cases}
\tag{8-7-1}
$$

其中 $\alpha\geqslant 0$，$u(x,\ t)$ 是复值函数．若 $u\in L^\infty(0,\ +\infty;\ L^4(\boldsymbol{R})\cap H^1(\boldsymbol{R}))$，则 $E_1(t)=E_1(0)$，$E_2(t)=E_2(0)$，其中

$$
E_1(t)=\int_{\mathbf{R}}|u(x,\ t)|^2dx,
\tag{8-7-2}
$$

$$
E_2(t)=\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right|^2dx-\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbf{R}}|u(x,\ t)|^4dx.
\tag{8-7-3}
$$

关于计算 (8-7-1) 的早期工作有 Yuen, Lake, 郭本瑜, Ablowitz, Ladik 等人，最近，Zhu Youlan 和 Guo Benyu 证明了某些算法的收敛性．设 $\boldsymbol{R}_h=\{x|x=0,\ \pm h,\ \pm 2h,\cdots\}$，$(v,\ w)_h^*$，$\|v\|_h^*$，$|v|_{1,h}^*$ 和 $\|v\|_{l^p,h}^*$ 的定义与 $(v,\ w)_h$，$\|v\|_h$，$|v|_{1,h}$ 和 $\|v\|_{l^p,h}$ 相类似，但求和记号是对一切 $x\in\boldsymbol{R}_h$ 而取的．计算(8-7-1) 的一类格式为

$$\begin{cases} iu_t^h(x,\ t)+\frac{1}{2}(u_{x\bar{x}}^h(x,\ t)+u_{x\bar{x}}^h(x,\ t+\tau))+\frac{\alpha}{8}|u^h(x,t) \\ \quad +u^h(x,\ t+\tau)|^2(u^h(x,\ t)+u^h(x,\ t+\tau))=0, \quad x\in \boldsymbol{R}_h, t\in S_\tau, \\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), \quad x\in \boldsymbol{R}_h. \end{cases}$$

不难证明，它的解满足 $\|u^h\|_h^{*2}=\|u_0\|_h^{*2}$，它是守恒律(8-7-2)的离散模拟.

Defour, Fortin, Payne 提出了另一类格式，即

$$\begin{cases} iu_t^h(x,\ t)+\frac{1}{2}(u_{x\bar{x}}^h(x,\ t)+u_{x\bar{x}}^h(x,\ t+\tau))+\frac{\alpha}{4}(|u^h(x,\ t)|^2 \\ \quad +|u^h(x,t+\tau)|^2)(u^h(x,t)+u^h(x,t+\tau))=0, \quad x\in \boldsymbol{R}_h, t\in S_\tau, \\ u^h(x,\ 0)=u_0(x), \quad x\in \boldsymbol{R}_h. \end{cases}$$

它的解不仅满足 $\|u^h(t)\|_h^{*2}=\|u_0\|_h^{*2}$，而且 $\widetilde{E}_h(t)=\widetilde{E}_h(0)$，

其中
$$\widetilde{E}_h(t)=|u^h(t)|_{1,h}^{*2}-\frac{\alpha}{2}\|u^h(t)\|_{l^4,h}^{*4}.$$

此外，Griffith, Mitchell, Morris 构造了计算(8-7-1)的预估校正格式.

最近，Kaup, Hansen 应用数值方法研究了非线性 Schrödinger 方程初、边值问题，其中 $u_0(x)\equiv 0$，

$$u(0,\ t)=Ae^{-100(t-t_0)^2}.$$

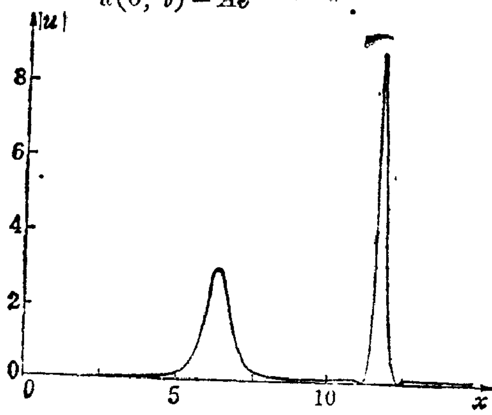


图 8-15 $A=4.5,\ t=1.5$

计算结果表明，此类问题也具有孤立子解．有关的图形可见图8-15、图8-16．

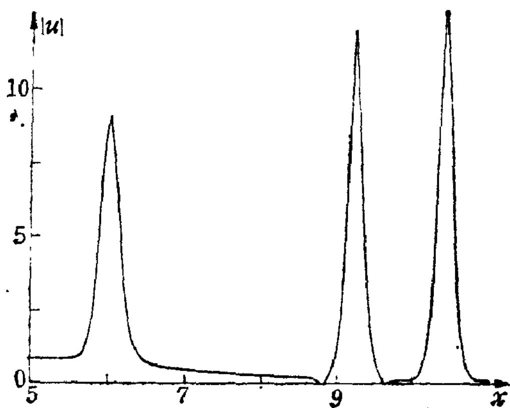


图 8-16　$A=6.5,\ t=1.0$

另一类重要的非线性波动方程是 Dirac 方程，即

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+imu+2i\lambda(|v|^2-|u|^2)u=0, & x\in\boldsymbol{R},\ t>0,\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-imv+2i\lambda(|u|^2-|v|^2)=0, & x\in\boldsymbol{R},\ t>0,
\end{cases}
\tag{8-7-4}
$$

其中 $u,\ v$ 为复值函数，m 和 λ 为常数．它的解满足 $E(t)=E(0)$，

其中
$$E(t)=\int_{\mathbf{R}}(|u(x,\ t)|^2+|v(x,\ t)|^2)dx.$$

Alvarez, Carreas, Kuo Penyu 和 Vazquez 等人采用了下列格式

$$
\begin{cases}
u_t^h(x,\ t)+\dfrac{1}{2}(v_{\hat{x}}^h(x,\ t)+v_{\hat{x}}^h(x,\ t+\tau))+\dfrac{im}{2}(u^h(x,\ t)\\
\quad +u^h(x,\ t+\tau))+\lambda P_1\left(\dfrac{(u^h x,\ t)+u^h(x,\ t+\tau)}{2},\right.\\
\quad \left.\dfrac{v^h(x,\ t)+v^h(x,\ t+\tau)}{2}\right)=0, \qquad x\in\boldsymbol{R}_h,\ t\in\boldsymbol{S}_\tau,
\end{cases}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& v_t^h(x, t)+\frac{1}{2}(u_{\bar{x}}^h(x, t)+u_{\bar{x}}^h(x, t+\tau))-\frac{im}{2}(v^h(x, t) \\
& \quad +v^h(x, t+\tau))+2i\lambda P_2\left(\frac{u^h(x, t)+u^h(x, t+\tau)}{2}\cdot\right. \\
& \quad \left.\frac{v^h(x, t)+v^h(x, t+\tau)}{2}\right)=0, \qquad x\in \boldsymbol{R}_h, t\in \boldsymbol{S}_\tau,
\end{aligned}
\right.
$$

其中 $P_1(y, z)=(|z|^2-|y|^2)$, $P_2(y, z)=(|y|^2-|z|^2)$. 不难证明, 上述格式的解满足 $E_h(t)=E_h(0)$, 其中

$$
E_h(t)=\|u(t)\|_h^{*2}+\|v(t)\|_h^{*2}.
$$

Alvarez, Kuo Penyu, Vazquez 还进行了一系列数值试验, 揭示了 Dirac 方程解的某些性质.

参 考 文 献

[1] 郭本瑜，不可压缩粘性流问题的数值方法和误差估计，科学通报，Vol.21(1976)，127～131

[2] 郭本瑜，非线性波动方程的数值解，计算数学，Vol. 4(1982)，46～55.

[3] 郭本瑜，K. D. V.-Burgers 方程谱方法的误差估计，数学学报，Vol. 28(1985)，1～15.

[4] 邬华谟，郭本瑜，K. D. V.-Burgers-R.L. W. 方程的高精度差分格式，计算数学，Vol. 5(1983)，90～98.

[5] K. Abe, O. Inoue, *Fourier expansion solution* of the Korteweg-de Vries equation, J. Comp. Phys., Vol. 34 (1980), 202～210.

[6] Kh. O. Abdulloev, I. L. Bogolubsky, V. G. Makhankov, One more example of inelastic solution interaction, Phys. Lett., Vol. 56A(1976) 427～433.

[7] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, A nonlinear difference scheme and inverse scattering, Studies in Appl. Math., Vol. 55(1976), 213～229.

[8] M. J. Ablowitz, M. D. Kruskal, J. F. Ladik, Solitary wave collisions, SIAM J. Appl. Math., Vol. 36(1979), 428～437.

[9] M. J. Ablowitz, H. Segur, Solitons and the inverse scattpering transform, SIAM Philadelphia, 1981.

[10] M. E. Alexander, J. L. Morris, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, J. Comp. Phys., Vol. 30(1979), 428～451.

[11] A. Alvarez, B. Garreas, Interaction *dynamics for* the solitary wave f a nonlinear Dirac model, Phys. Lett., Vol. 86A(1981), 327～332.

[12] A. Alvarez, Kuo Penyu, L., Vazquez, The numerical study of a nonlinear one dimensional Dirac equation, AMC, Vol. 13(1983), 1～15.

[13] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, Model equations for long waves in non-linear dispersive systems, Phil. Trans. Roy. Soc., A, Vol. 272(1972), 47～78.

[14] A. R. Bishop, J. A. Krumhansland, S. E. Trullinger, Soliton *in* condensed matter, A Parodigm Physica, D-1(1980), 1～44.

[15] J. L. Bona, W. G. Pritchard, L. R. Scott, Solitary wave interaction. Fluid Mechanics Research Institute, University of Essex, Report No. 94, 1980.

[16] Bui An Ton, Initial boundary-value problems for the Korteweg-de Vries equation, J. of differential equations, Vol. 25 (1977), 288~309.

[17] R. K. Bullough, P. J. Caudrey, The soliton and its history Solitons, Ed. by R. K. Bullough, P. J. Caudrey, Topics in current physics, 1980, 1~64, Springer-Verlag, Berlin.

[18] J. Canosa, J. Gazdag. The Korteweg-de Vries-Burgers equation, J. Comp. Phys., Vol. 23(1977), 393~403.

[19] C. K., Chu, L. W. Xiang, Y. Baransky, Solitary waves induced by boundary motion, CPAM, Vol. 36 (1983), 495~504.

[20] M. Defour, M. Fortin, G. Payne, Finite difference solutions of a nonlinear Schrödinger equation, J. Comp. Phys., Vol. 44(1981), 277~288.

[21] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, Solitons and nonlinear-wave equations, Academic Press, London, 1982.

[22] J. C. Eilbeck, G. R. McGuire, *Numerical study of the regularised* long-wave equation I: Numerical methods, J. Comp. Phys., Vol. 19(1975), 43~57.

[23] J. C. Eilbeck, G. R. McGuire, Numerical study of the regularis ed long-wave equation II. Interaction of solitary waves, J. Comp. Phys., Vol 23(1977), 63~73.

[24] B. Fornberg, G. B. Whitham, A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 289(1978), 373~404.

[25] J. Gazdag, Numerical convective schemes based on accurate computation of space derivative, J. Comp. Phys., Vol. 13(1973), 100~113.

[26] D. Gottlieb, S. A. Orszag, Numerical analysis of spectral methods, CBMS-NSF, Regional conference series in applied mathematics, Vol. 26, SIAM, Philadelphia, 1977.

[27] I. S. Greig, J. L. Morris, A hopscotch method for the Korteweg-de Vries equation, J. Comp. Phys., Vol. 20(1976), 64~80.

[28] D. F. Griffiths, A. R. Mitchell, J. L. Morris, A numerical study of the nonlinear Schrödinger equation, Dundee, Report NA/52, 1982.

[29] Guo Benyu, *On stability of discretization, Scientia Sinica, Series A*, Vol. 25(1982), 702~715.

[30] Guo Benyu, Numerical solution of an initial boundary value problem of the Korteweg-de Vries equation, Acta mathematica scientia, Vol. 5(1985), 337~348.

[31] Guo Benyu, The convergence of numerical method for nonlinear Schrödinger equaton, J. Comp. Math., Vol. 4(1986), 121~130.

[32] Guo Benyu, Cao Weiming, The Fourier pseudospectral method with a restrain operator for the R. L. W. equation, J. Comp. Phys,, Vol. 74 (1988), 48—53.

[33] Guo Benyu, V. S. Manoranjan, A spectral method for solving the RLW equation, IMA JNA, Vol. 5(1985), 307~318.

[34] Guo Benyu, P. J. Pascual M. J. Rodrignez, L. Vazquez, Numerical solution of the sine-Gordon equation, AMC, Vol. 18(1985), 1~14.

[35] Guo Benyu, J. A. C.Weideman, Solitary solution of an initial boundary problem of the Kortewegde Vries equation, in Proc. of ICNM, (1985), 696~702 Edited by Chien Wei-zang etl, Science Press, Beijing.

[36] Guo Benyu, Yan Xiaopu, Numerical study of an initial-boundary value problem of the sine-Gordon equation, to appear, iu Acta Mathematica scientia.

[37] R. Hirota, Exact solution of the Korteweg-de Vires equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett., Vol. 27(1971), 1192~1194.

[38] R. S. Hirsh, Problems by a compact differencing technique, Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics, J. Comp. Phys., Vol. 19(1975), 90~109.

[39] A. Jeffrey, T. Kakutani, Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centred around the Korteweg-de Vries equation, SIAM Review. Vol. 14(1972), 582~643.

[40] D.J. Kaup, P. J. Hansen, The forced nonlinear Schrödinger equation, NSF-ITP-85-22, 1985.

[41] H. O. Kreiss, J. Oliger, Stability of the Fourier method, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 16(1979), 421~433.

[42] Kuo Penyu, J. M. Sanz-Serna, Convergence of methods for the numerical solution of the Korteweg-de Vries equation, IMA JNA, Vol. 1 (1981), 215~221

[43] Kuo Penyu, Wu Huamo, Numerical solution of K. D. V. equation JMAA, Vol. 82(1981), 334~345.

[44] P. D. Lax, Almost periodic solutions of the K. D. V. equation, SIAM Review, Vol. 18(1976), 351~375.

[45] Ma Heping, Guo Benyu, The Fourier pseudospectral method with a restrain operator for the Korteweg-de Vries equation, J. Comp. Phys.,

Vol. 65(1986), 120~137.

[46] A. R. Mitchell. S. W. Schoomble, Finite element studies of solitons, Dundee, Report NA/47, 1981.

[47] R. M. Miura, The Korteweg-de Vries equation, A survey of results. SIAM Review, Vol. 18(1976), 412~459.

[48] A. C. Newell, Solitons in mathmatics and physics, SIAM, Philadelphia, 1985.

[49] P. J. Olver, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, Math. Proc. Camb. Phil., Sco., Vol. 85(1979), 143~160.

[50] D. H. Peregrine, Calculation of the development of an undular bore, J. Fluid Mech., Vol. 25(1966), 321~330.

[51] J. K. Perring, T. H. R. Skyrme, A model unified field equatoin, Nucl. Phys., Vol. 31(1962), 550~555.

[52] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Finite difference methods for initial* value problem, 2'nd edition, Interscience publishers, New York, 1967.

[53] J. M. Sanz-Serna, An explicit finite-difference scheme with exact conservation properties, J. Comp. Phys., Vol. 47(1982), 199~210.

[54] J. M. Sanz-Serna, I. Christie, Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves, J. Comp. Phys.,Vol. 39(1981), 94~102.

[55] S. W. Schoombie, Finite element methods for the Korteweg-de Vries *equation II, Petrov-Galerkin methods with splines*, Dundee Report NA/44, 1980.

[56] A.C. Scott, F. Y. Chu, D. W. McLaughlin, The soliton: A new concept in applied science, Proc. I E E E., 61(1973), 1443~1483.

[57] H. Schamel, K. Elsässer, The application of the spectral method to nonlinear wave propagation, J. Comp. Phys., Vol. 22(1976), 510~516.

[58] W. Strauss, L. Vazquez, Numerical solution of a nonlinear Klein-Gordon equation, J. Comp. Phys., Vol. 28(1976), 271~278.

[59] F. Tappert Numerical solntion of the Korteweg-de Vries equation and its step Fourier method, in"nonlinear wave motion", Ed. by Newell, A. C. (1974), 215~216. Providence.

[60] A. C. Vliegenthart, On finite difference methods for the Korteweg-de Vries equation, Journal of engineering mathematics, Vol. 5(1971),137~155.

[61] L. B. Wahlbin, A dissipative Galerkin method for the numerical solution of first order hyperbolic equations, Math. aspects of finite elements in partial differential equations, Ed, by Boor, C. De., Academic Press, 1974.

147～169.

[62] S. Watanabe, M. Ohishi, H. Tanaca, Coupled modes an approach to non-linear dispersive wave I, Recurrence of soliton, J. Phys. Soc., Japan. Vol. 42(1977), 1382～1390.

[63] R. Winthef, A conse vative finite element method for the Korteweg-de Vries equation, Math. of Comp., Vol. 34 (1980), 23～43.

[64] H. C. Yuen, B. M. Lake, Nonlinear deep water waves, Theory and experiment, Phys. Fluids, Vol. 18(1975), 956～960.

[65] H. C. Yuen, B. M. Lake, Instabilities of waves on deep water, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 12(1980), 303～334.

[66] N. J. Zabusky. M. D. Kruskal, 1965. Interaction of "solitnns" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., Vol. 15(1965), 240～243.

[67] Zhu Youlan, Implicite difference scheme for the generalized non-linear Schrödinger system, JCM, Vol. 1(1983), 116～129.

第九章

引力波孤立子

葛墨林

§1 引言

物理中的二阶非线性偏微分方程中，广义相对论是很重要的一类．在经典理论中，描述引力的广义相对论与黎曼几何有着密切的联系，通常，用 4 个独立变量(x^0, x^1, x^2, x^3)描述时空，此时，线元可表示为

$$dS^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{9-1-1}$$

由度规 $g_{\mu\nu}$ 可以定义克氏符号

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\rho\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}), \tag{9-1-2}$$

其中 $g_{\mu\nu,\rho}=\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$，相重指标代表求和．Ricci 张量定义为

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}+\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}-\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}. \tag{9-1-3}$$

真空中的引力场用爱因斯坦方程描述，

$$R_{\mu\nu}=0. \tag{9-1-4}$$

我们知道，克氏符号在广义坐标变换下不具有张量性质，但当$\{x\}$作坐标变换时，变换前后的标号是等价的．如果我们不用 $x^0=ct$，$x^3=z$ 来标号，而是用它们的线性组合

$$x^0=ct=\zeta-\eta, \quad x^3=z=\zeta+\eta. \tag{9-1-5}$$

表示，这里 ζ 与 η 称为光锥坐标，那么相应的 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ 中的分量指标代替 0、3 后，就可以经过组合用 ζ，η 表示. 以后为了方便，我们取 $c=1$ 的单位制.

关于 (9-1-4) 式的解，已经有许多的讨论，其严格解的讨论可参阅章末[1].有时具有某些对称性的解更使人感兴趣，因为此时往往有系统的办法可以求出一系列的严格解. 最典型的是度规仅仅依赖于两个变量的情况，也即存在两个 Killing 矢量的情况. 通常有两种理论：一种是仅仅依赖于 z 和 $\rho=[(x^1)^2+(x^2)^2]^{\frac{1}{2}}$ 两个变量，这时方程(9-1-4)退化为两部分，其中重要的部分称为 Ernst 方程；另一种则是依赖于 z 和 t 或 ζ 和 η，用以描述沿 z 轴传播的引力波最为方便，称为 Belinski-Zakharov 引力，简称 BZG(见章末[2]).

本章主要讨论 BZG 中的 Soliton (孤立子)解问题，除了详细阐明 BZG 的求解方案，我们还将求出一种新型的孤立子解，它是一种引力波的新形态.

BZG 从下列线元出发，

$$-dS^2=f(-dt^2+dz^2)+g_{ab}dx^a dx^b,\quad a,\ b=1,\ 2,\quad (9\text{-}1\text{-}6)$$

其中 $f=f(z,\ t)$，$\|g_{ab}\|=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ 且 $g_{ab}=g_{ab}(z,\ t)$. 它在光锥坐标下可写为

$$-dS^2=4f(\zeta,\ \eta)d\zeta d\eta+g_{ab}(\zeta,\ \eta)dx^a dx^b.\qquad (9\text{-}1\text{-}7)$$

现在让我们计算出相应于(9-1-7)式的克氏符号. 以记号

$$\dot{A}=\frac{dA}{dS}$$

表示对线元的微商，则拉氏函数可写为

$$\mathfrak{L}=4f(\zeta,\ \eta)\dot{\zeta}\dot{\eta}+g_{ab}(\zeta,\ \eta)\dot{x}^a\dot{x}^b.\qquad (9\text{-}1\text{-}8)$$

对变量 ζ，η，x^a，分别求出其欧拉方程

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^\alpha}-\frac{d}{dS}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}=0,\quad x^\alpha=\zeta,\ \eta,\ x^1,\ x^2,\qquad (9\text{-}1\text{-}9)$$

再与短程线方程相比较,

$$\ddot{x}^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=0,\quad \mu,\ \nu=\zeta,\ \eta,\ x^1,\ x^2, \tag{9-1-10}$$

则可决定出相应的克氏符号. 例如, 当 $x^{\alpha}=\eta$, 则由(9-1-9)

$$\ddot{\eta}+(\ln f)_{,\eta}\dot{\eta}\dot{\eta}-\frac{1}{4}(g_{ab})_{,\zeta}\dot{x}^a\dot{x}^b=0, \tag{9-1-11}$$

由(9-1-10),

$$\ddot{\eta}+\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}\dot{\eta}\dot{\eta}+\Gamma^{\eta}_{\zeta\zeta}\dot{\zeta}\dot{\zeta}+2\Gamma^{\eta}_{\eta\zeta}\dot{\eta}\dot{\zeta}+\Gamma^{\eta}_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b=0, \tag{9-1-12}$$

于是得

$$\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}=(\ln f)_{,\eta},\quad \Gamma^{\eta}_{ab}=-\frac{1}{4}(g_{ab})_{,\zeta},\quad \Gamma^{\eta}_{\zeta\zeta}=\Gamma^{\eta}_{\eta\zeta}=0. \tag{9-1-13}$$

同理可得其它关系式. 不为零的克氏符号为

$$\Gamma^{\eta}_{\eta\eta}=(\ln f)_{,\eta},\quad \Gamma^{c}_{\eta b}=g^{ca}(g_{ab})_{,\eta},\quad \Gamma^{\eta}_{ab}=-\frac{1}{4}(g_{ab})_{,\zeta}, \tag{9-1-14}$$

$$\Gamma^{\zeta}_{\zeta\zeta}=(\ln f)_{,\zeta},\quad \Gamma^{c}_{\zeta b}=g^{ca}(g_{ab})_{,\zeta},\quad \Gamma^{\zeta}_{ab}=-\frac{1}{4}(g_{ab})_{,\eta}.$$

相应的在(0, 1, 2, 3)记号下的克氏符号不为零分量, 则为

$$\Gamma^{0}_{00}=\Gamma^{0}_{33}=\Gamma^{3}_{03}=\Gamma^{3}_{30}=\frac{1}{2}(\ln f)_{,t},\quad \Gamma^{0}_{ab}=\frac{1}{2f}(g_{ab})_{,t},$$

$$\Gamma^{3}_{33}=\Gamma^{3}_{00}=\Gamma^{0}_{30}=\Gamma^{0}_{03}=\frac{1}{2}(\ln f)_{,z},\quad \Gamma^{3}_{ab}=-\frac{1}{2f}(g_{ab})_{,z}, \tag{9-1-15}$$

$$\Gamma^{a}_{0b}=\Gamma^{b}_{0a}=\frac{1}{2}g^{ac}(g_{cb})_{,t},\ \Gamma^{a}_{3b}=\Gamma^{a}_{b3}=\frac{1}{2}g^{ac}(g_{cb})_{,z}.$$

定义

$$\det g=\alpha^2, \tag{9-1-16}$$

其中 g 表示 2×2 个元素 $g_{ab}(\zeta,\ \eta)$ 组成的矩阵, g^{-1} 为 g^{ab} 组成的矩阵, 易证

$$g^{ac}(g_{ca})_{,\eta}=2(\ln\alpha)_{,\eta},\quad \Gamma^{a}_{\eta a}=(\ln\alpha)_{,\eta}. \tag{9-1-17}$$

现在我们将由线元(9-1-2)式决定的克氏符号(9-1-14)代入 Ricci

张量

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\mu,\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}, \qquad (9\text{-}1\text{-}18)$$

并使之满足爱因斯坦方程(9-1-14)式，有

$$R_{\eta\eta}=(\ln\alpha)_{,\eta\eta}+\frac{1}{4}\operatorname{tr}\{(g^{-1}g_{,\eta})^2\}-(\ln f)_{,\eta}(\ln\alpha)_{,\eta}, \qquad (9\text{-}1\text{-}19)$$

$$R_{\zeta\zeta}=(\ln\alpha)_{,\zeta\zeta}+\frac{1}{4}\operatorname{tr}\{(g^{-1}g_{,\zeta})^2\}-(\ln f)_{,\zeta}(\ln\alpha)_{,\zeta}, \qquad (9\text{-}1\text{-}20)$$

$$R_{\zeta a}=0,\ R_{\eta a}=0,\ (\text{显然满足}) \qquad (9\text{-}1\text{-}21)$$

$$R_{ab}=2(g_{ab})_{\zeta\eta}+(g_{ab})_{\zeta}(\ln\alpha)_{\eta}+(g_{ab})_{\eta}(\ln\alpha)_{\zeta}-[g^{cd}(g_{cb})_{,\zeta}(g_{da})_{,\eta}+g^{cd}(g_{cb})_{,\eta}(g_{da})_{,\zeta}], \qquad (9\text{-}1\text{-}22)$$

则由 $R_{\eta\eta}=R_{\zeta\zeta}=0$ 得到

$$(\ln f)_{,\zeta}=\frac{(\ln f)_{,\zeta\zeta}}{(\ln\alpha)_{,\zeta}}+\frac{\operatorname{tr}(A^2)}{4\alpha\alpha_{,\zeta}}, \qquad (9\text{-}1\text{-}23)$$

$$(\ln f)_{,\eta}=\frac{(\ln f)_{,\eta\eta}}{(\ln\alpha)_{,\eta}}+\frac{\operatorname{tr}(B^2)}{4\alpha\alpha_{,\zeta}}, \qquad (9\text{-}1\text{-}23)^+$$

而由 $R_{ab}=0$ 推出

$$[\alpha(g_{ac})_{,\zeta}g^{cb}]_{,\eta}+[\alpha(g_{ac})_{,\eta}g^{cb}]_{,\zeta}=0, \qquad (9\text{-}1\text{-}24)$$

或写成矩阵形式

$$A_{,\eta}-B_{,\zeta}=0, \qquad (9\text{-}1\text{-}25)$$

$$A=-\alpha_{g,\zeta}g^{-1}, \quad B=\alpha g_{,\eta}g^{-1}. \qquad (9\text{-}1\text{-}26)$$

于是方程(9-1-4)被退耦成两组：2×2 矩阵函数 g 所满足的方程(9-1-25)，以及从已知 g 求出 f 的方程(9-1-23)，而后者主要通过积分即可进行计算．因此，我们主要研究方程(9-1-25)．由(9-1-25)可立即推出

$$\alpha_{,\zeta\eta}=0, \qquad (9\text{-}1\text{-}27)$$

亦即 α 满足二维达朗贝尔方程，于是有

$$\alpha=a(\zeta)+b(\eta), \qquad (9\text{-}1\text{-}28)$$

定义

$$\beta=a(\zeta)-b(\eta), \qquad (9\text{-}1\text{-}29)$$

它们以后很有用.

有了以上准备知识,下面集中讨论(9-1-25)的解.

§2 BZG 的解的一般讨论

由(9-1-26)式,其中包含了 $\alpha(z, t)=\alpha(\zeta, \eta)$,因此,通常的零曲率关系现在变为

$$A_{,\eta}+B_{,\zeta}+\alpha^{-1}[A, B]-\alpha^{-1}\alpha_{,\eta}A-\alpha^{-1}\alpha_{,\zeta}B=0, \quad (9-2-1)$$

其中$[A, B]=AB-BA$. 直接验证, 可知(9-1-25)是下面线性方程组的可积条件

$$D_1\psi=\frac{A}{\lambda-\alpha}\psi, \qquad D_2\psi=\frac{B}{\lambda+\alpha}\psi, \qquad (9-2-2)$$

其中

$$D_1=\partial_\zeta-\frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda-\alpha}\partial\lambda, \qquad D_2=\partial_\eta+\frac{2\alpha_{,\eta}\lambda}{\lambda+\alpha}\partial\lambda,$$

$\psi=\psi(\zeta, \eta, \lambda)$, λ 为任意复数,称为谱参数. 可积条件为

$$[D_1, D_2]=0,$$

考虑到(9-2-1)即得(9-1-25). 于是形如(9-2-2)、(9-2-3)的 Lax-pair 便成为我们求解 BZG 的出发点. 首先考虑相关的对称性与若干性质.

(1) 在(9-2-2)中令 $\lambda=0$, 得

$$\partial_\zeta\psi=-\frac{1}{\alpha}A\psi=g_{,\zeta}g^{-1}\psi,$$

$$\partial_\eta\psi=\frac{1}{\alpha}B\psi=g_{,\eta}g^{-1}\psi, \qquad (9-2-4)$$

即有

$$\psi(\zeta, \eta, \lambda=0)\equiv\psi(0)=g(\zeta, \eta). \qquad (9-2-5)$$

(2) 设 $\psi_0(\zeta, \eta, \lambda)$ 为某已知解,并设 $\psi(\zeta, \eta, \lambda)$ 为另一解,它与 ψ_0 存在关系

$$\psi(\zeta, \eta, \lambda)=\chi(\zeta, \eta, \lambda)\psi_0(\zeta, \eta, \lambda). \qquad (9-2-6)$$

将(9-2-6)代入(9-2-2)，则有

$$D_1\chi=\frac{1}{\lambda-\alpha}(A\chi-\chi A_0),$$
$$D_2\chi=\frac{1}{\lambda+\alpha}(B\chi-\chi B_0), \tag{9-2-7}$$

其中 A_0, B_0 为相应于 ψ 的量，而 A, B 则通过(9-2-2)联系于 ψ. 如果从已知的 A_0, B_0 能解出 χ, 则可定义出新的

$$g=\psi(\zeta,\eta,\lambda=0)=\chi(\zeta,\eta,\lambda=0)\psi_0(\zeta,\eta,\lambda=0)=\chi g_0, \tag{9-2-8}$$

但原有的 g_0, 新解 g 或相应的 ψ_0, ψ, 均应满足引力场要求的对称性.

(3) 由于 $g_{ab}=g_{ba}$ 且为实，故必须有 $\tilde{g}=g$, ~ 表示转置，且当 λ 为实时 $\psi(\lambda)$ 为实. 这些要求导致复共轭关系为

$$\bar{\psi}(\lambda)=\psi(\lambda), \quad 即 \quad \bar{\chi}(\lambda)=\chi(\lambda). \tag{9-2-9}$$

又因为(9-2-7)式当 $\lambda\to\frac{\alpha^2}{\lambda}$ 时不变，故可证

$$\chi'(\lambda)=g\tilde{\chi}^{-1}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)g_0^{-1} \tag{9-2-10}$$

也必满足(9-2-7)式. 为了保证 $\tilde{g}=g$, 可选择 $\chi'(\lambda)=\chi(\lambda)$, 于是

$$g=\chi\left(\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)g_0\tilde{\chi}(\lambda). \tag{9-2-11}$$

当 $\lambda\to0$ 有 $g=\chi(\infty)g_0\tilde{\chi}(0)$, 取其转置有

$$g=\chi(0)g_0\tilde{\chi}(\infty),$$

由此推出

$$\chi(\infty)=I. \tag{9-2-12}$$

在以上和今后，为了强调这些量对谱参数 λ 的依赖关系，有时省略 ζ 与 η 的系量记号.

还要注意变换(9-2-8)式并不能保证行列式值 α^2 不变，因为当 $\det\chi(0)\neq1$ 时，显然 $\det g=\alpha^2\det\chi(0)$, 故当作变换(9-2-8)式求出新解 g 后，为了保证真正物理量的行列式仍为 α^2, 需要再规定

一次 g. 显然,如令

$$g_{ph}=\alpha(\det g)^{-\frac{1}{2}}g,\quad \det g_0=\alpha^2,\tag{9-2-13}$$

则必有 $\det g_{ph}=\alpha^2$. 相应于 g_{ph}, 可按(9-1-26)式定义 A_{ph} 与 B_{ph}, 它们仍满足同一方程,与 A, B 的关系为

$$A_{ph}=A-\alpha\{\ln[\alpha(\det g)^{-\frac{1}{2}}]\}_{,\zeta},\tag{9-2-14}$$

$$B_{ph}=B-\alpha\{\ln[\alpha(\det g)^{-\frac{1}{2}}]\}_{,\eta},$$

$$A_{ph}=-\alpha g_{ph,\zeta}g_{ph}^{-1},\quad B_{ph}=\alpha g_{ph,\eta}g_{ph}^{-1}.\tag{9-2-15}$$

以下考虑引力波孤立子解. 在 λ 复平面上引入 n 个孤立子的展开式

$$\chi=I+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R_k}{\lambda-\mu_k}+\frac{\bar{R}_k}{\lambda-\bar{\mu}_k}\right),\tag{9-2-16}$$

$$\chi^{-1}=I+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_k}{\lambda-\nu_k}+\frac{\bar{S}_k}{\lambda-\bar{\nu}_k}\right),\tag{9-2-17}$$

其中 R_k, S_k, μ_k, ν_k 及其复共轭均为 ζ, η 的函数. 由

$$\chi=g\tilde{\chi}^{-1}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)g_0^{-1},\tag{9-2-18}$$

且 g, g_0 不依赖于 λ, 故知如果 μ 为 χ 的极点,则 χ^{-1} 的极点为

$$\nu_k=\frac{\alpha^2}{\mu_k},\tag{9-2-19}$$

显然,由(9-2-9)知若 μ_k 是极点,则 $\bar{\mu}_k$ 必为极点.

将 χ 代入(9-2-7)式得

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{R_{k,\zeta}}{\lambda-\mu_k}+\frac{\bar{R}_{k,\zeta}}{\lambda-\bar{\mu}_k}\right)+\frac{R_k}{(\lambda-\mu_k)^2}\left(\mu_{k,\zeta}+\frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda-\alpha}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{R}_k}{(\lambda-\bar{\mu}_k)^2}\left(\bar{\mu}_{k,\zeta}+\frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda-\alpha}\right)\right]=\frac{1}{\lambda-\alpha}\left[A-A_0\right.$$
$$\left.+A\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R_k}{\lambda-\mu_k}-\frac{\bar{R}_k}{\lambda-\bar{\mu}_k}\right)-A_0\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R_k}{\lambda-\mu_k}-\frac{\bar{R}_k}{\lambda-\bar{\mu}_k}\right)\right]\tag{9-2-20}$$

要在 μ_k 处上式成立,必须有二阶极点项为零,于是有

$$\mu_{k,\zeta}=\frac{2\alpha,_\zeta\lambda}{\alpha-\lambda}\Big|_{\lambda=\mu_k}. \tag{9-2-21}$$

由 D_2，同理有

$$\mu_{k,\eta}=\frac{2\alpha,_\eta\lambda}{\alpha+\lambda}\Big|_{\lambda=\mu_k}. \tag{9-2-22}$$

由可积条件 $\mu_{k,\zeta\eta}=\mu_{k,\eta\zeta}$，令 $\mu_k=z$，(9-2-21)变为

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\frac{2\alpha,_\zeta z}{\alpha-z},\qquad \frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{2\alpha,_\eta z}{\alpha+z},$$

引入 $u=\frac{z}{\alpha}$，则方程

$$\frac{dz}{d\alpha}=u+\alpha\frac{du}{d\alpha}$$

的解为 $z^2+2\alpha z+\alpha^2=c(\eta)z$，再考虑到(9-2-22)式解出 $c(\eta)=4\alpha_\eta$，于是方程变为

$$\mu_k+2\beta+\frac{\alpha^2}{\mu_k}=2w_k, \tag{9-2-23}$$

容易解出

$$\mu_k=w_k-\beta\pm\sqrt{(w_k-\beta)^2-\alpha^2}, \tag{9-2-24}$$

$$\nu_k=\frac{\alpha^2}{\mu_k}=w_k-\beta\mp\sqrt{(w_k-\beta)^2-\alpha^2},$$

其中 w_k 为积分常数，注意 α, β 由(9-1-28)、(9-1-29)两式决定．将(9-2-7)式改写为

$$\frac{A}{\lambda-\alpha}=(D_1\chi)\chi^{-1}+\chi\frac{A_0}{\lambda-\alpha}\chi^{-1}, \tag{9-2-25}$$

$$\frac{B}{\lambda+\alpha}=(D_2\chi)\chi^{-1}+\chi\frac{B_0}{\lambda+\alpha}\chi^{-1}. \tag{9-2-26}$$

将 χ 代入(9-2-25)、(9-2-26)，并在 μ_k 与 $\bar{\mu}_k$ 附近分别作 $\oint_c d\lambda\cdots$ 围路积分，导致条件

$$R_{k,\zeta}\chi^{-1}(\mu_k)+\frac{1}{\mu_k-\alpha}R_kA_0\chi^{-1}(\mu_k)=0, \tag{9-2-27}$$

$$R_{k,\eta}\chi^{-1}(\mu_k)+\frac{1}{\mu_k+\alpha}R_kB_0\chi^{-1}(\mu_k)=0. \tag{9-2-28}$$

再由

$$\chi\chi^{-1}=\chi^{-1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R_k\chi^{-1}}{\lambda-\mu_k}+\frac{\overline{R}_k\chi^{-1}}{\lambda-\overline{\mu}_k}\right)=I, \tag{9-2-29}$$

当取 $\lambda\to\mu_k$ 时得到

$$R_k\chi^{-1}(\mu_k)=0. \tag{9-2-30}$$

引入

$$(R_k)_{ab}=n_a^{(k)}m_b^{(k)}, \tag{9-2-31}$$

$$(\chi^{-1}(\mu_k))_{ab}=q_a^{(k)}p_b^{(k)}, \tag{9-2-32}$$

则由(9-2-30)式知

$$m_c^{(k)}q_c^{(k)}=0 \tag{9-2-33}$$

(对 c 求和,对 k 不求和).

而(9-2-27)与(9-2-28)两式导致

$$(n_a^{(k)}m_c^{(k)})_{,\zeta}q_c^{(k)}p_b^{(k)}+\frac{1}{\mu_k-\alpha}n_a^{(k)}m_d^{(k)}(A_0)_{dc}q_c^{(k)}p_b^{(k)}=0,$$

再由(9-2-33)式,得到

$$\left(m_{a,\zeta}^{(k)}+m_b^{(k)}\frac{(A_0)_{ba}}{\mu_k-\alpha}\right)q_a^{(k)}=0, \tag{9-2-34}$$

$$\left(m_{a,\eta}^{(k)}+m_b^{(k)}\frac{(B_0)_{ba}}{\mu_k+\alpha}\right)q_a^{(k)}=0. \tag{9-2-35}$$

又由于 $a,\ b,\ c=1,\ 2,\ q_a^{(k)}=q_1^{(k)},\ q_2^{(k)};\ \ m_a^{(k)}=m_1^{(k)},\ m_2^{(k)}$, 故有 4 个未知量,但现在只有两个方程,条件不充分.

为了进一步找到关系,定义矩阵

$$M_k=(\psi_0^{-1})_{\lambda=\mu_k}=\psi_0^{-1}(\zeta,\ \eta,\ \mu_k). \tag{9-2-36}$$

由

$$-\psi_0^{-1}\frac{A_0}{\lambda-\alpha}=\partial_\zeta\psi_0^{-1}-\frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda-\alpha}\psi_{0,\lambda}^{-1},$$

当 $\lambda\to\mu_k$ 时,由于

$\left.\frac{2\alpha_{,\zeta}\lambda}{\lambda-\alpha}\right|_{\lambda=\mu_k}=-\mu_{k,\zeta}$ 以及 $\partial_\zeta\psi^{-1}(\zeta,\eta,\mu_k(\zeta,\ \eta))=\partial_\zeta\psi_0^{-1}+\mu_{k,\zeta}\psi_{0,\mu_k}^{-1}$,

可导出 M_k 满足的方程

$$M_{k,\zeta}+\frac{M_kA_0}{\mu_k-\alpha}=0,\qquad M_{k,\eta}+\frac{M_kB_0}{\mu_k+\alpha}=0. \tag{9-2-37}$$

将(9-2-37)与(9-2-34)、(9-2-35)比较, M_k 与 $m^{(k)}$ 成正比, 于是可有

$$m_a^{(k)}=m_{0c}^{(k)}(M_k)_{ca}\quad(\text{对 } c \text{ 求和, 对 } k \text{ 不求和}),\tag{9-2-38}$$

其中 $m_{0c}^{(k)}$ 为常数, 当存在(9-2-38)式后, 对任意 $q_a^{(k)}$, (9-2-37)式均与(9-2-34)、(9-2-35)一致, 又不影响求 R_k, 所以只要再有条件决定 $n_a^{(k)}$ 就可以了.

由(9-2-11)式, 且代入(9-2-16)式, 得

$$g=g_0\tilde{\chi}(\lambda)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R_k g_0\tilde{\chi}(\lambda)}{\alpha^2/\lambda-\mu_k}+\frac{\bar{R}_k g_0\tilde{\chi}(\lambda)}{\alpha^2/\lambda-\bar{\mu}_k}\right)\tag{9-2-39}$$

为使 $\lambda=\nu_k$ 时无奇异, 应满足

$$R_k g_0\tilde{\chi}(\nu_k)=0,\qquad \bar{R}_k g_0\tilde{\chi}(\bar{\nu}_k)=0.\tag{9-2-40}$$

例如, 考虑其中一个,

$$R_k g_0+R_k g_0\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\tilde{R}_k}{\nu_k-\mu_k}+\frac{\tilde{\bar{R}}_k}{\nu_k-\bar{\mu}_k}\right)=0,$$

再考虑到(9-2-31)式, 得

$$n_a^{(k)}\left(m_b^{(k)}(g_0)_{bd}+\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{m_b^{(k)}(g_0)_{bc}m_c^{(l)}n_d^{(l)}}{\nu_k-\mu_l}+\frac{m_b^{(k)}(g_0)_{bc}\bar{m}_c^{(l)}\bar{n}_d^{(l)}}{\nu_k-\bar{\mu}_l}\right)\right)=0,\tag{9-2-41}$$

它当 m, $\bar{m}$, g_0, ν_k, μ_l 为已知时, 可用于求解 n 与 $\bar{n}$ 列矢量. 定义

$$Q_{kl}=m_a^{(k)}(g_0)_{ab}m_b^{(l)}=L_a^{(k)}m_a^{(l)},\qquad L_a^{(k)}=m_b^{(k)}(g_0)_{ba},\tag{9-2-42}$$

则(9-2-40)给出两个方程

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{Q_{kl}}{\nu_k-\mu_l}n_a^{(l)}+\frac{Q_{kl}\bar{n}_a^{(l)}}{\nu_k-\bar{\mu}_l}\right)=-L_a^{(k)},\tag{9-2-43}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\bar{Q}_{kl}n_a^{(l)}}{\bar{\nu}_k-\mu_l}-\frac{\bar{Q}_{kl}\bar{n}_a^{(l)}}{\bar{\nu}_k-\bar{\mu}_l}\right)=-\bar{L}_a^{(k)},\tag{9-2-44}$$

其中 $Q_{kl}=m_a^{(k)}(g_0)_{ab}\bar{m}_b^{(l)}$, $\bar{Q}_{kl}=\bar{m}_a^{(k)}(g_0)_{ab}\bar{m}_b^{(l)}$. 上面两式是确定 $n_a^{(l)}$ 与 $\bar{n}_a^{(k)}$ 的方程组. 这样4个变量, 有4个式子((9-2-43), (9-2-44), (9-2-34), (9-2-35)), 即可决定出来.

对(9-2-25)，(9-2-26)，围绕 α 点对 λ 作回路积分，可得

$$A=2\alpha\alpha_{,\xi}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{R_k}{(\alpha-\mu_k)^2}+\frac{\bar{R}_k}{(\alpha-\bar{\mu}_k)^2}\right]\right\}\chi^{-1}(\alpha)+\chi(\alpha)A_0\chi^{-1}(\alpha), \quad (9\text{-}2\text{-}45)$$

$$B=2\alpha\alpha_{,\eta}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{R_k}{(\alpha+\mu_k)^2}+\frac{\bar{R}_k}{(\alpha+\bar{\mu}_k)^2}\right]\right\}\chi^{-1}(-\alpha)+\chi(-\alpha)B_0\chi^{-1}(-\alpha). \quad (9\text{-}2\text{-}46)$$

这样，我们便有了恰当方程决定(9-2-16)与(9-2-17)两式中的极点和留数。

§3 单孤立子解

单孤立子情况，只有一个极点，这时 $\mu=\bar{\mu}$，$R=\bar{R}$，

$$\chi=I+\frac{2R}{\lambda-\mu}, \quad (9\text{-}3\text{-}1)$$

$$\mu=w-\beta-[(w-\beta)^2-\alpha^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu=w-\beta+[(w-\beta)^2-\alpha^2]^{\frac{1}{2}}.$$

由上节一般理论，有

$$-L_a=\frac{2Qn_a}{\mu-\nu}, \quad 或\ n_a=(\mu^2-\alpha^2)\frac{L_a}{2\mu Q}. \quad (9\text{-}3\text{-}2)$$

引入

$$P_{ab}=\frac{1}{Q}L_a m_b=\frac{m_c(g_0)_{ca}m_b}{m_a(g_0)_{ab}m_b}, \quad (9\text{-}3\text{-}3)$$

满足

$$p^2=P,\ \mathrm{Tr}P=1,\ \det P=0, \quad (9\text{-}3\text{-}4)$$

$$R_{ab}=n_a m_b=\frac{\mu^2-\alpha^2}{2\mu}P_{ab}, \quad (9\text{-}3\text{-}5)$$

$$\chi=I+\frac{\mu^2-\alpha^2}{\mu(\lambda-\mu)}P, \qquad \chi^{-1}=I+\frac{\mu^2-\alpha^2}{\alpha^2-\lambda\mu}P. \quad (9\text{-}3\text{-}6)$$

容易验证 $\chi\chi^{-1}=I$。我们有

$$g=\left(I-\frac{\mu^2-\alpha^2}{\mu^2}P\right)g_0, \tag{9-3-7}$$

$$f_{ph}=\frac{c}{\sqrt{\alpha}}\frac{Q\mu^2}{(\alpha^2-\mu^2)}f_0, \tag{9-3-8}$$

$$g_{ph}=\frac{\mu}{\alpha}\left(I-\frac{\mu^2-\alpha^2}{\mu^2}P\right)g_0. \tag{9-3-9}$$

由(9-1-28)与(9-1-29)，易证

$$\alpha^2-\mu^2=2\mu[(w-2a)(w+2b)]^{\frac{1}{2}},\ w\text{ 为积分常数.} \tag{9-3-10}$$

现在具体讨论 BZG 原始文章的单孤立子解(见章末[2])．他们选择种子解为

$$g_0=\begin{pmatrix}\alpha^{2s_1} & 0\\ 0 & \alpha^{2s_2}\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}s_1&=\frac{1}{2}+q,\\ s_2&=\frac{1}{2}-q.\end{aligned} \tag{9-3-11}$$

我们将通过这个例子说明具体的求解步骤．由(9-3-11)式定出

$$A_0=-2\alpha_{,\zeta}\begin{pmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix}, \tag{9-3-12}$$

$$B_0=2\alpha_{,\eta}\begin{pmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix}. \tag{9-3-13}$$

由 $(\ln f)_{,\zeta}=[\ln(\ln\alpha)_{,\zeta}]_{,\zeta}+\dfrac{1}{4\alpha\alpha_{,\zeta}}\cdot 4\alpha_{,\zeta}\alpha_{,\zeta}(s_1^2+s_2^2)$ 以及 $(\ln f)_{,\eta}$ 的形式，可以解出

$$f_0=c_0\alpha_{,\zeta}\alpha_{,\eta}\alpha^{s_1^2+s_2^2-1},\ c_0\text{ 为任意常数.} \tag{9-3-14}$$

将(9-3-12)、(9-3-13)两式代入(9-2-2)式中，得

$$\begin{aligned}D_1\psi_0&=\frac{-2\alpha_{,\zeta}}{\lambda-\alpha}\begin{pmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{11}^0 & \psi_{12}^0\\ \psi_{12}^0 & \psi_{22}^0\end{pmatrix},\\ D_2\psi_0&=\frac{2\alpha_{,\eta}}{\lambda+\alpha}\begin{pmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{11}^0 & \psi_{12}^0\\ \psi_{12}^0 & \psi_{22}^0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{9-3-15}$$

当 $\lambda=0$, 有

$$\psi_{11}^0|_{\lambda\to0}=\alpha^{2s_1},\qquad \psi_{21}^0|_{\lambda\to0}=0,$$
$$\psi_{12}^0|_{\lambda\to0}=0,\qquad \psi_{22}^0|_{\lambda\to0}=\alpha^{2s_2}. \tag{9-3-16}$$

另一方面, 考虑到

$$D_i\left(\frac{\alpha^2}{\lambda}+2\beta+\lambda\right)=0\quad(i=1,\ 2), \tag{9-3-17}$$

容易证明

$$D_1(\alpha^2+2\beta\lambda+\lambda^2)=\left(\frac{-2\alpha_{,\zeta}}{\lambda-\alpha}\right)(\alpha^2+2\beta\lambda+\lambda^2), \tag{9-3-18}$$

以及 D_2 类似的式子. 将(9-3-18)与(9-3-15)比较, 可选定

$$\psi_0=\begin{pmatrix}(\alpha^2+2\beta\lambda+\lambda^2)^{s_1} & 0\\ 0 & (\alpha^2+2\beta\lambda+\lambda^2)^{s_2}\end{pmatrix}, \tag{9-3-19}$$

从而易得

$$\psi_0^{-1}=\begin{pmatrix}(\alpha^2+2\beta\lambda+\lambda^2)^{s_1-1} & 0\\ 0 & (\alpha^2+2\beta\lambda+\lambda^2)^{s_2-1}\end{pmatrix}. \tag{9-3-20}$$

注意 $2w=\dfrac{\alpha}{\mu}+2\beta+\mu$, 上式变为

$$M=(\psi_0^{-1})_{\lambda=\mu}=\begin{bmatrix}M_{11} & 0\\ 0 & M_{22}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}(2w\mu)^{-s_1} & 0\\ 0 & (2w\mu)^{-s_2}\end{pmatrix}. \tag{9-3-21}$$

从而

$$M_1=m_{0c}M_{c1}=m_{01}(2w\mu)^{-s_1},$$
$$m_2=m_{0c}M_{c2}=m_{02}(2w\mu)^{-s_2}, \tag{9-3-22}$$

即有

$$Q=(m_{01})^2(2w\mu)^{-2s_1}\alpha^{2s_1}+(m_{02})^2(2w\mu)^{-2s_2}\alpha^{2s_2}, \tag{9-3-23}$$

$$P_{ab}=\frac{1}{Q}\,m_c(g_0)_{ca}m_b, \tag{9-3-24}$$

其矩阵形式为

$$P=\frac{1}{Q}\begin{pmatrix}m_1\alpha^{2s_1}m_1 & m_1\alpha^{2s_1}m_2\\ m_2\alpha^{2s_2}m_1 & m_2\alpha^{2s_2}m_2\end{pmatrix}, \tag{9-3-25}$$

从而

$$(g_{ph})_{ab}=\frac{\mu}{\alpha}\left(\delta_{ac}-\frac{\mu^2-\alpha^2}{\mu^2}P_{ac}\right)(g_0)_{cb}, \qquad (9\text{-}3\text{-}26)$$

对任意 α 即有

$$\begin{aligned}(g_{ph})_{11}&=\alpha^{2s_1}\left\{\frac{\mu}{\alpha}-\frac{\mu^2-\alpha^2}{\alpha\mu Q}\,\alpha^{2s_1}(m_{01})^2(2w\mu)^{-2s_1}\right\},\\ (g_{ph})_{22}&=\alpha^{2s_2}\left\{\frac{\mu}{\alpha}-\frac{\mu^2-\alpha^2}{\alpha\mu Q}\,\alpha^{2s_2}(m_{02})^2(2w\mu)^{-2s_2}\right\}, \qquad (9\text{-}3\text{-}27)\\ (g_{ph})_{12}&=\frac{\alpha^2-\mu^2}{\alpha\mu}\cdot\frac{\alpha^2}{Q}\cdot m_{01}m_{02}(2w\mu)^{-1},\\ f_{ph}&=-\frac{c_0c\mu^2Q}{(\alpha^2-\mu^2)\sqrt{\alpha}}\,\alpha_{,\xi}\alpha_{,\eta}\alpha^{-2s_1s_2},\end{aligned}$$

m_{0i}, c_0, c 为任意常数.

当选

$$a(\zeta)=\zeta-\frac{w}{2}, \qquad b(\eta)=-\eta-\frac{w}{2}, \qquad (9\text{-}3\text{-}28)$$

则有 $\alpha=t$, $\beta=z+w$, 此时

$$\mu=-z-(z^2-t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu=-z+(z^2-t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad |z|\geqslant t.$$

引入

$$e^{\gamma}=\left(\frac{-\mu}{\alpha}\right)^2=\left[\frac{z}{t}+\left(\frac{z^2}{t^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2, \qquad (9\text{-}3\text{-}29)$$

可推得

$$Q=(m_{01})^2(2w)^{-2s_1}e^{-s_1\gamma}+(m_{02})^2(2w)^{-2s_2}e^{-s_2\gamma}. \qquad (9\text{-}3\text{-}30)$$

注意 $s_1=\frac{1}{2}+q$, $s_2=\frac{1}{2}-q$, 即得

$$Q=[(2m_{01}m_{02})(2w)^{-1}]e^{-\frac{\gamma}{2}}\operatorname{ch}(q\gamma+c_2), \qquad (9\text{-}3\text{-}31)$$

方括号内为新常数.

此时由(9-3-8)式, 并代入以上结果, 得

$$f_{ph}=\text{常数}\times\frac{t^{2q^2}\operatorname{ch}(q\gamma+c_2)}{(z^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (9\text{-}3\text{-}32)$$

注意 $\left(1-\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right)=2e^{-\frac{\gamma}{2}}t^{-1}(z^2-t^2)^{\frac{1}{2}}=2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}}$,

$$(g_{ph})_{11}=\frac{\alpha^{2s_1}}{Q}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)\left\{Q-\left(1-\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right)\alpha^{2s_1}(2w\mu)^{-2s_1}m_{01}^2\right\}$$

$$=\alpha^{2s_1}\cdot 2m_{01}m_{02}(2w)^{-1}Q^{-1}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)\left\{e^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{sh}\,\frac{\gamma}{2}e^{-(\gamma s_1+c_2)}\right\},$$

经过计算遂得

$$(g_{ph})_{11}=-\frac{\alpha^{2s_1}\mathrm{ch}(s_1\gamma+c_2)}{\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)},$$

$$(g_{ph})_{22}=-\frac{\alpha^{2s_1}\mathrm{ch}(s_2\gamma-c_2)}{\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)},$$

$$(g_{ph})_{12}=\frac{t\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)}\qquad(\text{由于 }\mu e^{-\frac{\gamma}{2}}=t),$$

即最后结果为

$$-ds^2=c_1\frac{t^{2q^2}\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)}{(z^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}(-dt^2+dz^2)+\frac{\mathrm{ch}(s_1\gamma+c_2)}{\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)}t^{2s_1}(dx)^2$$

$$+\frac{\mathrm{ch}(s_2\gamma-c_2)}{\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)}t^{2s_2}(dy)^2-\frac{2\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{ch}(q\gamma+c_2)}t(dxdy).$$

(9-3-33)

在背景(9-3-11)、(9-3-28)时，单孤立子解(9-3-33)中只包含 c_1 与 c_2 为任意常数．它有一个严重的问题，就是 $|z|>t$ 与 $|z|<t$，即越过光锥面时有跃变，它们对应"引力激波"。

关于两个孤立子解，按一般理论应有

$$\chi=I+\frac{R}{\lambda-\mu}+\frac{\bar{R}}{\lambda-\bar{\mu}},\tag{9-3-34}$$

按以前讨论，应有 $R_{ab}=n_a m_b$，其中

$$n_a=\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{m_c\bar{m}_d(g_0)_{cd}}{\nu-\bar{\mu}}\bar{m}_b(g_0)_{ba}-\frac{\bar{m}_c\bar{m}_d(g_0)_{cd}}{\bar{\nu}-\bar{\mu}}m_b(g_0)_{ba}\right\},$$

$$\Delta=\frac{|m_a m_b(g_0)_{ab}|^2}{|\nu-\mu|^2}-\frac{|m_a\bar{m}_b(g_0)_{ab}|^2}{|\bar{\nu}-\mu|^2},\quad \nu=\frac{\alpha^2}{\mu},\tag{9-3-35}$$

$$\bar{n}_a=\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{m_c\bar{m}_d(g_0)_{cd}}{\nu-\mu}m_b(g_0)_{ba}-\frac{m_c m_d(g_0)_{cd}}{\nu-\mu}\bar{m}_b(g_0)_{ba}\right\}.$$

引入 $\rho=|\mu|$，则有

$$(g_{ph})_{ab}=\frac{\rho^2}{\alpha^2}(g_0)_{ab}-\frac{\rho^2}{\alpha^2}\left(\frac{n_a m_c}{\mu}+\frac{\bar{n}_a\bar{m}_c}{\bar{\mu}}\right)(g_0)_{cb}. \quad (9\text{-}3\text{-}36)$$

再引入 $w=w_1-iw_2$，$\mu=\rho e^{i\varphi}$，有

$$\begin{aligned}\mu&=(w_1-\beta)-iw_2-\{[(w_1-\beta)^2-w_2^2-\alpha^2]\\&\quad-2iw_2(w_1-\beta)\}^{\frac{1}{2}},\\ \mu^*&=(w_1-\beta)+iw_2-\{[(w_1-\beta)^2-w_2^2-\alpha^2]\\&\quad+2iw_2(w_1-\beta)\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \quad (9\text{-}3\text{-}37)$$

可将事先求得的 $\psi^{-1}=M|_{\lambda=\mu}$ 与 m_a 满足的方程比较，从而定出 m_a，$\bar{m}_a$，再利用(9-3-35)计算 n_a，$\bar{n}_a$，然后代入(9-3-36)算出 $(g_{ph})_{ab}$ 我们以后还会回到有关问题，在此不予赘述.

上面举的例子是以不断膨胀的宇宙模型为种子解，由变换(9-2-6)生成新解．由于种子解本身的特点，$t=0$ 为宇宙奇点，随时间的演化以及 Bäcklund 变换(BT)所生成新解，具有许多物理上难以接受的性质．例如，在单孤立子解时，沿光锥存在一阶微商的不连续性，而双孤立子时，可以有全空间的解，但 f 分量的极值在于 $z=0$ 处不形成波动．因此总的说，BZG 提供了很好的理论框架，但以宇宙模型为种子，其生成解的行为并不令人满意．如果我们能找到一种新的种子解，它能生成行为良好的孤立子，那么将使 BZG 系统作到真正的完善．以下我们讨论一种新的引力行波作为种子解，然后用 BZG 技术生成新的类型的引力波孤立子(见章末[6])．

§4　一种新型引力波孤立子

作为种子解我们仍选择对角形式

$$-ds^2=f_0(-dt^2+dz^2)+adx^2+bdy^2, \tag{9-4-1}$$

其中 f_0, a, b 仅仅为光锥坐标 $\zeta=z+t$ 或 $\eta=z-t$ 的函数,

$$\alpha=\alpha(\eta)=\sqrt{ab}. \tag{9-4-2}$$

显然,这种种子解对应行波类型的解. 由(9-4-2)知此时

$$\beta=-\alpha=-\sqrt{ab}, \tag{9-4-3}$$

相应极点轨道为

$$\mu_k=w_k+\alpha-[w_k^2+2w_k\alpha]^{\frac{1}{2}}=\mu_k(\alpha). \tag{9-4-4}$$

将 $\frac{d}{d\eta}A\equiv A'$, $A_0=0$, $B_0=2\begin{pmatrix}(\sqrt{a})'\sqrt{b} & 0\\ 0 & \sqrt{a}(\sqrt{b})'\end{pmatrix}$, 使用 BZG 技术, 由(9-2-37)式, 得

$$M_{a1}^{(k)}M_{a2}^{(k)}=\frac{c_a^{(k)}}{\mu_k}, \quad c_a^{(k)}\text{ 为常数, 对}(k)\text{不求和}, \tag{9-4-5}$$

及

$$\ln M_{11}^{(k)}=-\int\frac{2(\sqrt{a})'\sqrt{b}}{\alpha+\mu_k}d\eta=-\int\frac{(\sqrt{a})'\sqrt{b}}{\alpha'}\frac{d\mu_k}{\mu_k}. \tag{9-4-6}$$

得到上式时用到了(9-2-22)式. 引入符号

$$F_k=-\int\frac{(\sqrt{a})'\sqrt{b}}{\alpha'}\frac{d\mu_k}{\mu_k}, \tag{9-4-7}$$

则 $M^{(k)}$ 的各个分量可以表为

$$M_{11}^{(k)}=e^{F_k(\eta)}, \quad M_{21}^{(k)}=c_{12}e^{F_k(\eta)},$$

$$M_{12}^{(k)}=c_1^{(k)}\frac{e^{-F_k(\eta)}}{\mu_k}, \quad M_{22}^{(k)}=c_2^{(k)}\frac{e^{-F_k(\eta)}}{c_{12}\mu_k}, \tag{9-4-8}$$

由(9-2-38)式得

$$m_1^{(k)}=\widetilde{m}_{01}^{(k)}e^{F_k(\eta)}, \quad m_2^{(k)}=\widetilde{m}_{02}^{(k)}c_k\frac{e^{-F_k(\eta)}}{\mu_k}, \tag{9-4-9}$$

其中 $\widetilde{m}_{01}^{(k)}=m_{01}^{(k)}+m_{02}^{(k)}c_{12}$, $\widetilde{m}_{02}^{(k)}=m_{02}^{(k)}+\frac{m_{02}^{(k)}}{c_{12}}\frac{c_2^{(k)}}{c_1^{(k)}}$, $c_k=c_1^{(k)}$ 均为常数. 再代入(9-2-42)式, 得

$$L_1^{(k)}=a\widetilde{m}_{01}^{(k)}e^{F_k}, \quad L_2^{(k)}=b\widetilde{m}_{02}^{(k)}c_k\frac{e^{-F_k}}{\mu_k}, \tag{9-4-10}$$

$$Q_{kl}=2\alpha\left[\widetilde{m}_{01}^{(k)}\widetilde{m}_{01}^{(l)}\widetilde{m}_{02}^{(k)}\widetilde{m}_{02}^{(k)}\frac{c_lc_l}{\mu_k\mu_l}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{ch}\left(F_{k+l}+\frac{1}{2}G_{k+l}\right), \tag{9-4-11}$$

其中

$$F_{k+l}\equiv F_k+F_l,\qquad e^G=\frac{\widetilde{m}_{01}^{(k)}}{\widetilde{m}_{02}^{(k)}c_k}\sqrt{\frac{a}{b}}\,\mu_k. \tag{9-4-12}$$

经过冗长的计算，可得单孤立子与双孤立子解.

4.1 引力波单孤立子解

$$Q=2(\widetilde{m}_{01}\widetilde{m}_{02}c_0)\frac{\alpha}{\mu}\mathrm{ch}(2F+G), \tag{9-4-13}$$

$$f_{ph}=\frac{c\mu^2Q}{(\alpha^2-\mu^2)\sqrt{\alpha}}f_0,$$

$$\begin{aligned}
(g_{11})_{ph}&=\frac{a\mathrm{ch}\left(2F+G-\frac{\gamma}{2}\right)}{\mathrm{ch}(2F+G)},\\
(g_{12})_{ph}&=-\frac{\alpha\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{ch}(2F+G)},\\
(g_{22})_{ph}&=\frac{b\mathrm{ch}\left(2F+G+\frac{\gamma}{2}\right)}{\mathrm{ch}(2F+G)},
\end{aligned} \tag{9-4-14}$$

其中 $$e^{\frac{\gamma}{2}}=\frac{\mu}{\alpha}.$$

引入新系数 $\tilde{c}=cc_0\widetilde{m}_{01}\widetilde{m}_{02}$，则线元为

$$\begin{aligned}
-ds^2=&\frac{2\tilde{c}\sqrt{\alpha}\,\mu}{\alpha^2-\mu^2}\mathrm{ch}(2F+G)f_0(-dt^2+dz^2)\\
&+a\frac{\mathrm{ch}\left(2F+G-\frac{\gamma}{2}\right)}{\mathrm{ch}(2F+G)}dx^2+b\frac{\mathrm{ch}\left(2F+G+\frac{\gamma}{2}\right)}{\mathrm{ch}(2F+G)}dy^2\\
&-2\alpha\frac{\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{ch}(2F+G)}dxdy.
\end{aligned} \tag{9-4-15}$$

4.2 引力波双孤立子解

$$f_{ph}^{(2)}=\frac{\tau D_0 f_0}{4\mu_1\mu_2}\left[\frac{\operatorname{ch}^2\left(F_{1+2}+\frac{1}{2}G_{1+2}\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}}+\frac{\operatorname{sh}^2\left(F_{1-2}+\frac{1}{2}G_{1-2}\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}}\right],$$

$$(g_{11}^{(2)})_{ph}=a+\frac{a}{D_2}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1+\gamma_1}{4}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}\right)\left[\operatorname{ch}(2F_2\right.$$
$$+G_2)\operatorname{ch}\left(2F_1+G_1-\frac{\gamma_1}{2}\right)-\operatorname{ch}(2F_1+G_1)\operatorname{ch}\left(2F_2\right.$$
$$\left.\left.+G_2-\frac{\gamma_2}{2}\right)\right],\tag{9-4-16}$$

$$(g_{22}^{(2)})_{ph}=b+\frac{b}{D_2}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}\right)\left[\operatorname{ch}(2F_2\right.$$
$$+G_2)\operatorname{ch}\left(2F_1+G_1+\frac{\gamma_1}{2}\right)-\operatorname{ch}(2F_1+G_1)\operatorname{ch}\left(2F_2\right.$$
$$\left.\left.+G_2+\frac{\gamma_2}{2}\right)\right],$$

$$(g_{12}^{(2)})_{ph}=\frac{a}{D_2}\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}\right)\left[\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)\operatorname{ch}(2F_1\right.$$
$$\left.+G_1)-\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\operatorname{ch}(2F_2+G_2)\right],$$

其中，$D_0=\widetilde{m}_{01}^{(1)}\widetilde{m}_{01}^{(2)}\widetilde{m}_{02}^{(1)}\widetilde{m}_{02}^{(2)}c_1c_2$ 为任意常数，τ 亦为常数，

$$D_2=\operatorname{sh}^2\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}\right)\operatorname{sh}^2\left(F_{1-2}+\frac{1}{2}G_{1-2}\right)$$
$$+\operatorname{sh}^2\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}\right)\operatorname{ch}^2\left(F_{1+2}+\frac{1}{2}G_{1+2}\right).$$

引入符号 $D_1=\dfrac{D_2}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}\right)}$，则线元可写为

$$-ds^2=\frac{\tau D_0 f_0}{4\mu_1\mu_2}\left[\frac{\operatorname{ch}^2\left(F_{1+2}+\frac{1}{2}G_{1+2}\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}}\right.$$

$$+\frac{\mathrm{sh}^2\left(F_{1-2}+\frac{1}{2}G_{1-2}\right)}{\mathrm{sh}^2\frac{\gamma_1-\gamma_2}{4}}\Bigg](-dt^2+dz^2)+\Bigg\{a+\frac{a}{D_1}\Big[\mathrm{ch}(2F_2$$

$$+G_2)\mathrm{ch}\left(2F_1+G_1-\frac{\gamma_1}{2}\right)-\mathrm{ch}(2F_1+G_1)\mathrm{ch}\Big(2F_2+G_2$$

$$-\frac{\gamma_2}{2}\Big)\Big]\Bigg\}(dx)^2+\Bigg\{b+\frac{b}{D_1}\Big[\mathrm{ch}(2F_2+G_1)\mathrm{ch}\left(2F_1+G_1+\frac{\gamma_1}{2}\right)$$

$$-\mathrm{ch}(2F_1+G_1)\mathrm{ch}\left(2F_2+G_2+\frac{\gamma_2}{2}\right)\Big]\Bigg\}(dy)^2$$

$$+\frac{2\alpha}{D_1}\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma_2}{2}\right)\mathrm{ch}(2F_1+G_1)-\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)\mathrm{ch}(2F_2+G_2)\right]dxdy. \tag{9-4-17}$$

容易验证，当 $f=f(u)$，$g=g(u)$，其中 $u=\eta$ 或 ζ，此时必满足(9-1-23)与(9-1-24)两组方程的要求，而(9-1-23)$^+$变为

$$(\ln\tilde{f})_{,\eta}\equiv\left(\ln\frac{f}{|\alpha_{,\eta}|\cdot\alpha}\right)_{,\eta}=\frac{\mathrm{tr}B^2}{4\alpha\alpha_{,\eta}}. \tag{9-4-18}$$

现在考虑 BZG 系统的一种简单情况

$$-ds^2=f(-dt^2+dz^2)+\alpha(e^V dx^2+e^{-V}dy^2), \tag{9-4-19}$$

则

$$B=\alpha\begin{pmatrix}(\ln\alpha)_{,\eta}+V_{,\eta} & 0\\ 0 & (\ln\alpha)_{,\eta}-V_{,\eta}\end{pmatrix}, \tag{9-4-20}$$

(9-4-18)式变为

$$(\ln\tilde{f})_{,\eta}=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha_{,\eta}}V^2_{,\eta}. \tag{9-4-21}$$

考虑 V 依赖于 α 的波动解，即 $V_{,\eta}=V_{,\alpha}\alpha_{,\eta}$，代入上式得

$$(\ln\tilde{f})_{,\eta}=\frac{1}{2}\alpha\alpha_{,\eta}V^2_{,\alpha}. \tag{9-4-22}$$

选择函数 $V(\alpha)$ 为

$$V(\alpha)=c_1\ln\alpha+c_2\alpha^n,\quad c_1,\ c_2,\ n\ 为任意常数, \tag{9-4-23}$$

则得到

$$\tilde{f}=\tilde{c}_0\alpha^{\frac{c_1^2}{2}}e^{\frac{c_2^2}{4}\cdot n\alpha^{2n}}+c_1c_2\alpha^n,\quad \tilde{c}_0\ \text{为积分常数}, \tag{9-4-24}$$

$$g=\begin{pmatrix} \alpha\alpha^{c_1}e^{c_2\alpha^n} & 0 \\ 0 & \alpha\alpha^{-c_1}\alpha^{-c_2\alpha^n} \end{pmatrix},$$

$$f=\tilde{c}_0|\alpha_{,\eta}|\alpha^{\frac{1}{2}(c_1^2-1)}e^{\frac{1}{4}c_2^2n\alpha^{2n}+c_2c_1\alpha^n}, \tag{9-4-25}$$

它们为(9-4-19)的一组解. 若在度规(9-4-19)中取 $\alpha=\eta$, $V=2\beta(\eta)$, $f=\exp[2\Omega(\eta)]$, $2\Omega_{,\eta}=\eta(\beta_{,\eta})^2$, 则为 Bondi 平面波解(见章末[3]). 现在, 仅当取 $\alpha=\eta$, 并在 Bondi 平面波解中取 $2\beta=(c_1+1)\ln\eta+c_2\eta^n$ 时上述解与 Bondi 平面波解相重.

4.3 单孤立子解的具体形式

现在以(9-4-25)式的解为种子解(推广的 Bondi 平面波解), 代入(9-4-15)求单孤立子解的具体形式, 此时

$$\sqrt{a}=\alpha^{\frac{c_1+1}{2}}e^{\frac{c_2}{2}\alpha^n},\quad \sqrt{b}=\alpha^{\frac{1-c_1}{2}}e^{-\frac{c_2}{2}\alpha^n}, \tag{9-4-26}$$

代入(9-4-7)式, 积分得到

$$F=-\int\frac{(\sqrt{a})'\sqrt{b}}{\alpha'}\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{c_1+1}{2}\ln\mu-c_2\alpha^n+c_2nI(\alpha), \tag{9-4-27}$$

故

$$G=\ln\mu+c_1\ln\alpha+c_2\alpha^n+\ln c', \tag{9-4-28}$$

其中定义

$$c'=\frac{\tilde{m}_{01}}{c_0\tilde{m}_{02}},\quad I(\alpha)=\int\frac{\alpha^n d\alpha}{\alpha+\frac{\alpha^2}{\mu}}, \tag{9-4-29}$$

故
$$2F+G=-c_1\frac{\gamma}{2}-c_2\alpha^n+2c_2nI(\alpha)+\ln c'. \tag{9-4-30}$$

于是可求得(9-4-25)背景下行波型单孤立子解(省略 ph 记号):

$$f=\frac{c''|\alpha_{,\eta}|\alpha^{\frac{c_1^2}{2}}}{(w^2+2w\alpha)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{nc_2^2\alpha^{2n}}{4}+c_1c_2\alpha^n}\operatorname{ch}\Big[-c_1\frac{\gamma}{2}$$
$$-c_2\alpha^n+2c_2nI(\alpha)+\ln c'\Big],$$

$$g_{12}=\frac{2\left(w^{2}+2w\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{ch}\left[-c_{1}\frac{\gamma}{2}-c_{2}\alpha^{n}+2c_{2}nI(\alpha)+\ln c'\right]},$$

$$g_{11}=\alpha^{c_{1}+1}e^{c_{2}\alpha^{n}}\frac{\operatorname{ch}\left[-(1+c_{1})\frac{\gamma}{2}-c_{2}\alpha^{n}+2c_{2}nI(\alpha)+\ln c'\right]}{\operatorname{ch}\left[-c_{1}\frac{\gamma}{2}-c_{2}\alpha^{n}+2c_{2}nI(\alpha)+\ln c'\right]},$$

$$g_{22}=\alpha^{1-c_{1}}e^{-c_{2}\alpha^{n}}\frac{\operatorname{ch}\left[-(c_{1}-1)\frac{\gamma}{2}-c_{2}\alpha^{n}+2c_{2}nI(\alpha)+\ln c'\right]}{\operatorname{ch}\left[-c_{1}\frac{\gamma}{2}-c_{2}\alpha^{n}+2c_{2}nI(\alpha)+\ln c'\right]}.$$

(9-4-31)

当 $\alpha\to0$ 时，渐近行为可以计算出为

$$g_{11}\sim w\alpha^{c_{1}}e^{c_{2}\alpha^{n}}\cdot\begin{cases}\left[1+\operatorname{th}\left(-c_{1}\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right)\right] & (n\geqslant0,\ c_{1}\neq0),\\ \left[1+\operatorname{th}\left(-c_{2}\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right)\right] & (n<0\text{ 或 }n\geqslant0,\ c_{1}=0),\end{cases}$$

$$g_{22}\sim w\alpha^{-c_{1}}e^{-c_{2}\alpha^{n}}\cdot\begin{cases}\left[1-\operatorname{th}\left(-c_{1}\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right)\right],\\ \left[1-\operatorname{th}\left(-c_{2}\alpha^{n}+\ln c'\right)\right];\end{cases}\quad(\text{同上})$$

(9-4-32)

$$g_{12}\sim w\Bigg/\begin{cases}\operatorname{ch}\left[-c_{1}\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right],\\ \operatorname{ch}\left[-c_{2}\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right].\end{cases}\quad(\text{同上})$$

经过细致的分析知当 $\alpha\to0$,

(1) $n\geqslant0,\ c_{1}=0,\ g_{11}\sim w[1+\operatorname{th}(\ln c')],\ g_{12}=\frac{w}{\operatorname{ch}(\ln c')},$

$$g_{22}\sim w[1-\operatorname{th}(\ln c')].\qquad(9\text{-}4\text{-}33)$$

(2) $n\geqslant0,\ c_{1}\neq0$ 或 $n<0,\ g_{11},\ g_{12},\ g_{22}\sim0$.

$$(3)\ f\sim w^{-1}c''|\alpha_{,\eta}|e^{\frac{c_1^2}{2}}e^{\frac{n}{4}c_2^2\alpha^{2n}+c_1c_2\alpha^n}$$

$$\cdot\begin{cases}\operatorname{ch}\left(-\dfrac{c_1\gamma}{2}+\ln c'\right) & (n\geqslant 0\ c_1\neq 0,)\\ \operatorname{ch}(-c_2\alpha^n+\ln c') & (n<0\ 或\ n\geqslant 0,\ c_1=0).\end{cases}$$

而经过计算，其 $\alpha\to\infty$ 时的渐近行为如下：

$$g_{11}\sim\alpha^{1+c_1}e^{c_2\alpha^n},\ g_{22}\sim\alpha^{1-c_1}e^{-c_2\alpha^n},\ g_{12}\sim 0,\qquad (9\text{-}4\text{-}34)$$

当 $\alpha\to\infty$ 时，

$$(1)\ n\leqslant 0,\ c_1\neq 1,\ g_{11}\sim\begin{cases}\infty, & c_1>-1,\\ 0, & c_1<-1,\end{cases}\quad g_{22}\sim\begin{cases}0 & c_1>1,\\ \infty & c_1<1;\end{cases}$$

$$(2)\ n\leqslant 0,\ g_{11}\sim\begin{cases}\infty\\ 1\end{cases}\quad g_{22}\sim\begin{cases}1 & c_1=1,\\ \infty & c_1=-1;\end{cases}\qquad (9\text{-}4\text{-}35)$$

$$(3)\ n>0,\ g_{11}\sim\begin{cases}\infty\\ 0\end{cases}\quad g_{22}\sim\begin{cases}0 & c_2>0,\\ \infty & c_2<0,\end{cases}$$

$$f\sim 2c''\operatorname{ch}(\ln c')|\alpha_{,\eta}|\alpha^{\frac{c_1^2}{2}}e^{\frac{n}{4}c_2^2\alpha^{2n}+c_1c_2\alpha^n}.$$

由上可知，若 α 的存在域包含 0 与 ∞，则孤立子解(9-4-31)中 g_{ab} 将会出现奇点. 仔细分析 $\dfrac{\gamma}{2}$ 与 $I(\alpha)$ 可知，在区间 $D=[\varepsilon,\ M]$ $(\varepsilon>0,\ M<+\infty)$ 上，$2F+G$ 及 $2F+G+\dfrac{\gamma}{2}$ 均为有界函数，故在区间 D 上，g 与 $\dfrac{f}{|\alpha_{,\eta}|}$ 都是好行为，故只要选取 α，使 $\alpha\in D$，便不会出现奇点. 但是，若在时空边界上 α 趋于常数，则在边界上 $\alpha_{,\eta}\sim 0$，从而在边界上将给出奇点. 这表明，(9-4-31)式的度规不能在各个方向同时渐近平直，这个特点是由沿 z 轴传播的孤立波决定的.

现在考虑 BZG 孤立子解(9-4-31)与背景(9-4-25)的关系，为此按 BZG 作法引入孤立子场

$$H_{11}=\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-1-\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\operatorname{th}(2F+G),$$

$$H_{12}=-\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ch}(2F+G)},\quad H_{22}=\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-1+\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\operatorname{th}(2F+G),\tag{9-4-36}$$

$$\Delta f=c''\left[\frac{\alpha}{w^2+2w\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(2F+G)-1.$$

于是(9-4-31)解的孤立子场为

$$H_{11}=\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-1-\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\operatorname{th}\left[-c_1\frac{\gamma}{2}-c_2\alpha^n+2c_2nI(\alpha)+\ln c'\right],$$

$$H_{22}=\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-1+\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\operatorname{th}\left[-c_1\frac{\gamma}{2}-c_2\alpha^n+2c_2nI(\alpha)+\ln c'\right],$$

$$H_{12}=-\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\left[-c_1\frac{\gamma}{2}-c_2\alpha^n+2c_2nI(\alpha)+\ln c'\right]},$$

$$\Delta f=c''\left(\frac{\alpha}{w^2+2w\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\left[-c_1\frac{\gamma}{2}-c_2\alpha^n+2c_2nI(\alpha)+\ln c'\right].\tag{9-4-37}$$

经过仔细的计算，可知有渐近行为，当 $\alpha\to 0$ 时，

$$H_{11}\sim\begin{cases}\frac{w}{\alpha}\left[1+\operatorname{th}\left(-c_1\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right)\right]-1, & n\geqslant 0,\ c_1\neq 0,\\ \frac{w}{\alpha}\left[1+\operatorname{th}(-c_2\alpha^n+\ln c')\right]-1, & n\leqslant 0\text{ 或 }n\geqslant 0,\ c_1=0;\end{cases}$$

$$H_{22}\sim\begin{cases}\frac{w}{\alpha}\left[1-\operatorname{th}\left(-\frac{c_1\gamma}{2}+\ln c'\right)\right]-1, & n\geqslant 0,\ c_1\neq 0,\\ \frac{w}{\alpha}\left[1-\operatorname{th}(-c_2\alpha^n+\ln c')\right]-1, & n<0,\text{ 或 }n\geqslant 0,\ c_1=0;\end{cases}$$

$$H_{12}\sim\begin{cases}\frac{w}{\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch}\left(-c_1\frac{\gamma}{2}+\ln c'\right)}-1, & \\ \frac{w}{\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch}(-c_2\alpha^n+\ln c')}-1; & \end{cases}\quad(\text{同上})$$

$$\Delta f \sim \begin{cases} \dfrac{c''}{w}\sqrt{\alpha}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{c_1\gamma}{2} - \ln c'\right) - 1, \\ \dfrac{c''}{w}\sqrt{\alpha}\,\mathrm{ch}(c_2\alpha^n - \ln c') - 1. \end{cases} \quad (同上)$$

(9-4-38)

它们的极限依赖于 n, c_1, c_2 的取值,经过仔细分析知,

当 $\alpha \to 0$ 时,

$$n \geqslant 0,\ H_{11} \to \begin{cases} -1 & c_1 < \dfrac{1}{2}, \\ c'^2 - 1 & c_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ \infty & c_1 > -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad H_{22} \to \begin{cases} \infty & c_1 < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{c'^2} - 1 & c_1 = \dfrac{1}{2}, \\ -1 & c_1 > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$H_{12} \to \begin{cases} 0 & |c_1| > 1, \\ c' & c_1 = -1, \\ \infty & |c_1| < 1, \\ \dfrac{1}{c'} & c_1 = 1. \end{cases}$$

$$n < 0,\ H_{11} \to \begin{cases} \infty, \\ -1; \end{cases} \quad H_{22} \to \begin{cases} -1 & c_2 < 0, \\ \infty & c_2 > 0; \end{cases} \quad H_{12} \to -1.$$

(9-4-39)

$$n < 0,\ \Delta f \to \infty,\ n \geqslant 0,\ \Delta f \to \begin{cases} \infty & |c_1| > \dfrac{1}{2}, \\ c'c''(2w)^{c_1 - 1} - 1 & c_1 = \dfrac{1}{2}, \\ -1 & |c_1| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{c''}{c'}(2w)^{-(c_1+1)} - 1 & c_1 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

当 $\alpha \to \infty$ 时,

$$H_{11} \sim \mathrm{ch}\,\frac{\gamma}{2} - 1 - \mathrm{sh}\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{th}(\ln c') \to 0,$$

$$H_{22} \sim \operatorname{ch}\frac{\gamma}{2} - 1 + \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}\operatorname{th}(\ln c') \to 0,$$

(9-4-40)

$$H_{12} \sim -\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ch}(\ln c')} \to 0, \quad \Delta f \sim c''\left(\frac{\alpha}{w^2 + 2w\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(\ln c') - 1.$$

于是成立

$$\lim_{\alpha\to\infty} H_{11} = \lim_{\alpha\to\infty} H_{22} = \lim_{\alpha\to\infty} H_{12} = 0,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \Delta f = \frac{c''}{\sqrt{2w}}\operatorname{ch}(\ln c') - 1. \tag{9-4-41}$$

从以上结果可以看到,(9-4-31)中当 $\alpha\to\infty$ 时，g 趋于种子解，由(9-4-41)，可适当选取 c''，使 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\Delta f = 0$ 成立，这时单孤立子解(9-4-31)在无穷处与背景连接．若 α 的定义域不包括零点，则孤立子场(9-4-37)是局域，且有好行为的．当然，这时孤立子解与背景有相同的奇异行为．而在 $\alpha\to 0$ 处，孤立子解与种子解的渐近行为有很大差异，两者在 $\alpha\sim 0$ 处并无连接．一般说，背景场与孤立子场都是(在 $\alpha\sim 0$ 处)有奇异的，但奇异性质有所不同．因此，孤立子解保留它的背景的奇异点，在 $\alpha=\infty$ 处奇异性相同，在 $\alpha=0$ 处奇异性有所改变．

4.4　双孤立子解的具体形式

以下我们讨论双孤立子解．

以(9-4-25)式为背景，可以计算出

$$F_k = -\frac{1}{2}(c_1+1)\ln\mu_k - c_2\alpha^n + nc_2 I_k(\alpha), \quad k=1,\ 2, \tag{9-4-42}$$

$$G_k = \ln\left(\frac{c_k'}{\mu_k}\right) + c_1\ln\alpha + c_2\alpha^n,$$

其中定义了

$$c_k' = \frac{\widetilde{m}_{01}^{(k)}}{\widetilde{m}_{02}^{(k)} c_k}, \qquad I(\alpha) = \int \frac{\alpha^n}{\alpha + \frac{\alpha^2}{\mu_k}} d\alpha,$$

于是有

$$2F_k + G_k = -c_1 \frac{\gamma_k}{2} - c_2\alpha^n + 2nc_2 I_k(\alpha) \ln c_k',$$

$$F_{1+2} + \frac{1}{2} G_{1+2} = -\frac{c_1}{2}\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right) - c_2\alpha^n + c_2 n [I_1(\alpha) + I_2(\alpha)] + \frac{1}{2} \ln c_1' c_2',$$

$$F_{1-2} + \frac{1}{2} G_{1-2} = -\frac{c_1}{2}\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right) + c_2 n [I_1(\alpha) - I_2(\alpha)] + \frac{1}{2} \ln \frac{c_1'}{c_2'}.$$

(9-4-43)

同样，可引入双孤立子解的孤立子场

$$\Delta f^{(2)} = \frac{\tau D_0}{4\mu_1\mu_2} \frac{\mathrm{ch}^2\left(F_{1+2} + \frac{1}{2} G_{1+2}\right)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}\right)} + \frac{\mathrm{sh}^2\left(F_{1-2} + \frac{1}{2} G_{1-2}\right)}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{4}\right)},$$

$$H_{11}^{(2)} = \frac{1}{D_1}\left[\mathrm{ch}(2F_2 + G_2)\,\mathrm{ch}\left(2F_1 + G_1 - \frac{\gamma_1}{2}\right) - \mathrm{ch}(2F_1 + G_1)\,\mathrm{ch}\left(2F_2 + G_2 - \frac{\gamma_2}{2}\right)\right],$$

$$H_{22}^{(2)} = \frac{1}{D_1}\left[\mathrm{ch}(2F_2 + G_2)\,\mathrm{ch}\left(2F_1 + G_1 + \frac{\gamma_1}{2}\right) - \mathrm{ch}(2F_1 + G_1)\,\mathrm{ch}\left(2F_2 + G_2 + \frac{\gamma_2}{2}\right)\right],$$

$$H_{12}^{(2)} = \frac{1}{D_1}\left[\mathrm{sh}\,\frac{\gamma_2}{2}\,\mathrm{ch}(2F_1 + G_1) - \mathrm{sh}\,\frac{\gamma_1}{2}\,\mathrm{ch}(2F_2 + G_2)\right].$$

(9-4-44)

重复以前作法，得到(9-4-43)的渐近行为。

当 $\alpha\to 0$ 时，

$$2F_k+G_k\sim\begin{cases}-c_1\dfrac{\gamma_k}{2}+\ln c_k' & n\geqslant 0\ \ c_1\neq 0,\\ & n<0 \text{ 或 } n\geqslant 0,\\ -c_2\alpha^n+\ln c_k' & c_1=0\sim\begin{cases}-c_2\alpha^n, & n<0,\\ \ln c_k', & n\geqslant 0,\ c_1=0.\end{cases}\end{cases}$$

$$F_{1+2}+\frac{1}{2}G_{1+2}\sim\begin{cases}-\dfrac{c_1}{2}\left(\dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)+\ln c_1'c_2' & n\geqslant 0,\ c_1\neq 0,\\ -c_2\alpha^n+\ln c_1'c_2' & n<0 \text{ 或 } n\geqslant 0,\\ & c_1=0\sim\begin{cases}-c_2\alpha^n, n<0,\\ \ln c_1'c_2',\ n\geqslant 0, c_1=0.\end{cases}\end{cases}$$

$$F_{1-2}+\frac{1}{2}G_{1-2}\sim-\frac{c_1}{2}\ln\frac{w_2}{w_1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{c_1'}{c_2'}\begin{cases}-\dfrac{c_2}{2}\ln\alpha\left(\dfrac{1}{w_1}-\dfrac{1}{w_2}\right) & n=-1,\\ \dfrac{c_2n\alpha^{n+1}}{2(n+1)}\left(\dfrac{1}{w_1}-\dfrac{1}{w_2}\right).\end{cases}$$

(9-4-45)

当 $\alpha\to\infty$ 时，

$$2F_k+G_k\sim\left.\begin{cases}-c_1\dfrac{\gamma_k}{2}+\ln c_k' & n\leqslant 0\\ -c_2\alpha^n+2c_2nI_k(\alpha)+\ln c_k' & n>0\end{cases}\right\}\sim\ln c_k',$$

$$F_{1+2}+\frac{1}{2}G_{1+2}\sim\left.\begin{cases}-\dfrac{c_1}{2}\left(\dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right)+\ln c_1'c_2' \\ \qquad\qquad\qquad n\leqslant 0\\ -c_2\alpha^n+nc_2[I_1(\alpha)+I_2(\alpha)]\\ \qquad +\dfrac{1}{2}\ln c_1'c_2' \qquad n>0\end{cases}\right\}\sim\ln c_1'c_2',$$

$$F_{1-2}+\frac{1}{2}G_{1-2}\sim\left\{\begin{array}{ll}-\frac{c_1}{2}\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right) & \\ \qquad+\frac{1}{2}\ln\frac{c_1'}{c_2'} & n\leqslant 0\\ nc_2[I_1(\alpha)-I_2(\alpha)] & \\ \qquad+\frac{1}{2}\ln\frac{c_1'}{c_2'} & n>0\end{array}\right\}\sim\frac{1}{2}\ln\frac{c_1'}{c_2'}. \tag{9-4-46}$$

它们当 $\alpha\to\infty$ 时，只有一种极限，但逼近方式不同．利用它们可以讨论双孤立子解及孤立子场的渐近行为，但要比单孤立子时复杂得多，我们不再赘述．

§5　BZ 引力的哈密顿结构

以上论讨了引力波孤立子解的问题，很自然地会问：这些引力波孤立子体系是如何辐射能量的呢？让我们首先回忆一下弱引力波的辐射问题（见章末[4]）．那里处理问题的基本精神是用弱场近似 $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}^{(0)}+h_{\mu\nu}$ 代入 $R_{\mu\nu}=0$，从而证明 h_μ^ν 满足达朗贝尔方程，然后将解 h_μ^ν 代入引力场能量-动量张量 $t_{\mu\nu}$ 中，计算出相应的分量，从而决定引力场辐射的能量．这种计算之所以长期以来受到批评，是由于引力场能-动量张量在黎曼空间为赝张量，从而可能使能量值会受到坐标系选择的影响；同时，如何计算非弱场近似时的引力辐射也须阐明．现在我们计算引力波孤立子的引力能辐射时，也会碰到同样的问题．当然，引力波孤立子解的度规是已经严格计算出的．

由于引力场能量正定性的解决（参见章末[5]及其中所引文献），为我们讨论引力波孤立子的能量辐射奠定了基本的理论框架．它的基本精神是不必引入通常所说的引力场能量-动量赝张

量，而是把引力场考虑成一个广义哈密顿系统，其本质是考虑以下拉氏函数系统

$$l=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}^i-\sum_{a=1}^{m}\lambda^a\varphi_a(p,\ q)-h(p,\ q)\quad (m<n),\quad (9\text{-}5\text{-}1)$$

其中 $i=1,\cdots,n$，p_i与q^i为n对力学变量，$a=1,\cdots,m$，φ_a为m个约束，h为p,q的函数，它处于哈密顿量相关的地位，与通常物理理论一致，仅包含广义坐标对独立变量的一阶微商的线性组合．p_i与q^i为正则变量，λ^a为拉氏不定乘子．定义泊松括号

$$\{f,\ g\}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right).\qquad (9\text{-}5\text{-}2)$$

由变分法知运动方程为

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial h}{\partial q^i}-\sum_a\lambda^a\frac{\partial\varphi_a}{\partial q^i},\quad \dot{q}^i=\frac{\partial h}{\partial p_i}+\sum_a\lambda^a\frac{\partial\varphi_a}{\partial p_i},\quad \varphi_a=0,\qquad (9\text{-}5\text{-}3)$$

如果约束满足以下条件

$$\begin{aligned}\{\varphi_a,\ \varphi_b\}&=\sum_d c^d_{ab}(p,\ q)\varphi_d,\\ \{\varphi_a,\ h\}&=\sum_b c^b_a(p,\ q)\varphi_b,\end{aligned}\qquad (9\text{-}5\text{-}4)$$

则称该约束为第一类约束，(9-5-1)确定的系统称为广义哈密顿系统．(9-5-4)表示约束本身以及约束同哈密顿量的泊松括号在约束面$\varphi_a=0$上变为零．它们保证了任意选择$\lambda^a(t)$时，该约束面在运动时保持不变．

一般说，可以先解出约束，然后代回l中，就消除了约束，但是，有许多情况下约束并不能明显解出来．设想，已将m个约束消除，则独立的变量仅有$n-m$个，而l在代入约束的解后即表示为

$$l^*=\sum_k p^*_k q^*_k-h^*(p^*,\ q^*)\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m),\ (9\text{-}5\text{-}5)$$

而h^*与h当限制在$\varphi=0$上时相等，

$$h^*=h|_{\varphi=0}.\qquad (9\text{-}5\text{-}6)$$

由于往往实际解出约束比较困难，所以常常讨论广义哈密顿

系统，然后将$h(p, q)$限制在约束上$\varphi=0$，即得到需要的$h^*(p^*, q^*)$.

在连续系统(9-5-2)式中，$\sum_i \to \int (dx)$，其中(dx)表示相应维数的“体元”积分．为了将来容易理解引力场情况，我们先讨论电磁场这个简单的例子．

电磁势为A_μ，则电磁场$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$，而相应的拉氏函数为

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\mathfrak{L}_1 \quad (\mathfrak{L}_1 \text{包含物质及物质与电磁场作用}). \tag{9-5-7}$$

由$B_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$，$E_i=F_{0i}$，可知

$$\mathfrak{L}=-\frac{1}{2}(\vec{B}^2+\vec{E}^2)+E_k(\dot{A}_k-A_{0,k})+\mathfrak{L}_1, \tag{9-5-8}$$

$$\mathfrak{L}_1=A_0\rho+\pi^\alpha\dot{q}_\alpha-h_c(q_\alpha, \pi^\alpha, A_k), \tag{9-5-9}$$

其中ρ为电荷密度，$\rho=\rho(q^\alpha, \pi_\alpha)$，相互作用中与矢量势$\vec{A}$作用部分已包括在(9-5-9)中．$i, j, k\cdots$表示1, 2, 3，相重代表求和，$\pi^\alpha$与$q_\alpha$为荷电粒子的力学变量．

于是

$$\mathfrak{L}=E_k\frac{\partial A_k}{\partial t}+A_0(\partial_k E_k+\rho)-\frac{1}{2}(\vec{B}^2+\vec{E}^2)$$
$$+\pi^\alpha\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}-h_c(q_\alpha, \pi^\alpha, A_k) \tag{9-5-10}$$

或

$$\mathfrak{B}=E_k\dot{A}_k+\pi^\alpha\dot{q}_\alpha+A_0(\partial_k E_k+\rho)-h, \tag{9-5-11}$$

$\varphi=A_kE_k+\rho$为约束，$h=\frac{1}{2}(\vec{B}^2+\vec{E}^2)+h_c(q_\alpha, \pi^\alpha, A_k)$为能量．这样，(9-5-11)告诉我们，场变量与粒子运动力学变量应有以下泊松括号

$$\{E_i(x),\ A_j(y)\}=\delta_{ij}\delta^{(3)}(x-y),\tag{9-5-12}$$

$$\{\pi^\alpha(x),\ q_\beta(y)\}=\delta^\alpha_\beta\delta^{(3)}(x-y).\tag{9-5-13}$$

$$h=\left\{\frac{1}{2}(E_k^2+B_k^2)+h_c\right\},\tag{9-5-14}$$

$$H=\int[h-A_0(E_{k,k}+\rho)]\,(dx)=\int(dx)\left[\frac{1}{2}(E_k^2+B_k^2)+h_c-A_0\varphi\right],\tag{9-5-15}$$

$$L=(dx)\{E_k\dot{A}_k+\pi^\alpha\dot{q}_\alpha\}-H.\tag{9-5-16}$$

由 E_k 的定义有

$$E_k=\dot{A}_k-A_{0,k},\tag{9-5-17}$$

而

$$\dot{A}_k^{(x)}=\{H,\ A_k^{(x)}\}=\int(dy)\{\frac{1}{2}(E_i^2(y)+B_i^2(y))$$

$$+h_c^{(y)}-A_0\varphi(y),\ A_k\}.$$

由(9-5-12)中 φ 的定义知 $\dot{A}_k=E_k+A_{0,k}$，它与原定义相一致（见(9-5-17)），在证明中用到了 $\{\varphi(x),\varphi(y)\}=0$，$\{B_i(x),\ A_j(x)\}=0$ 等性质．容易证明

$$\dot{E}_k=\nabla^2A_k-A_{l,lk}-\frac{\partial h_c}{\partial A_k},\tag{9-5-18}$$

而约束

$$\varphi=0\Rightarrow E_{k,k}=-\rho.\tag{9-5-19}$$

(9-5-17)、(9-5-18)与(9-5-19)连同 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 给出了电动力学的全部 Maxwell 方程组．在电动力学中，约束(9-5-19)是可以明显解出的，表示库仑瞬时作用．

章末文献[3]已给出了引力场的广义哈密顿形式，当采用拉氏函数（$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ 中抛掉全散度项）

$$\mathfrak{L}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma})\tag{9-5-20}$$

后，章末文献[5]证明引力系统的拉氏函数可写为

$$L=\int(dx)(\pi_{ik}\dot{q}^{ik}+\pi^\alpha\dot{q}_\alpha-\lambda^0c_0-\lambda^kc_k-h),\tag{9-5-21}$$

其中

$$q^{ik}=h^{0i}h^{0k}-h^{00}h^{ik},\ h^{\mu\nu}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}, \tag{9-5-22}$$

$$\pi_{ik}=\frac{1}{h^{00}}\Gamma^{0}_{ik},\ \mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ i,\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{9-5-23}$$

不定乘子

$$c_0=q^{ik}q^{mn}(\pi_{ik}\pi_{mn}-\pi_{im}\pi_{kn})+\gamma R_3-T_{00}, \tag{9-5-24}$$

$$c_k=2\nabla_k(q^{il}\pi_{il})-2\nabla_l(\pi^{il}\pi_{ik})-T_{0k}. \tag{9-5-25}$$

哈密顿量

$$h=-c_0-\partial_i\partial_k q^{ik}, \tag{9-5-26}$$

$$\lambda^0=\frac{1}{h^{00}}+1,\qquad \lambda^k=\frac{h^{0k}}{h^{00}}, \tag{9-5-27}$$

T_{00}，T_{0k} 为引力物质的能-动量张量.

$$\gamma=g^{00}\det(g_{\mu\nu})=\det(g_{ik}), \tag{9-5-28}$$

$$R_3=g^{ik}(\gamma^{m}_{im,k}-\gamma^{m}_{ik,m}+\gamma^{m}_{in}\gamma^{n}_{mk}-\gamma^{m}_{ik}\gamma^{n}_{mn}), \tag{9-5-29}$$

$$\Gamma^{l}_{ik}=\gamma^{l}_{ik}+\frac{h^{0l}}{h^{00}}\Gamma^{0}_{ik}. \tag{9-5-30}$$

章末文献[5]并用(9-5-21)等结果证明了引力体系总能量的正定性. 现在我们将上述哈密顿系统应用于 BZ 引力波情况，此时为纯引力，故不存在物质项，考虑到从依赖 4 个坐标到 2 个坐标的约化是复杂问题，我们仅仅讨论经典的张量. 由于所有度规量仅仅依赖于$(t,\ z)$两个变量，因此可考虑空间体积积分只对 z 进行. 此时，有拉氏函数与广义哈密顿量分别为

$$L=\int dz(\pi_{ik}\dot{q}^{ik}-\lambda^0 c_0-\lambda^k c_k-h), \tag{9-5-31}$$

$$H=-\int dz(c_0+\partial_i\partial_j q^{ij}), \tag{9-5-32}$$

能量

$$E=H|_{c_0=0}=-\int dz\partial_i\partial_j q^{ij}\quad (\text{引力常数 } k=1). \tag{9-5-33}$$

现在利用(9-1-6)式所规定的线元与(9-1-15)式所示的克氏符号，将(9-5-21)及(9-5-32)、(9-5-33)诸式简化．此时，

$$g_{00}=-f,\ g_{33}=f\ 以及\ g_{ab}$$

为相应度规．由(9-5-22)式决定出

$$\begin{aligned} h^{00}&=-\alpha,\ h^{ab}=\alpha f g^{ab},\ h^{33}=\alpha,\ 其余为\ 0,\\ q^{ab}&=-\alpha^2 f g^{ab},\ q^{33}=-\alpha^2,\ 其余为\ 0. \end{aligned} \tag{9-5-34}$$

而不为零分量的 π_{ij} 为

$$\begin{aligned} \pi_{33}=\pi_{03}&=-\frac{1}{2}\Gamma^0_{33}=-\frac{f_{,t}}{2\alpha f},\\ \pi_{ab}&=-\frac{1}{2\alpha f}g_{ab,t}. \end{aligned} \tag{9-5-35}$$

可计算出

$$\begin{aligned} R_3=\frac{1}{2f}\Big\{&2(\ln\alpha)_{,zz}+[(\ln f)_{,z}]^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(g^{-1}g_{,z}g^{-1}g_{,z})\\ &+g^{ab}(g_{ab})_{,zz}-(g_{ac})_{,z}g^{cd}(g_{db})_{,z}+\frac{1}{2}(\ln\alpha)_{,z}(\ln f)_{,z}\\ &+(\ln\alpha)_{,z}(\ln\alpha)_{,z}\Big\}, \end{aligned} \tag{9-5-36}$$

$$c_0=(q^{ab}\pi_{ab})^2-q^{ab}q^{cd}\pi_{ac}\pi_{bd}+2q^{33}\pi_{33}q^{ab}\pi_{ab}+\alpha f R_3.$$

为求出引力能，我们将广义哈密顿限制在约束上，此时能量为

$$E=-\int dz\partial_z\partial_z q^{33}-\int dz\partial_z\partial_z\alpha^2=\int dz\sqrt{-g}\,\varepsilon, \tag{9-5-37}$$

故

$$E=2\alpha\alpha_{,z}\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{9-5-38}$$

也即按引力的哈密顿形式，引力能的值与 g_{ab} 的行列式微商的边界值有关．

如章末文献[5]所指出的，(9-5-37)的结果正是爱因斯坦原始引力能-动张量的结果．虽然从哈密顿形式出发计算能量是独立于任何形式的引力场能-动量赝张量，但所得的结果却与上述能-动

量张量相符合．为了直接证明这一论断，我们从 Landau 形式的引力场能-动量赝张量的形式出发，计算引力能．取引力常数 $k=1$，光速 $c=1$，

$$
\begin{aligned}
t_L^{\mu\nu} = & (2\Gamma^{\sigma}_{\lambda\tau}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\rho}_{\tau\rho})(g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau}-g^{\mu\nu}g^{\lambda\tau}) \\
& +g^{\mu\lambda}g^{\tau\sigma}(\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma}+\Gamma^{\nu}_{\tau\sigma}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}-\Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\tau}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\tau}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}) \\
& +g^{\nu\lambda}g^{\tau\sigma}(\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma}+\Gamma^{\mu}_{\tau\sigma}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho}-\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\tau}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\tau}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}) \\
& +g^{\lambda\tau}g^{\sigma\rho}(\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\nu}_{\tau\rho}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\tau}\Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}).
\end{aligned}
\tag{9-5-39}
$$

将(9-1-15)式代入上式，得

$$
t^0_\mu = g_{\mu\alpha}t_L^{\alpha 0} = \mathrm{I}^0_\mu+\mathrm{II}^0_\mu+\mathrm{III}^0_\mu+\mathrm{IV}^0_\mu,
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}^0_\mu = & g^{00}(2\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^{\rho}_{0\rho}+2\Gamma^3_{\mu 0}\Gamma^{\rho}_{3\rho}+2\Gamma^a_{\mu 0}\Gamma^{\rho}_{a\rho}-\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{00}-\Gamma^3_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{30} \\
& -\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{a0}-\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}\Gamma^{\rho}_{0\rho})-\delta^0_\mu\{g^{00}[2(\Gamma^0_{00}\Gamma^{\rho}_{0\rho}+\Gamma^3_{00}\Gamma^{\rho}_{3\rho}) \\
& -\Gamma^0_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{00}-\Gamma^3_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{30}-\Gamma^{\sigma}_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma 0}-(\Gamma^0_{00}+\Gamma^3_{03}+\Gamma^a_{0a})^2 \\
& -2\Gamma^0_{33}\Gamma^{\rho}_{0\rho}-2\Gamma^3_{33}\Gamma^{\rho}_{3\rho}+\Gamma^0_{3\rho}\Gamma^{\rho}_{03}+\Gamma^3_{3\rho}\Gamma^{\rho}_{33}+\Gamma^a_{3\rho}\Gamma^{\rho}_{a3} \\
& +(2\Gamma^3_{33}+\Gamma^a_{3a})^2]+g^{ab}[2\Gamma^0_{ab}\Gamma^{\rho}_{0\rho}+2\Gamma^3_{ab}\Gamma^0_{3\rho} \\
& -\Gamma^0_{a\rho}\Gamma^{\rho}_{0b}-\Gamma^3_{a\rho}\Gamma^{\rho}_{3b}-\Gamma^c_{a\rho}\Gamma^{\rho}_{cb}]\},
\end{aligned}
$$

经过计算可将 I^0_μ 化简为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}^0_\mu = & g^{00}\{2\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{\mu 0}+2\Gamma^a_{3a}\Gamma^3_{\mu 0}-2\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{\mu 0}-\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{\mu b}-2\Gamma^0_{00}\Gamma^a_{\mu a} \\
& -\Gamma^a_{0a}\Gamma^b_{\mu b}\}-\delta^0_\mu g^{00}\{-4(\Gamma^0_{00})^2+4(\Gamma^3_{33})^2-8\Gamma^0_{00}\Gamma^a_{0a} \\
& +8\Gamma^3_{33}\Gamma^a_{3a}-3(\Gamma^a_{0a})^2+3(\Gamma^a_{3a})^2+\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{0b}-\Gamma^b_{3a}\Gamma^a_{3b}\},
\end{aligned}
\tag{9-5-40}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}^0_\mu = & g^{\nu\alpha}(\Gamma^0_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}+\Gamma^0_{\alpha\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}-\Gamma^0_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^0_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}) \\
= & g^{00}(\Gamma^0_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{00}+\Gamma^0_{00}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}-\Gamma^0_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu 0}-\Gamma^0_{\mu 0}\Gamma^{\rho}_{0\rho})+g^{33}(\Gamma^0_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{33} \\
& +\Gamma^0_{33}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}-\Gamma^0_{3\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu 3}-\Gamma^0_{\mu 3}\Gamma^{\rho}_{3\rho})+g^{ab}(\Gamma^0_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{ab}+\Gamma^0_{ab}\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} \\
& -\Gamma^0_{a\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu b}-\Gamma^0_{\mu b}\Gamma^{\rho}_{a\rho})
\end{aligned}
\tag{9-5-41}
$$

$$
\begin{aligned}
= & g^{00}[2\Gamma^3_{33}\Gamma^0_{\mu 3}-2\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{\mu 0}+2\Gamma^a_{3a}\Gamma^0_{\mu 3}-4\Gamma^a_{0a}\Gamma^0_{\mu 0}-\Gamma^a_{0a}\Gamma^b_{\mu b} \\
& +\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{\mu b}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}^0_\mu = & g_{\mu\lambda}g^{0\beta}g^{\gamma\alpha}(\Gamma^{\lambda}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}+\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\beta\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}) \\
= & (g^{00})^2[2\Gamma^3_{33}(\Gamma^0_{03}g_{\mu 0}+\Gamma^3_{03}g_{\mu 3})+2\Gamma^a_{3a}g_{\mu 0}\Gamma^3_{33}
\end{aligned}
$$

$$+2\Gamma^\lambda_{3a}g_{\mu3}\Gamma^0_{00}-2\Gamma^0_{00}g_{\mu0}\Gamma^0_{00}-2g_{\mu3}\Gamma^0_{00}\Gamma^3_{33}-2g_{\mu0}\Gamma^0_{00}\Gamma^a_{0a}$$

$$-2g_{\mu3}\Gamma^3_{33}\Gamma^a_{0a}+\frac{g^{ab}}{g^{00}}(2g_{\mu0}\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ab}+2g_{\mu3}\Gamma^0_{00}\Gamma^3_{ab}$$

$$+\Gamma^d_{0d}(g_{\mu0}\Gamma^0_{ab}+g_{\mu3}\Gamma^3_{ab})-\Gamma^c_{0b}(g_{\mu0}\Gamma^0_{ac}+g_{\mu3}\Gamma^3_{bc})]$$

$$=(g^{00})^2\{g_{00}\delta^0_\mu[2(\Gamma^3_{33})^2-2(\Gamma^0_{03})^2+2\Gamma^3_{33}\Gamma^a_{3a}-4\Gamma^0_{00}\Gamma^a_{0a}$$

$$-(\Gamma^a_{0a})^2+\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{0b}]+g_{33}\delta^3_\mu[4\Gamma^0_{00}\Gamma^a_{3a}-2\Gamma^3_{33}\Gamma^a_{0a}$$

$$+\Gamma^a_{0a}\Gamma^b_{3b}-\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{3b}]\},\tag{9-5-42}$$

$$\mathrm{IV}^0_\mu=g_{\mu\gamma}g^{0\beta}g^{\gamma\alpha}[\Gamma^\lambda_{\beta\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}+\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}\Gamma^\rho_{\beta\lambda}-\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}-\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\Gamma^\rho_{\alpha\rho}]$$

$$=g_{\mu\gamma}g^{00}[g^{33}(\Gamma^\lambda_{0\rho}\Gamma^\rho_{33}+\Gamma^\lambda_{33}\Gamma^\rho_{0\lambda}-\Gamma^\lambda_{3\rho}\Gamma^\rho_{03}-\Gamma^\lambda_{03}\Gamma^\rho_{3\rho})$$

$$+g^{ab}(\Gamma^\lambda_{0\rho}\Gamma^\rho_{ab}+\Gamma^\lambda_{ab}\Gamma^\rho_{0\rho}-\Gamma^\lambda_{b\rho}\Gamma^\rho_{0a}-\Gamma^\lambda_{0b}\Gamma^\rho_{a\rho})],$$

经过计算得

$$\mathrm{IV}^0_\mu=\delta^0_\mu g^{00}[2(\Gamma^3_{00})^2-2(\Gamma^3_{33})^2+\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{0b}-(\Gamma^a_{0a})^2]$$

$$-g^{00}\delta^3_\mu[\Gamma^a_{0a}\Gamma^b_{3b}-\Gamma^b_{3a}\Gamma^a_{0b}].\tag{9-5-43}$$

将(9-5-40)～(9-5-43)相加，得

$$\mathrm{I}^0_\mu+\mathrm{II}^0_\mu+\mathrm{III}^0_\mu+\mathrm{IV}^0_\mu=$$

$$\delta^0_\mu[-2\Gamma^3_{00}\Gamma^a_{0a}-2\Gamma^3_{33}\Gamma^a_{3a}+\Gamma^b_{3a}\Gamma^a_{3b}+\Gamma^b_{0a}\Gamma^a_{0b}-3(\Gamma^a_{3a})^2$$

$$-(\Gamma^a_{0a})^2]+\delta^3_\mu[-2\Gamma^3_{33}\Gamma^a_{0a}-2\Gamma^0_{00}\Gamma^a_{3a}+2\Gamma^b_{3a}\Gamma^a_{0b}$$

$$-4\Gamma^a_{0a}\Gamma^b_{3b}].\tag{9-5-44}$$

以诸克氏符号的各个分量形式(9-1-15)式代入，得

$$t^0_\mu=\frac{1}{\alpha^2 f}[\delta^0_\mu(\alpha\alpha_{,tt}+\alpha\alpha_{,zz}+2(\alpha_{,z})^2)+2\delta^3_\mu(\alpha\alpha_{,tz}+\alpha_{,t}\alpha_{,z})].\tag{9-5-45}$$

考虑到 $\alpha_{,tt}=\alpha_{,zz}$，由(9-5-45)式即得出

$$t^{00}_L=\frac{2}{\alpha^2 f^2}(\alpha\alpha_{,z})_{,z},\tag{9-5-46}$$

即有

$$\sqrt{-g}\,\varepsilon_L=2,\ \partial_z(\alpha\alpha_{,z})=\partial_z\partial_z\alpha^2.\tag{9-5-47}$$

它与(9-5-37)式一致．这个具体结果告诉我们，从哈密顿形式出发计算得到的引力辐射能与从 Landau 引力能-动量赝张量的结

果是一致的，这是个很有兴趣的结论，对一般性的断言，在章末文献[5]中已有这个结论，我们现在指出的是引力波孤立子也仍遵从这个结论，正象通常情况一样，朗道的能-动量张量与爱因斯坦的原始能-动量张量在计算引力辐射严格解的辐射能时没有什么区别①。

① 作者感谢延智达同志，本文许多计算是他完成的，感谢谷超豪、胡和生、V. A. Belinski等教授的有益讨论。

参 考 文 献

[1] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCAllum, Exact Solutions of Einstein's field equations, Edited by E. Schmützer, Combridge University press, 1980.

[2] V. A. Belinski & V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP, 48(1978), 985.
50(1979), 1.

[3] H. Bondi, Nature, 179(1957), 1072. H. Bondi, F. A. E. Pirani, J. Robinson, Proc. Roy. Soc. (London), A25(1959), 519.

[4] 朗道、栗弗席茨,场论,人民教育出版社。

[5] L. D. Faddeev, Uspekhi Fizyk (УФН), 136(1982), 435.

[6] 延智达、葛墨林,中国科学, A8(1987), 844; 科学通报, 5(1987), 343.

[General Information]
□□=□□□□□□□□
□□=□□□□□
□□=475
SS□=10943012
DX□=
□□□□=1990□08□□1□
□□□=□□□□□□□□□

6 Klein-Gordon□□□sine-Gordon□□□□□□□

7 □□□Schr□dinger□□□Dirac□□□□□□□

□□□□

□□□ □□□□□□(□□□)

1 □□

2 BZG□□□□□□□

3 □□□□□

4 □□□□□□□□□□

5 BZ□□□□□□□□

□□□□